PUBLICATIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DE MONTRÉAL

Cours de Physique

TOME II

PROGRAMME DE 2e ANNÉE

Chocs, Mouvements harmoniques, Analyse graphique, Elasticité, Viscosité, Tension superficielle, Osmose, Thermodynamique, Théorie cinétique, Electromagnétisme, Systèmes dioptriques centrés.

Classification décimale 530

Par
ANDRÉ-V. WENDLING
PROFESSEUR TITULAIRE
DE PHYSIQUE

MONTRÉAL
CANADA
1934

PRÉFACE DE L'AUTEUR

Le côté "économique" des sciences exactes

"C'est un bel ornement que la Science, écrivait Montaigne, et un outil de merveilleux service".

Le physicien de métier qu'était Ernst Mach, a surtout retenu "l'outil de merveilleux service", laissant de côté "le bel ornement" et selon lui, le but de la science est de réaliser "l'économie de la pensée".

S'il est,en ces temps de dépression mondiale, un mot magique qui rallie tous les suffrages des gens honnêtes et sert à les distinguer nettement des illuminés, c'est bien ce mot d'"épargne" dont le besoin se fait sentir dans tous les milieux.

Nous avons pensé que le parfait honnête homme, l'intellectuel qui sait que le temps est encore plus précieux que l'argent, se rangerait volontiers à l'opinion d'un savant éminent qui préconise l'"économie de la pensée", l'"épargne" intellectuelle et montre qu'elle est réalisée par la science.

"La communication de la science par l'enseignement a pour but d'*épargner* certaines expériences à un individu *(écrivait Mach)*; ce sont même les expériences de générations entières qui sont transmises aux générations suivantes par les livres accumulés dans les bibliothèques et qui leur seront ainsi épargnées"

...."Toute science se propose de remplacer et *épargner* les expériences à l'aide de la copie et de la figuration des faits dans la pensée. Cette copie est en effet plus maniable que l'expérience elle-même et peut, sous bien des rapports, lui être substituée".....

...."S'il n'existe pas de résultat scientifique qui n'eut pu, en principe, être trouvé sans l'aide d'aucune méthode, *à cause de la courte durée de la vie et des limites restreintes de l'intelligence humaine, un savoir digne de ce nom ne peut être acquis que par la plus grande économie mentale"....(Ernst Mach).*

....La pensée du Maître de Vienne est illustrée par plusieurs exemples qui montrent que nous devons *éviter de recommencer les mêmes opérations* plusieurs fois afin de pouvoir concentrer notre attention sur les points délicats qui méritent une dépense de substance grise.

"Ainsi, l'égalité $(\frac{x^2-y^2}{x-y}) = (x+y)$ nous apprend que dans tous les cas futurs, quels que soient les nombres x et y, on pourra substituer l'opération simple de droite à l'opération compliquée de gauche"....

...."Au lieu de tenir compte des innombrables phénomènes de réfraction dans les milieux et sous des angles différents,

nous n'avons qu'à observer la valeur de l'indice de réfringence.... Nous pouvons reproduire et prévoir tous les cas de la réfraction à l'aide de la formule unique *(de Snell-Descartes)* $\frac{\sin i}{\sin r} = n$. la tendance à l'*économie* est ici évidente: la loi de la réfraction est une méthode de reconstruction *concise*, résumée, faite à *notre usage...*"

...."Le concept de moment d'inertie nous *épargne* la considération des masses partielles *(et par suite évite le calcul intégral)*. Par celui de fonction de forces *(ou potentiel)* nous nous *épargnons* la peine de rechercher quelles sont les composantes des forces *(et par suite évitons le calcul vectoriel)*. La dioptrique de Gauss nous *épargne* l'étude des surfaces réfringentes particulières à un système dioptrique et lui substitue la considération des foyers principaux et des points nodaux...."

C'est dans le même esprit d'*économie (de l'écriture et du calcul)* que nous utilisons les tables numériques et les machines à calculer: *Personne aujourd'hui n'oserait soutenir qu'il est plus économique d'ignorer mathématiques et physique pour calculer avec la lenteur d'un petit écolier plutôt que de se former à ces disciplines et pouvoir utiliser formulaires, tables, règles à calcul et abaques.*

Mais, quelques techniciens de second ordre avaient cru naïvement à la possibilité de recueils donnant toujours la formule parfaite et dispensant de tout effort intellectuel. Pour des élèves qui viennent de première année où ils n'ont rencontré que des cas *intentionnellement simplifiés*, où la formule du cours s'appliquait automatiquement, pareille chimère pourrait peut-être les bercer un instant et leur laisser croire que la vie d'ingénieur est aussi routinière que la vie d'écolier. C'est leur éviter bien des désillusions que de les prévenir que les conseils de l'ingénieur ne sont jamais demandés *(ni rétribués surtout)* que pour des cas d'exception où les meilleures formules connues ne s'appliquent pas telles qu'elles et que c'est seulement par une observation attentive et avec un jugement mûri par une longue habitude à réfléchir qu'un ingénieur peut trouver la solution satisfaisante à un problème technique.

La science de l'ingénieur ne consiste pas seulement à connaître quantité de "recettes" et de "tours de main", mais *surtout à penser concrètement avec bon sens, à juger avec méthode et esprit critique et à épargner la mémoire (à l'aide de formulaires et de machines)*. C'est en ce sens que nous croyons qu'un critique de Mach, Sir Norman Campbell, a fort bien pesé et rectifié les termes de Mach sur "l'économie de la pensée" quand il écrit: "Je crois que Mach accepterait volontiers ce que disait le professeur Whitehead:"les opérations de la pensée sont comme les charges de cavalerie; on doit les réserver pour les grandes occasions". Mais cette vue, me semble moins applicable à la physique qu'aux mathématiques pures dont parlait Whitehead. Le symbolisme très poussé et les règles formelles des mathématiques sont nécessaires pour les longues opérations; mais, en science, il n'y a rien de semblable et nous n'en avons pas besoin. **LES SEULS EFFORTS DE PENSER INUTILES SONT LES EFFORTS DE MEMOIRE**; pour retenir des constantes numériques, on n'a qu'à se référer à des tables imprimées.

"Il n'y a aucune économie de penser en établissant une rela-

tion entre un courant et une résistance au moyen d'une proportion plutôt que par une fonction plus complexe; c'est la simple substitution d'une forme de penser plus agréable à une qui l'est moins.

"C'est dans les applications pratiques classiques de la science qu'il faut aller au plus court, mais pas dans la science pure; le triomphe, là, est tout à la pensée". Et, comme les machines industrielles sont de plus en plus volumineuses, rapides et puissantes, l'ingénieur a sans cesse de nouveaux problèmes à résoudre, et pour leur trouver une solution approchée, il lui faut utiliser les ressources de la science pure, il ne lui suffira pas de sagement appliquer des formules simplistes, comme à la petite école, mais il lui faudra *"penser"* et *pour avoir le temps de penser sainement*, il faudra que *sa mémoire soit dégagée;* l'économie doit donc porter sur le "par coeur" et non sur le temps consacré à la réflexion, à la discussion et à l'acquisition d'une méthode de travail.

Nous qui n'avions pas de livres au collège et qui "grattions" depuis l'histoire littéraire et la géographie jusqu'aux théorèmes de géométrie et aux règles de l'harmonie, nous sentons, plus que bien d'autres privilégiés, quel gaspillage d'énergie c'était que cette besogne ingrate et matérielle de la copie dictée, et combien la méthode de Mach-Campbell est "économique" et doit être chère à des Polytechniciens qui seront des cerveaux adaptables à toute entreprise et non pas des acteurs, vendeurs ambulants, ou autres débiteurs de harangues qui ont, eux, besoin de mémoire automatique pour réciter des banalités par coeur.

N.B. Qu'on ne se méprenne pas sur ces idées: le souvenir précis de faits importants *(et bien compris)* et la connaissance exacte de quelques formules usuelles sont choses fort utiles; ce que condamnent Mach et Campbell, ce sont les efforts de certains malheureux "pour apprendre par coeur comme un petit enfant en vue d'une récitation mot à mot où l'intelligence a peu de part". Un esprit cultivé retient les idées maîtresses; un enfant ou un ignorant retient les mots sans saisir le sens du discours.

Et pour s'assurer par soi-même que l'on a réellement saisi une expérience *(ou que l'on possède un théorème)* et non pas seulement que l'on se les rappelle "par coeur", un excellent moyen est de changer les appareils de place *(ou de modifier la figure et la place des lettres).*

Si l'on ne s'en souvient *"que par coeur"*, l'on sera *incapable* de reconstituer seul le montage *(ou de démontrer seul le théorème sur la nouvelle figure).*

A-t-on au contraire l'intelligence du fait *(ou de la proposition)*, i.e. l'idée claire de la chose, et non pas seulement l'image visuelle du montage *(ou la présence des sons qui traduisent la proposition)*, il sera alors aisé de reconnecter les divers appareils entre eux *(ou d'arriver à déduire logiquement la démonstration de la proposition énoncée).*

Un élève consciencieux ne devrait jamais passer à une autre expérience *(ou à un autre théorème)* tant qu'il ne s'est pas ainsi assuré par lui-même qu'il a bien l'intelligence de ce qu'il vient de voir, entendre, ou étudier; se défier surtout de la traîtresse facilité de mémoire qui donne à certains l'illusion de savoir avant même qu'ils aient compris pleinement.

Cette mémoire des sens ne devrait plus être cultivée après douze ans, c'est-à-dire dès l'âge où l'élève moyen est à même de *discuter critiquement* et non plus de *répéter machinalement*. Mais ce n'est pas d'aujourd'hui que psychologues et éducateurs constatent la *"paresse intellectuelle"* non seulement chez les écoliers, mais dans le grand public: la masse ne vise guère à la réflexion profonde et "préfère répéter les docteurs plutôt que de se les assimiler", envisageant plus volontiers l'usage de la *mémoire automatique* que *l'exercice de la "jugeote"*, comme le constate l'ironique dicton populaire:

"Chacun se plaint de sa Mémoire,
Et Personne de son Jugement".

Montréal, Mai 1934

ANDRE V.WENDLING

CHAPITRE PREMIER

Chocs des solides et des liquides

SOMMAIRE: Impulsion des forces.- Choc direct de deux solides mous.- Choc direct de deux solides élastiques.- Coefficient de restitution des solides naturels.- Battage des pieux.- Chocs obliques *(ou indirects)*.- Centre de percussion *(raquette, pendule)*.- Détermination physique du moment d'inertie d'un pendule composé. Balistiques de translation *(à la Hirn)* et de rotation *(Robins)*. La forme que prend le théorème de la quantité de mouvement pour les mouvements de régime des liquides.- Pression d'un fluide sur une conduite coudée.- Réaction d'un jet *(Segner)*. Contraction de la veine *(Borda)*.- Expérience négative de Galilée.- Le théorème du moment de la quantité de mouvement *(turbine)*.- La pression en théorie cinétique. Résilience. Moutons pendules *(de Charpy)* et Moutons rotatifs.

N°1: Nous avons vu *(1ère année. chapitre XI)* que l'accélération d'un corps était dynamiquement le quotient de la force qu'il subissait par sa masse

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

et cinématiquement le quotient de la variation de vitesse par la durée pendant laquelle avait eu lieu la variation de vitesse

$$\gamma = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Eliminant gamma, nous voyons que

$m\Delta V = F\Delta t$, soit en langage ordinaire:

la variation de la "quantité de mouvement" ="l'impulsion de la force".

(Rappelons que l'on appelle "quantité de mouvement" le vecteur d'intensité mV mené par le centre de gravité du solide avec pour direction et sens ceux du vecteur vitesse; et qu'on appelle impulsion l'aire d'un diagramme dont les ordonnées sont les forces à tout instant et les abscisses les durées écoulées lors du choc); (voir fig.1).

Un choc n'est jamais instantané, mais ce n'est que depuis une cinquantaine d'années que l'on a pu déterminer la durée d'un choc *(Schneebeli, Genève)*. Cependant, bien avant la mesure directe, Jean Bernoulli, dès 1724, avait entrevu clairement que le choc dure un certain temps. "Toute action se fait successivement et par éléments, quelque petite que paraisse la durée de l'action entière. Ainsi le choc de deux corps, qui paraît com-

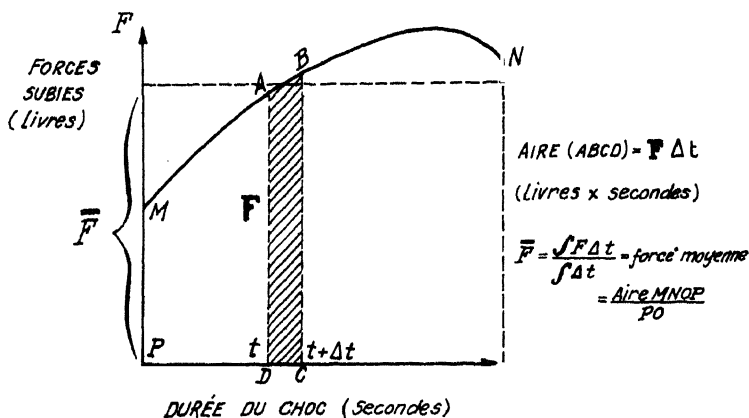



Fig. 1

mencer et finir dans le même instant, ne laisse pas d'être d'une duree qui, à proprement parler, a ses éléments, je veux dire un nombre infini de parties infiniment petites".

N°2: *Phases du choc*. Il y a d'abord déformation, les corps se comprimant tant qu'ils ont une vitesse différente; puis passage de la déformation par un maximum lorsqu'au contact la vitesse relative est nulle et enfin *(sauf pour les corps mous)* les corps reprennent progressivement leur forme antérieure au choc pour finalement s'éloigner.

Ces considérations qui datent d'Huyghens et Wren pour les chocs des corps élastiques *(avec conservation de l'énergie)* et de Wallis pour les chocs des corps mous *(avec perte d'énergie)* ne sont valables que pour les *chocs légers* où les actions élastiques sont confinées aux parties des corps qui entrent en contact lors du choc, sans qu'il y ait propagation des ébranlements dans toute la masse.

Nous limiterons notre étude au cas de deux sphères ou tout au moins au cas de deux ovoïdes admettant comme axe de symétrie la normale à la zone de contact. Comme, de plus, il est question de chocs légers, on pourra négliger les vibrations des molécules de la partie qui a été un instant comprimée, puisque

a) il n'y a qu'une fraction infime de matière qui vibre

b) ces vitesses sont alternativement dans un sens puis dans le sens opposé, donc ont une moyenne nulle *vectoriellement (et non énergétiquement car alors il s'agit de la moyenne du carré de la vitesse et non plus de la vitesse)*.

Ces précautions prises, il faut distinguer les forces exterieures des forces intérieures.

Les premières sont de grandeur finie *(la pesanteur par exemple)* et *comme la durée du choc est toujours petite (inférieure au millième de seconde bien souvent), leur impulsion sera infiniment petite;* d'ailleurs, si les boules sont sur un plan

horizontal ou suspendues par des fils, la réaction de la table ou des fils neutralise la pesanteur. Si les boules étaient de fer, les actions magnétiques, électrostatiques....etc.... ne donneraient pas naissance à une impulsion appréciable puisque ces *forces seraient finies* et que la *durée du choc est très petite (le produit $\vec{F}\Delta t$ est petit si $\vec{F}$ étant fini, Δt est petit)*.

Quant aux forces intérieures, *si l'on envisage en bloc les deux corps qui entrent en collision*, en vertu du principe de "l'égalité de l'action à la réaction", qu'il s'agisse d'action de contact ou des actions à **distance**, toute force action de l'un des corps sur l'autre est vectoriellement annulée par la réaction directement opposée qu'oppose le second corps et cela indépendamment de la durée du choc, puisque deux vecteurs égaux et opposés ont une somme nulle *(mais on ne peut appliquer ce raisonnement à chacun des corps considéré seul)*.

L'impulsion des forces, lors d'un choc, se compose donc
1º) d'une partie infiniment petite due aux forces extérieures (ε)
2º) d'une partie identiquement nulle due aux forces intérieures *(0)*

Comme la *variation de la quantité de mouvement est une grandeur importante*, nous négligerons l'impulsion des forces et puisque la variation du vecteur quantité de mouvement est nulle, nous dirons que "pour tout choc, il y a conservation du vecteur quantité de mouvement *de l'ensemble des deux corps"*

$$\vec{F}\Delta t = 0+\varepsilon = \Sigma\Delta(m\vec{V}) \; ; \quad \Sigma(m\vec{V}) = \text{constante}$$

N°3: *Corps parfaitement mous (restant en contact)*

Leur vitesse ultérieure est donc commune, désignons par U cette valeur commune, les vitesses antérieures étant V et V' respectivement

$$\overrightarrow{mV} + \overrightarrow{m'V'} = \overrightarrow{(m + m')\,U}$$

$$\vec{U} \qquad m + m'$$

Note: L'addition étant *vectorielle*, les quantités $\overrightarrow{mV}$ et $\overrightarrow{m'V'}$ se *retrancheraient* si les corps allaient à la rencontre l'un de l'autre au lieu de se poursuivre avant le choc.

Cas particuliers *a)* masses égales et vitesses primitives de même sens; la vitesse ultérieure est la moyenne arithmétique des vitesses antérieures;

b) masses égales, vitesses égales et opposées, les corps s'arrêtent *(et restent en contact)*;

c) l'une des masses est très grande par rapport à l'autre $m' \gg m$

$$U = \frac{\frac{m}{m'}V + V'}{\frac{m}{m'} + 1} = V'$$ *(la vitesse de la masse énorme n'est pas modifiée)*.

N°4: *Corps parfaitement élastiques (cas idéal):* Admettant que l'énergie cinétique initiale s'est épuisée et transformée en énergie potentielle élastique **A** pendant la première phase du choc, si l'on avait affaire à un choc léger et direct, on aurait restitution d'énergie cinétique *(aux dépens de l'énergie potentielle élastique A)* lors de la troisième phase et cela *intégralement si les corps étaient parfaitement élastiques*

$$\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}m'V_0'^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}m'V_1'^2$$

En abrégé, on dit que pour deux corps parfaitement élastiques, *lorsqu'on les considère en bloc, il y a à la fois*

"conservation du scalaire énergie cinétique et du vecteur quantité de mouvement"

$$\frac{1}{2}m\ V_0^2 + \frac{1}{2}m'V_0'^2 = \frac{1}{2}m\ V_1^2 + \frac{1}{2}m'V_1'^2 \qquad (I)$$

$$m\ V_0 + \ 'V_0' = mV_1 \qquad m'V_1' \qquad (II)$$

ou écrites plus symétriquement

$$\frac{1}{2}m\ (V_0^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}n\ (V_1'^2 - V_0'^2) \qquad (I)'$$

$$m\ (V_0 - V_1) = m'\ (V_1' - V_0') \qquad (II)'$$

d'où par division membre à membre

$$V_0 + V_1 = V_1' + V_0'$$

$$\text{ou} \quad V_0 - V_0' = V_1' - V_1 \qquad (III)$$

ce qu'exprimait Huyghens lorsqu'il disait que "le rapprochement avant et l'éloignement après le choc se font avec la *même vitesse relative"*.

Combinant les deux relations linéaires exprimant "la conservation de la quantité de mouvement" et "l'égalité de la vitesse relative", on tire

$$V_1 = \frac{2m'V_0' + mV_0 - m'V_0}{\text{[illegible]}} \quad \text{et} \quad V_1' = \frac{2mV_0 + m'V_0' - mV_0}{\text{[illegible]}}$$

Cas particuliers: *a)*les masses sont égales: $V_1' = V_0$ et $V_1 = V_0'$ *(les corps échangent leurs vitesses: expérience des pendules à boules d'ivoire)*

b) l'une des masses est·très grande $m' \gg m$

$$V_1 = 2V_0' - V_0 \qquad V_1' \qquad V_0'$$

ici encore, la vitesse de la grosse boule n'a pas changé. Si cette boule est un plancher élastique, $V_1' = V_0' = 0$; $V_1 = -V_0$, la petite balle rebondit avec une vitesse à peu près identique à celle qu'elle avait en frappant.

N°5: *Perte d'énergie lors du choc de deux corps mous (Lazare Carnot).*

"Le travail perdu dans le choc des corps mous est égal à la somme des puissances vives qui correspondent aux vitesses perdues ou gagnées par les deux corps"

$$A(perdu) = \frac{1}{2}mV_o^2 + \frac{1}{2}m'V_o'^2 - \frac{1}{2}(m+m')U^2$$

Mais *(N°3)* $U = \dfrac{mV_o + m'V_o'}{m+m'}$; substituant cette valeur dans l'équation précédente:

$$A(perdu) = \frac{1}{2}mV_o^2 + \frac{1}{2}m'V_o'^2 - \frac{1}{2}(m+m')\left(\frac{mV_o + m'V_o'}{m+m'}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{m\,m'}{m+m'}\,(V_o - V_o')^2$$

Pour faire apparaître les vitesses perdue *(par l'un)* et gagnée *(par l'autre)*

$A(perdu) = \frac{1}{2}m\,(V_o - U)^2 + \frac{1}{2}m'\,(U - V_o')^2$, remarquons qu'en développant les deux carrés et en retranchant l'expression de l'énergie perdue, on obtient le carré de

$(mU + m'U - mV_o - m'V_o')$ ce qui est identiquement nul puisqu'il s'agit de la différence des vecteurs quantité de mouvement $(m+m')U$ et $mV_o + m'V_o'$ et que dans tout choc, il y a conservation de la quantité de mouvement des deux corps.

Explication physique: Pendant la déformation *(écrasement)*, il y a perte d'énergie cinétique et comme les corps mous n'ont pas de ressort, il n'y a pas restitution comme dans le cas des corps élastiques d'où perte d'énergie dans le cas des corps mous et à un degré moindre dans le cas des corps naturels ou semi-élastiques.

Une balle de plomb, une boule de neige, restent collées sur un mur rugueux; il y a alors perte totale d'énergie cinétique.

N°6: *Coefficient de restitution* de deux solides naturels *(ni mous ni élastiques).*

Newton, constatant qu'une bille ne rebondit jamais jusqu'à la hauteur dont elle a chu, a baptisé de "coefficient de restitution" le rapport *(fraction) de la valeur absolue de la vitesse réfléchie à la valeur absolue de la vitesse incidente (normale).*

Le cas du numéro *(3)* correspond à un coefficient nul, celui du numéro *(4)* à un coefficient unité.

Pour des vitesses modérées, le coefficient de restitution *(e)* vaut environ

- $\frac{9}{10}$ bille de fonte sur verre,
- $\frac{7}{9}$ bronze sur ivoire
- $\frac{6}{10}$ pierre sur bois
- $\frac{1}{5}$ balle de plomb

$\downarrow V = \sqrt{2gh}$ *(incidente)*

$-\sqrt{2gh'} = \uparrow U = -e\sqrt{2gh}$ *(réfléchie)*

h' *(rebondissement)* $= e^2 h$ *(chute)*

Note (1) Ne pas confondre le rapport des vitesses *(e) avec le rapport des chemins (e)²*, la hauteur atteinte étant proportionnelle au carré de la vitesse réfléchie.

Note (2) Le coefficient de restitution décroît linéairement avec la vitesse relative initiale. Le choc est donc d'autant moins élastique que la zone écrasée pendant le choc est plus considérable *(Vincent)*.

L'équation *(111)* du numéro *(4)* doit être remplacée par la suivante qui indique que la vitesse relative après n'est qu'une fraction *(e)* de l'incidente.

$$V_0 - V'_0 \qquad V_1 - V'_1$$

L'autre équation *(conservation de la quantité globale de mouvement)* est toujours vraie.

N°7: *Battage des pieux.* Un pieu cylindrique terminé en pointe à la base est chaussé d'un sabot de fer *(pointu)* et coiffé d'un collier de fer pour éviter que les chocs ne séparent les fibres.

On élève une grosse masse de fonte *(mouton)* à une certaine hauteur *(h)* puis on la laisse tomber sur le pieu.

A moins d'un sol très résistant, si le pieu est assez long, le bélier accompagne un instant le pieu et l'on peut pratiquement considérer le choc du mouton et du pieu comme *mou*.

$$V_0 \text{ (bélier)} = \sqrt{2\ g\ h} \quad ; \quad V' \text{ (pieu)} = 0$$

Soient *m et m'* les masses du bélier et du pieu

$$(m + m')\ U = m\ V_0 + 0 = m\ \sqrt{2\ g\ h}$$

ou $\qquad U$

Soit e la profondeur dont s'enfonce le pieu lors du coup, appelons R la réaction moyenne du sol lors du parcours e.

L'énergie cinétique du bélier et du pieu se coalise avec le travail de la pesanteur *(chute du bélier et du pieu lors de l'enfoncement e)* pour accomplir le travail de défoncement.

$$R\ e \quad \frac{1}{2}\ (m \quad m')\ U^2 + \qquad ')\ g$$

Eliminant la vitesse U entre les deux équations, il vient

$$R\ e \quad \frac{m^2}{m+m'}\ g\ h + (m+m')\ g\ e \qquad \frac{m^2 h}{m+m'} + (m+m')\ e)$$

d'où $\quad e \quad \dfrac{m^2 g\ h}{(m + m')\ R - (\qquad ')^2}$

En général, on néglige le terme $-(m+m')^2 g$ et l'on tient compte *(depuis Rankine)* du travail de compression du pieu.

Nous ne pouvons ici, avant l'élasticité, tenir compte de ce terme correctif, aussi nous nous contenterons de la première approximation *(négligeant la correction de Rankine, le rebondissement du bélier et le travail de la pesanteur lors de l'enfoncement)*

$$\frac{m^2}{+\ m'}\ g\ \frac{h}{R} = (m\ g$$

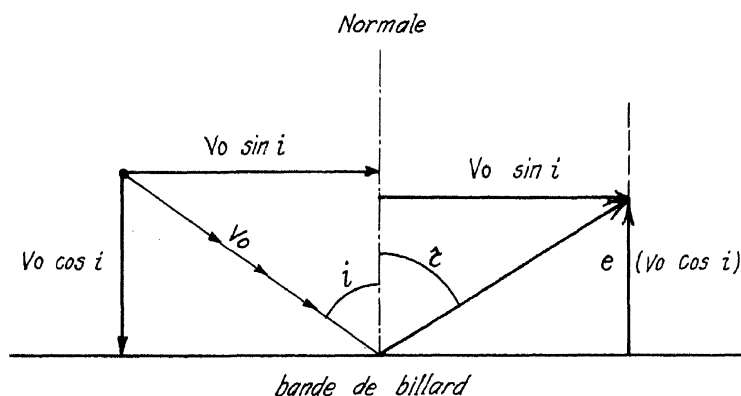
pour tirer les règles suivantes.

a) à égalité de travail *(m g h)*, c'est-à-dire petite masse du marteau pilon et grande hauteur de chute ou grosse masse et petite chute, l'enfoncement est d'autant plus grand que le rapport $(\frac{m}{m'})$ de la masse du bélier à celle du pieu est plus grand: donc *pour enfoncer un gros clou, il faut un gros marteau;* avec un petit marteau, même en travaillant autant, le gros clou ne pénétrerait pas mais sa tête seule se déformerait.

b) une enclume doit être très massive par rapport aux marteaux de forge pour éviter tout enfoncement appréciable.

c) pour buriner une petite pièce de fer, il faut la serrer dans un gros étau,alors qu'une lourde pièce n'a pas besoin d'être tenue.

N°8: *Chocs obliques* ou indirects. La composante tangentielle des vitesses relatives incidente et réfléchie n'a pas changé *en l'absence de frottement;* les composantes normales suivent la loi de Newton *(coefficient de restitution)*.

C'est pourquoi l'angle de réflexion d'une bille de billard est supérieur à l'angle d'incidence à moins que le frottement ne vienne diminuer la composante tangentielle de la vitesse réfléchie *(voir fig.2)*.

$$tg\ i = \frac{Vo\ \sin i}{Vo\ \cos i} \quad , \qquad tg\ r = \frac{Vo\ \sin i}{e\,Vo\ \cos i} = \frac{tg\ i}{e}$$

comme $e < 1$

$$tg\ r > tg\ i \quad ; \quad r > i$$

Fig. 2

N°9: *Centre de percussion.* Huyghens le premier a trouvé le moyen de ne pas produire de répercussion à l'axe d'oscillation lorsque l'échappement libère l'énergie nécessaire à l'entretien du mouvement en donnant une petite impulsion au pendule.

Le frottement épuiserait vite le mouvement du pendule s'il n'y avait pas ces petits coups; d'autre part, si ces petits coups étaient donnés n'importe où, l'axe d'oscillation du pendule serait vite faussé *(mal tenir une raquette peut fouler le poignet)*.

Nous prendrons la raquette de tennis pour expliquer ce qu'est physiquement le centre de percussion qui correspond à l'axe d'oscillation *(le poignet du joueur)*; le centre de percussion étant le milieu du réseau où frappe la balle.

Soient M la masse de la raquette I_G le moment d'inertie de la raquette relativement à un axe parallèle à l'articulation du poignet et mené par le centre de masse, L la distance du poignet au centre de gravité de la raquette, b la distance du centre de gravité de la raquette au milieu du réseau *(voir fig.3)*.

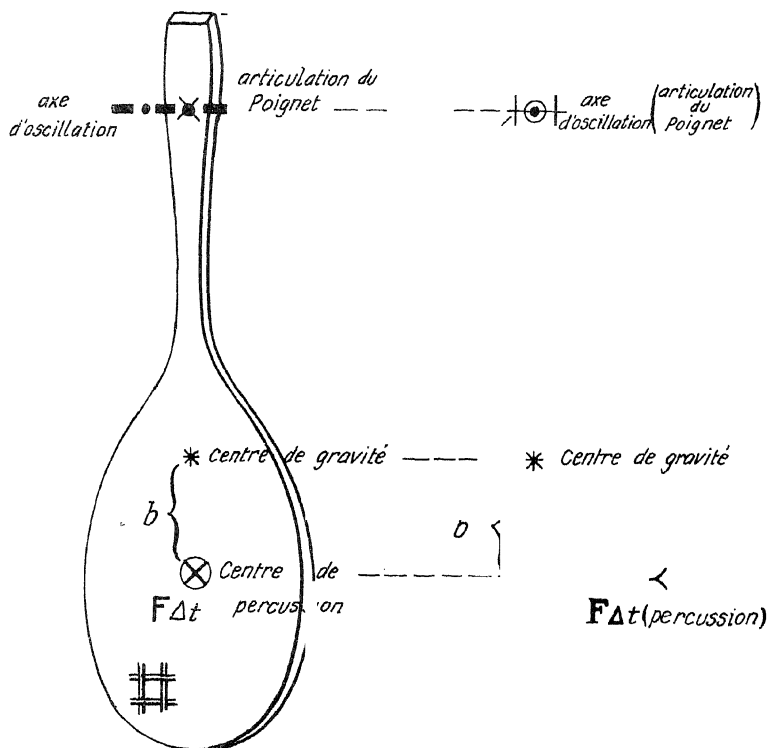



Fig. 3

Etudions d'abord le mouvement de translation de la raquette:

$\mathbf{F}\Delta t = M\Delta\mathbf{V}$; comme la vitesse antérieure est nulle pour la raquette, si $\vec{V}_0$ est la vitesse qu'elle acquiert et si la balle arrive avec une vitesse $\vec{V}_0'$ et part avec une vitesse $\vec{V}_1'$, supposant qu'il n'y ait aucune percussion au poignet, que tout le travail du joueur soit de compenser le poids de la raquette, on a *(m étant la masse de la balle)*

$$M\ (0) + (m\ \overleftarrow{V_0'}) = (M\ \overleftarrow{V_0}) + (m\ \overrightarrow{V_1'})$$ soit algébriquement

$$m\ V_0' = M\ V_0 - m\ V_1'$$

ou encore{$- m\ (V_0' + V_1')$ perte vectorielle de quantité de mouvement de la balle *(dont le mouvement s'est non seulement annulé mais a changé de sens)*}

égale{$+ M\ V_0$ gain vectoriel de quantité de mouvement pour la raquette} *(comptant comme sens positif le sens initial de la balle)*

arithmétiquement $|V_0| = \dfrac{m\,|V_0'| + m\,|V_1'|}{M}$. En fonction de la force $\mathbf{F}$ que la balle a exercé en moyenne pendant toute la durée du choc, Δt, la vitesse V_0 vaut $V_0 = \mathbf{F}\ \Delta t \div M$.

Nous avons supposé que l'*articulation du poignet ne ressentait rien*, vu que le joueur tenait sa raquette au bon endroit; cherchons à *quelle condition ceci aura lieu*.

En plus du mouvement de translation, la raquette a un mouvement de rotation autour de son centre de gravité *(à moins que la balle ne tape juste au centre de gravité)*.

Le moment de la percussion *(qui est à la percussion ce qu'un couple est à une force)* sera le produit vectoriel du bras de levier par la percussion.

$$\otimes\ \mathfrak{M} = \downarrow b \times \overleftarrow{\mathbf{F}}\ \Delta t$$

et causera une vitesse angulaire Ω_0 au pendule qu'est la raquette.

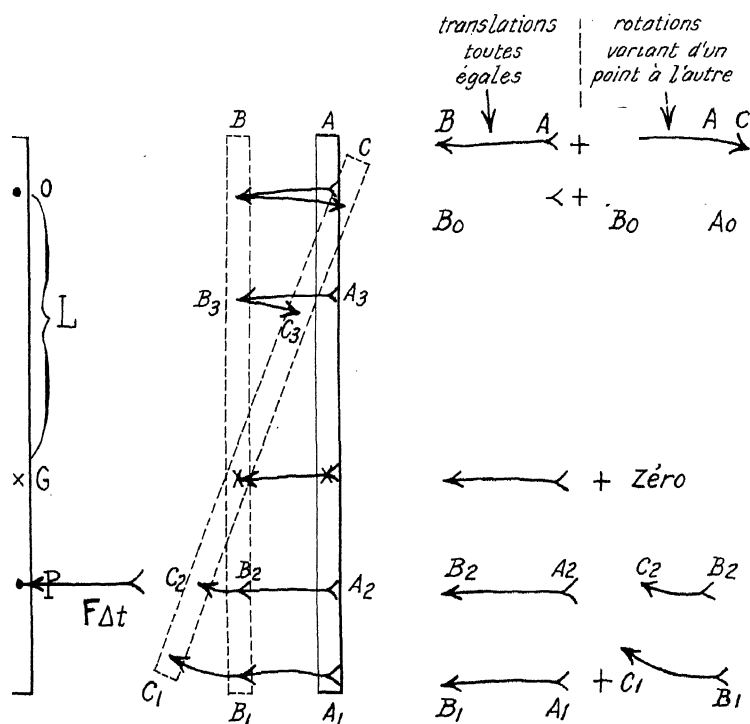
En effet, la force moyenne $\overleftarrow{\mathbf{F}}$ avec laquelle frappe la balle ayant un bras de levier $\downarrow b$ relativement au centre de gravité de la raquette, il y a un couple ou moment statique égal à

$\otimes\ \mathbb{C} = \downarrow b \times \overleftarrow{\mathbf{F}}$; qui s'exerce pendant Δt la durée du choc, et la formule des rotations $I\Delta\Omega = \mathbb{C}\Delta t$ qui correspons à $M\Delta V = \mathbf{F}\Delta t$ pour les translations nous montre que la variation du moment de la quantité de mouvement *(nulle comme toujours pour l'ensemble des deux corps raquette et balle)* n'est pas nulle pour la raquette considérée seule. Le moment de la percussion que subit la raquette est:

$$\mathfrak{M} = \otimes\ I_G(\Omega_0 - \text{zéro}) = \otimes\mathbb{C}\Delta t = \downarrow b \times \overleftarrow{\mathbf{F}}\Delta t$$

Le rapport de la vitesse angulairé initiale communiquée à la *raquette* à la vitesse linéaire de translation avec laquelle elle part est

$$\frac{\Omega_0}{V_0} = \frac{b\ \mathbf{F}\ \Delta t \div I_G}{\mathbf{F}\ \Delta t \div M} = \frac{b \div I_G}{\div M}$$

Mais les deux mouvements *(translation et rotation)* ont lieu simultanément ou comme on dit se superposent *(voir fig.4)*

Pour les points du même côté que l'impultion FΔt, *la rotation autour du centre de gravité s'ajoute au mouvement d'ensemble de translation.*

Pour les points au-delà de G, la rotation se retranche de la translation d'ensemble.

Pour le point O, il y a interférence la rotation annulant la translation et le point O n'a aucune tendance à bouger.

Fig. 4

Le centre de gravité G ne subit que la translation *(AB)*; les points de la raquette du même côté que le centre P de percussion par rapport au centre de gravité ont un mouvement de rotation qui s'ajoute à celui de la translation $(B_2C_2 + A_2B_2)$ alors que les points de la raquette qui sont du côté opposé ont un mouvement de rotation qui se retranche de celui de la translation $(A_3B_3 - B_3C_3)$

On conçoit donc l'existence d'un point O pour lequel la rotation annule la translation; ce sera celui situé en O tel que la vitesse linéaire due à la rotation $L\Omega_0$ annule la vitesse de translation V_0

$$+ V_0 = 0 \quad \text{ou} \quad |\Omega_0| \qquad -1$$

Comparant les deux expressions de $\frac{\Omega_0}{V_0}$, il vient

$$\frac{b \div I_G}{\div M} = L^{-1} = \frac{b\,M}{I_G}$$ expression qui est bien homogène

$$\frac{(pied)\div(slugs \times pied^2)}{\div slug} = (pied)^{-1} = \frac{pied\ (slug)}{slug\ (pied^2)}$$

ou $b\,L \qquad \frac{I_G}{M}$ Ainsi donc la distance du poignet au centre de gravité étant *(L) si le produit de cette distance par (b) le bras de levier de la percussion* est égal au quotient du moment d'inertie I_G de la raquette *(relativement à un axe, parallèle au poignet et mené par G)* par *M* sa masse, *quel que brutal que soit le jeu de l'adversaire, le poignet ne ressentira rien,* tout se passant comme si la raquette tournait autour du poignet, le joueur n'ayant qu'à compenser la force extérieure *(poids)* dont la percussion est infiniment petite vu la faible durée du choc.

Note: Il est facile de s'assurer en tenant une raquette en différents points qu'un même coup appliqué au milieu du réseau produit des répercussions bien différentes.

Il serait très pénible de tenir la raquette à l'extrémité du réseau où la vitesse linéaire due à la translation s'ajoute à la plus grande vitesse linéaire due à la rotation. Il vaudrait mieux recevoir la balle avec la main.

Huyghens a démontré que l'axe d'oscillation et le centre de percussion sont réciproques: c'est ce qui est clair d'après la formule symétrique en b et L

$$b\,L = \frac{I_G}{M}$$

On peut interchanger L et b, suspendre en P et taper en O.

N°10: *Détermination physique du moment d'inertie d'un pendule composé (fig.5)A*

Appelons I_O le moment d'inertie relatif à l'axe d'oscillation O et I_G celui relatif à un axe parallèle à O mené par le centre de gravité. On a vu *(1ère année ....)* que

$$I_O = I_G + M\,L^2$$

Supposons que l'axe soit monté sur billes *(frottement négligeable)* et que le mouvement soit communiqué par une percussion appliquée au centre de percussion, si de plus tout l'en-

m' et m récipients fixés au pendule où l'on peut verser du mercure pour augmenter la période d'oscillation

λ'
m'
λ
O
m
G
Mg
P
α

O
L
α
L sin α
Mg

$$\mathcal{C} = \overleftarrow{L \sin\alpha} \times \downarrow Mg$$

$$\lim\left(\frac{\mathcal{C}}{\alpha}\right)_{\alpha=0} = L\,M\,g$$

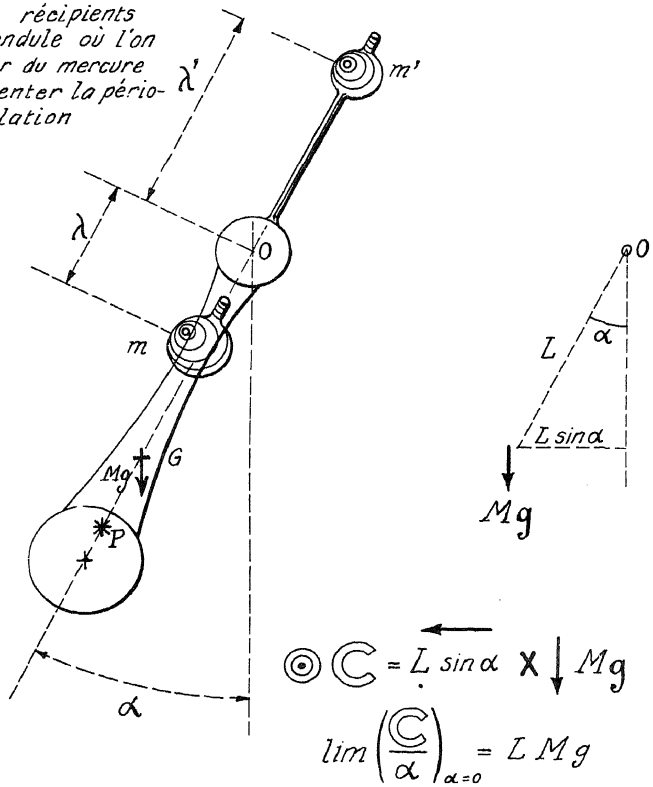



Fig. 5A

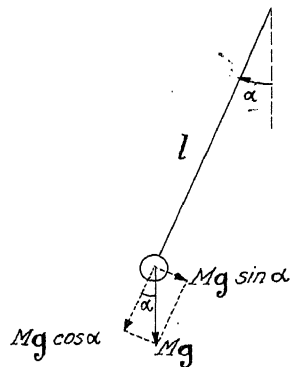



Fig. 5B

semble du pendule est dans un milieu non visqueux, on aura pour période complète des oscillations:

$$T = 2\pi \sqrt{I_0 \div \lim \frac{(couple)}{(angle)}}_{\alpha=0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{LMg}}$$

$\alpha = 0$ étant la position d'équilibre stable de ce système pendulaire.

Démonstration: La démonstration du cas général sera donnée au Cours de Mécanique Rationnelle; nous nous bornerons ici à celle relative au pendule simple *(petite boule pesante attachée à un fil très long)*.

La petite boule peut être considérée comme un point pesant; la force qui tend à s'opposer à l'augmentation de l'angle d'écart α est suivant la *tangente au mouvement(voir fig.5B)*-Mg sin α; l'arc dont la boule s'est alors écarté de la verticale est + l α *(α étant en radian).*

(La vitesse tangentielle au mouvement est donc + l $\frac{d\alpha}{dt}$ et l'accélération tangentielle + l $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$; écrivons que la masse est le quotient de la force par l'accélération.-

$$F = M\gamma \; ; \text{ ou } - Mg \sin\alpha = (+ l \frac{d^2\alpha}{dt^2}) M$$

(La raison du signe - est que lorsque l'angle α augmente la force "de rappel" qu'est la composante tangentielle de gravité est antagoniste; de même lorsque l'angle α diminue la force tangentielle accélère cette diminution d'angle).

L'équation différentielle qui régit le mouvement du pendule simple est donc

$$M l \frac{d^2\alpha}{dt^2} + M g \sin\alpha = 0$$

Pour de *faibles amplitudes,* on peut confondre le sinus avec l'angle et écrire

$$M l \frac{d^2\alpha}{dt^2} + M g (\alpha) = 0$$

ou encore en posant $\frac{g}{l} = n^2$

$$[illegible] \; d t^2$$

Equation qui est satisfaite par α = A sin n t + B cos n t A et B étant des constantes quelconques.

En effet, $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = - n^2 A \sin n t - n^2 B \cos n t = - n^2\alpha$

Ceci nous montre que pour que le mouvement accomplisse toute sa période *(que la phase ou angle n t varie de 2π)* il faut que la durée: $T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ s'écoule. C'est la *période au mouvement pour les oscillations de faire amplitude.*

Constatons que la formule avancée pour le pendule composé donne bien celle du pendule simple comme cas particulier:

$$M l^2 ; \; 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{[illegible]}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Première expérience: Les vases à mercure *m et m'* étant vides, on fait osciller le pendule et l'on attend pour compter les périodes que le pendule s'écarte de la verticale d'angles inférieurs à cinq degrés.

On compte une cinquantaine de périodes complètes et l'on prend la moyenne

$$T_0 = \frac{t}{50} \cdot T_0 =$$

Deuxième expérience: On remplit les vases de mercure de telle façon *(voir fig.5A)* que les produits des masses que l'on y verse par leurs distances à l'axe d'oscillation soient égaux.Comme de plus les vases sont de part et d'autre de l'axe, les masses de mercure sont ainsi *statiquement équilibrées*

$$\lambda - \qquad 0$$

et comme la résultante des poids de ces masses se trouve sur l'axe d'oscillation, elle n'a pas de bras de levier *(une masse m descend quand l'autre m' monte)* et le *couple résultant M g L sin α n'est pas modifié* par l'adjonction de ces surcharges, alors que l'*inertie de rotation est devenue plus grande:*

$$I_1 = I_0 + m\,\lambda^2 + m'\,\lambda'^2$$

La période s'en trouve allongée

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + m\,\lambda^2 + m'\,\lambda'^2}{M\,g\,L}} > T_0$$

Mesurant T_1, moyenne d'une cinquantaine d'oscillations aussi, on a

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{I_0 + m\,\lambda^2 + m'\,\lambda'^2}{}$$ ou en retranchant un aux deux membres

$$\text{d'où} \quad I_0 = (\ m\lambda^2 +$$

Il est plus facile de peser *m* et *m'* et de compter les durées des oscillations que d'essayer d'intégrer les inerties élémentaires.

On peut d'ailleurs se rendre compte de la précision obtenue en modifiant les surcharges et en recommençant les deux expériences.

N°11: *Balistique de translation* *(suspension à la Hirn)*. Cette suspension qui assure une pure translation *(la caisse de sable reste toujours horizontale)* est décrite dans le cours de 1ère année.

Tirant une balle, celle-ci pénètre dans la caisse de sable; il n'y a pas conservation de l'énergie, mais conservation du vecteur quantité de mouvement.

Soient **V** et *m* les vitesse et masse de la balle, M la masse de la boîte, **V'** la vitesse commune à la fin du choc.

$$M\ (\text{zéro}) + \overleftarrow{m}\,\mathbf{V} = (m \overleftarrow{+ M})\ \mathbf{V}'$$

d'où l'on est ramené à évaluer **V'** la vitesse de l'équipage pour connaître la vitesse **V** du projectile à la distance à laquelle on a tiré *(comme il est plus aisé d'évaluer les vitesses faibles,c'est un avantage)*.

$$V = \frac{m + M}{m} V'$$

Balle et caisse ont donc acquis une énergie cinétique $\frac{1}{2} (m + M) V'^2$ à la fin du choc; le pendule va remonter d'une certaine hauteur *(h)* perdant son énergie cinétique pour la transformer en énergie potentielle.

$$\frac{1}{2} (m + M) V'^2 = (m + M) g.h$$

(On évalue cette hauteur, soit en visant le bord supérieur de la boîte, soit en notant l'angle (α) dont ont tourné les cordes lors de l'écart maximum d'avec la verticale)

$$h = L - L \cos \alpha = L (1 - \cos \alpha) = 2L \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

N°12: *Balistique de rotation (Benjamin Robins 1742) voir fig.6.*

Pour différents projectiles, on modifie la hauteur du contrepoids C de façon à modifier la position du centre de gravité de l'ensemble afin que *pour le projectile que l'on veut tirer,* la condition de non percussion soit à peu près réalisée *(voir N°9).*

$$b\,L = \frac{I_G}{M} \quad (ici\ b + L = c^{te} = OP).$$

Une aiguille *(A)* solidaire du pendule balistique poussera un curseur lors de la "remontée" du pendule et comme ce curseur frotte légèrement, il restera comme témoin pour indiquer l'écart maximum α

Il ne s'agit plus de translation, aussi faut-il parler de conservation du "moment de la quantité de mouvement" *(angular momentum)* autour de l'arête O du couteau, *(comptant en bloc les moments du pendule et du boulet).*

Avant le choc: boulet $(m \vec{V})$ *(quantité de mouvement)* $(L + b)$ *(bras de levier de la quantité de mouvement)*

Après le choc: $m (L + b)^2$ *(moment d'inertie)* Ω_0 *(vitesse angulaire)* $I_0 \Omega_0$

$$m V (L + b) = \Omega_0 [I_0 + m (L + b)^2]$$

Tout revient donc à évaluer la vitesse angulaire avec laquelle partent pendule et boulet, puisque l'équation précédente donnera alors **V**.

L'énergie cinétique: $\frac{1}{2} I_0 \Omega^2 + \frac{1}{2} m (L + b)^2 \Omega^2$, va être employée à élever le centre de gravité du pendule d'une hauteur $L (1 - \cos\alpha)$ et à élever le centre de gravité du boulet de la hauteur $(L + b) (1 - \cos\alpha)$

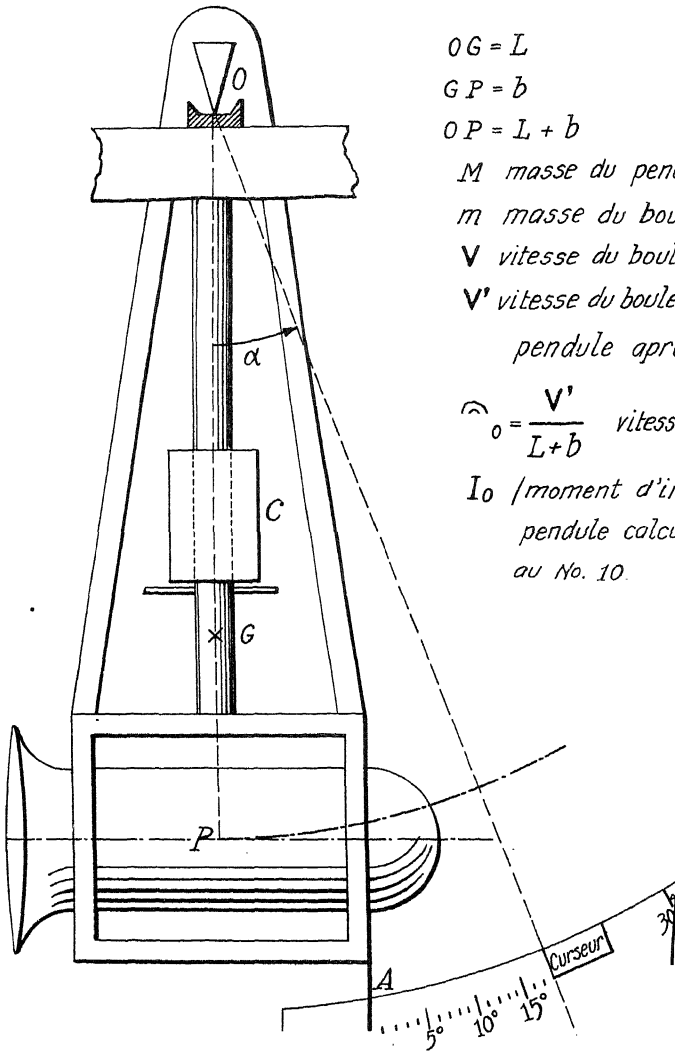
Ecrivons que lors de l'angle de remontée maximum α l'énergie potentielle acquise est égale à l'énergie cinétique perdue *(l'énergie cinétique étant non pas celle qu'avait le boulet avant le choc, mais bien celle que possédaient pendule et boulet à la fin du choc).*

OG = L
GP = b
OP = L + b
M masse du pendule
m masse du boulet
V vitesse du boulet avant
V' vitesse du boulet et
pendule après.
$\omega_0 = \frac{V'}{L+b}$ vitesse angulaire
I_0 (moment d'inertie du
pendule calculé comme
au No. 10.
O
α
C
G
P
A
Curseur
5°
10°
15°
30°

Fig. 6

$$\frac{1}{2}\left[I_0 + m(L+b)^2\right] \quad M\,g\,L\,(1-\cos\alpha) + m\,g\,(L+b)(1-\cos\alpha)$$

$$\Omega^2 \quad 4\,g\,\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{M\,L + m(L+b)}{I_0 + m(L+b)^2}$$

d'où finalement:

$$\cdot \; \frac{\;}{m(L+b)}\sqrt{g\left[M\,L + m(L+b)\right]\left[I_0 + m(L+b)^2\right]}$$

expression qui est bien homogène

$$\frac{\text{pieds}}{\text{sec.}} \qquad \frac{\text{sec.sec.}\,(\textit{slug})(\textit{pied})\,\text{slug}\,(\textit{pied})}{\text{slug}\,(\textit{pied})}$$

Note 1: Ce procédé de Robins ne peut plus être utilisé pour les obus modernes. Aujourd'hui, on mesure au chronographe électrique la durée Δt d'un certain parcours Δl et l'on déduit

$$V = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

Note 2: Le recul des armes à feu provient de ce que la quantité de mouvement du projectile mV doit être égale à $-MV'$ celle que "fusil et tireur" ont en sens inverse, puisqu'avant le choc il n'y avait pas de mouvement. Pour éviter tout accident et réduire au minimum les chocs de l'épaule lorsque l'on tire debout un grand nombre de fois, il convient de bien placer l'arme et de *l'appuyer fortement contre l'épaule* de façon à ce que la masse M soit considérable *(fusil + buste)*. Autrement, la masse du fusil seul interviendrait et le fusil reculerait avec violence venant donner un coup à l'épaule, ce qui peut meurtrir à la longue.

La vitesse de recul $V' = \frac{m\,V}{M}$ étant *inversement proportionnelle à la masse M qui recule,* il convient que le fusil et le corps du tireur soient associés massivement.

N° 13: *La forme que prend le théorème de la quantité de mouvement pour les mouvements de régime des liquides (steady motion).*

Nous attirons de suite l'attention du lecteur sur le fait que *la force* est dans ces mouvements de régime. *double de ce qu'elle serait avec la même différence de pression et la même section droite s'il y avait un piston au lieu d'un jet liquide.*

Il faut bien se garder d'appliquer les règles statiques à un phénomène dynamique et de se dire que la réaction du jet **est** le produit (Δp).*(aire)*, ce serait une erreur de 50%!

L'utilité du théorème de la variation de la quantité de mouvement pour étudier les mouvements de régime des fluides provient de ce que l'on n'a qu'à tenir compte de ce qui se passe aux deux extrémités de la conduite; les actions et réactions des molécules intérieures s'annulant vectoriellement et n'intervenant pas *(il n'en serait pas de même pour le scalaire énergie; pour appliquer le théorème de l'énergie, il faudrait connaître en détail tous les mouvements du fluide à l'intérieur de la conduite comme aux extrémités).*

Lorsque l'on isole par la pensée une portion de conduite *(tel qu'un coude, fig.7)* et que l'on veut connaître la réaction que le liquide en mouvement régulier exerce sur la partie de conduite envisagée, on complète en pointillé à l'entrée et à

la sortie une "surface de contrôle" et l'on évalue les vecteurs quantité de mouvement des molécules fluides qui entrent ou sortent à chaque seconde de la surface fermée de contrôle.
Exemple: Soient V_A, V_B, les vitesses aux extrémités de la conduite coudée, D la densité du liquide, a_A, a_B, les sections droites terminales; pendant une durée Δt, la quantité de mouvement du fluide qui rentre en A est $\mathbf{V}_A D a_A \mathbf{V}_A \Delta t$: et celle de celui qui sort en B est de même $\mathbf{V}_B D a_B \mathbf{V}_B \Delta t$.

(Ce n'est pas parce que la vitesse figure au carré qu'il s'agit d'énergie; les produits $D\ a\ V\ \Delta t$ ne sont que la masse; $a\ \mathbf{V}$ est le débit).

Les forces qui s'exercent entre les surfaces fluides terminales sont donc

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta(M\ \mathbf{V})}{\Delta t}$$

$D a_A \mathbf{V}_A^2$ en A et $D a_B \mathbf{V}_B^2$ en B; ces forces sont suivant les directions normales aux sections droites terminales et sont dans le sens indiqué sur la figure *(ou dans le sens opposé)* suivant que l'on considère la réaction de l'extérieur sur le coude *(ou la poussée du coude sur l'extérieur ou action).*

Note I: Il faut composer *vectoriellement* ces deux réactions pour avoir leur résultante **F**; le coude résiste par **-F**.

Note II: Dans le cas où le mouvement n'est pas régulier *(variation du débit)* il faudrait tenir compte de la variation de quantité de mouvement des molécules qui sont à l'intérieur de la surface de contrôle *(dont la vitesse varie alors avec le temps)* tout comme des variations aux extrémités.

Fig. 7

N°14: *Réaction d'un jet (Segner).* Soit un vase contenant de l'eau. A l'extrémité inférieure du vase, la pression est p, *(somme de la pression atmosphérique et du produit h D g hauteur d'eau × densité × g).* Pratiquons une ouverture de section droite a: comme à l'extérieur la pression est inférieure de h D g à la pression à l'intérieur, on serait tenté de *raisonner statiquement* et de dire que la force du jet serait h D g a. Voyons qu'elle est égale au double, c'est-à-dire que tout se passe comme si le vase était tiré dans le sens opposé au jet avec une force 2 h Dg a.

a) Le théorème de Bernoulli nous donne *(voir 1ère année* p.243 la vitesse de l'eau étant nulle dans le vase et le jet étant horizontal au début

$$\frac{1}{2} M \ (zéro)^2 + (p_o + h \ Dg) \ v = \frac{1}{2} M \ V^2 + p_o \ v \qquad \text{ou}$$

en divisant par v et en écrivant D au lieu de $\frac{M \ (masse)}{v \ (volume)}$

$$\frac{1}{2} D \ V^2 = h \ Dg = (p_{intérieur} - p_{extérieur})$$

d'où $$\sqrt{\frac{2 \ (p_{int.} - p_{ext.})}{D}}$$

b) La quantité de mouvement que le vase perd par seconde est

$$\frac{\Delta (M \ V)}{\Delta \ t} = \mathbf{F} = D \ a_{veine} V^2$$

c) Remplaçant V par sa valeur, l'expression de cette force est

$$\mathbf{F} = \frac{D \ a_{veine} 2 (p_{int.} - p_{ext.})}{D} = 2 a_{veine} (hDg) = 2 (aire)_{veine} \ (diff. des \ pressions)$$

On voit donc bien la fausseté de la conception simpliste *(statique)* qui vient à l'esprit au premier abord.

Il y a deux chutes de pression à l'orifice: la paroi du vase en effet n'oppose plus là de résistance statique à la différence de pression $p_{int.} - p_{ext}$; de plus dans le voisinage. il y a une chute de pression due à l'augmentation de vitesse du flot qui se dirige vers le trou, cette réduction totale de pression qui produit une poussée sur le vase *(opposée au jet)* est dite la "réaction du jet".

Tout se passe *comme si la section droite du vase était double de celle de la veine,* pour qui veut encore appliquer la formule statique par inertie mentale: force **F** = (2a) section droite × $(p_1 - p_2)$ différence des pressions.

N°15: *Contraction de la veine (Borda):* On appelle coefficient de contraction le rapport de la section droite de la veine liquide à celle du trou. Ce coefficient vaut théoriquement 1/2. En effet *(fig.8)* la force qu'exerce la région A sur l'orifice est p_A a*(trou)*, et la force qu'exerce la région B sur l'orifice est p_B a *(trou)*.

La différence *(ici géométrique = algébrique puisque la direction est commune, le robinet n'étant pas coudé).*

$(p_A - p_B)$ a doit égaler le *taux* de variation de la quantité de mouvement du fluide, c'est-à-dire 2 $a_{veine}(p_A - p_B)$ d'après

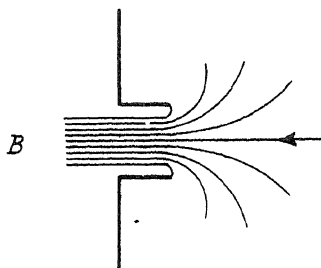



Fig.8

le numéro précédent.

Donc, $a_{veine} = \frac{a_{trou}}{2}$

N°16: *Expérience qui a bien intrigué Galilée* et qui montre fort bien qu'il faut *se garder de penser statiquement* au sujet d'un liquide en mouvement *(cité par Ernst Mach dans sa "Mécanique")* *(fig.9)*.

"Un vase I rempli d'eau a son fond percé d'une ouverture bouchée *(d'abord)*. Un vase II est suspendu par des fils sous le premier et l'ensemble est tenu en équilibre à l'une des extrémités du fléau d'une balance. Dès que l'on ouvre l'orifice du fond du vase I, l'eau s'échappe et tombe dans II. Une partie du poids au repos disparaît par ce fait et est remplacée par l'action du choc sur la vase II. *Galilée s'attendait à une déviation du fléau de la balance,* qui lui aurait permis de déterminer l'effet du choc en rétablissant l'équilibre par des poids additionnels. Son étonnement paraît avoir été grand de n'*observer aucune déviation....*"

Voici comment Mach explique cette expérience négative.

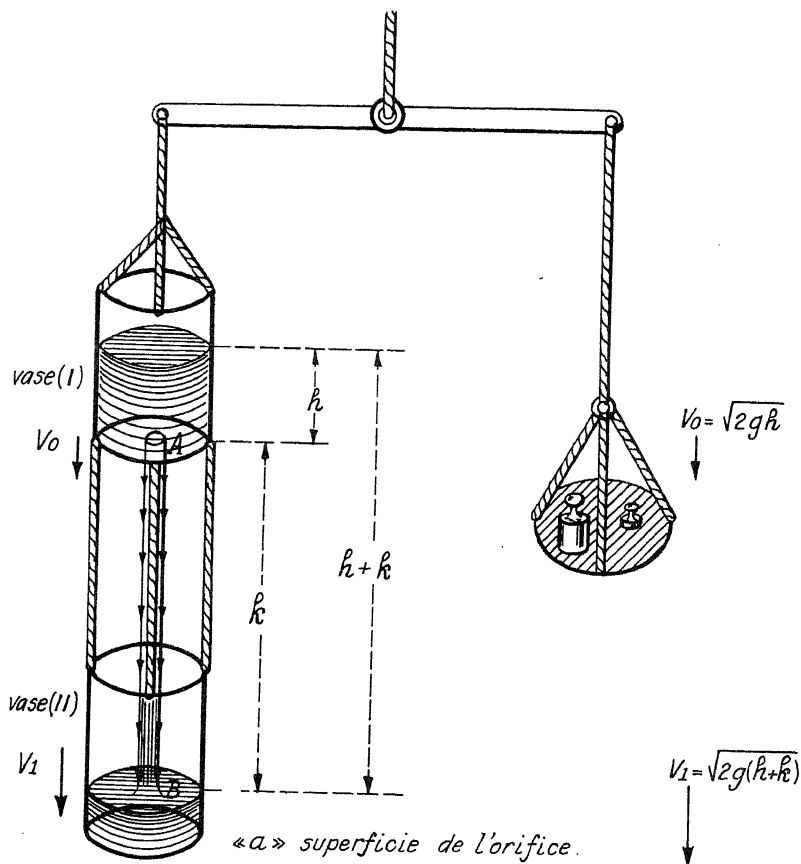
"....L'ouverture de l'orifice provoque une diminution de poussée due d'une part:

1º) à ce que le poids de la colonne d'eau suspendue dans l'air *(entre les deux vases)*est perdu;

2º) à une poussée vers le haut produite par la réaction du liquide qui s'échappe *(réaction du jet, voir Nº14)*"

"Mais, d'autre part, il se produit:

3º) un accroissement de poussée dû à l'action du jet sur le fond du vase II".

"Donc, *avant que la première goutte d'eau atteigne le vase II,* il n'y a qu'une diminution de poussée *(1º et 2º)*, mais cette *diminution est immédiatement compensée lorsque l'appareil est en pleine marche.* Galilée non plus ne sut remarquer rien d'autre que cette diminution *initiale (et la balance, appareil statique par excellence, ne peut mesurer que des effets prolongés et non de durée très courte)*".

A (ouverture d'abord bouchée). On équilibre par des poids marqués ; alors on ouvre A ; l'équilibre n'est pas rompu ! dès que le jet atteint le vase B.

(Schéma emprunté à la "Mécanique" de Ernst Mach.)

Fig. 9

"Supposons l'appareil en marche. Appelons h la hauteur de liquide dans le vase I; V_0 la vitesse d'écoulement, k la distance du fond du vase (I) au niveau du liquide dans le vase (II), V_1 la vitesse du jet au point où il arrive à ce niveau, "a" la superficie de l'orifice, D la densité du liquide, et g l'accélération de la pesanteur".

"Pour évaluer le 1e, remarquons que V_0 correspond à la vitesse acquise par une chute d'une hauteur h ; il est aisé de se représenter cette chute comme continuant jusqu'en B. La durée de la chute du vase (I) au vase (II) est donc la différence entre les durées des chutes d'un corps d'une hauteur h + k et d'une hauteur h. Pendant ce temps, un cylindre liquide de base a *(section droite de la veine)* s'échappe avec une vitesse V_0. Le 1e, c'est-à-dire le poids de la colonne d'eau suspendue dans l'air est donc:

$$a\ Dg\sqrt{2gh}\left[\sqrt{\frac{2(h+k)}{g}}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]= 2a\ Dg\left[\sqrt{h(h+k)}\ -\sqrt{h^2}\right]=2a\ Dg\left[\sqrt{h(h+k)}-h\right]»$$

(en effet: la vitesse initiale de l'eau qui sort de l'orifice A est $V_0 = \sqrt{2gh}$

: la vitesse finale de l'eau qui arrive au vase B est $V_1 = \sqrt{2g\ (h+k)}$

: l'espace $k = V_0\ t+\frac{1}{2}gt^2 = \sqrt{2gh}\ t+ \frac{1}{2}\ gt^2$ *(parcouru entre les deux vases)*

: la vitesse finale $V_1 = \sqrt{2g(h+k)}\ = V_0 +\ gt= \sqrt{2gh}+gt$

et donc la durée du trajet AB est $t = \frac{\sqrt{2g(h+k)}-\sqrt{2gh}}{g}$

ou $t = \sqrt{\frac{2(h+k)}{g}}\ - \sqrt{\frac{2gh}{g}}$

Le poids d'eau qui a quitté le vase (I) pendant cette durée est donc: aire×vitesse×durée × densité×accélération

$$a\sqrt{2gh}\left[\sqrt{\frac{2(h+k)}{g}}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]\ D\ g\ = 2a\ Dg\left[\sqrt{h(h+k)}\ -\ h\ \right]\ )$$

Pour évaluer le 2e, nous partirons de l'équation bien connue mv = pt. Supposons *t* = 1: elle donne mv = p, c'est-à-dire que *la poussée de réaction exercée sur (I) vers le haut est égale à la quantité de mouvement acquise dans l'unité de temps par la veine liquide*".

"Le 2e prend alors la forme $(a\ V_0\ D)V_0 = a\sqrt{2gh}\ D\sqrt{2gh}\ =$

$$p = 2\ a\ h\ Dg\ »$$

(a V_0 D est la masse qui s'échappe par seconde).

"Nous trouverons d'une manière analogue le 3e, c'est-à-dire la poussée exercée sur le vase (II) par le jet:

$$p' = (a\ V_0\ D)V_1 = a\sqrt{2gh}\ D\sqrt{2g(h+k)}\ = 2\ a\ Dg\sqrt{h\ (h+k)}\ »$$

"La variation de poussée totale est donc identiquement nulle

$$-2a\ Dg\left[\sqrt{h(h+k}\ -h\right] - 2\ a\ h\ Dg + 2\ a\ Dg\sqrt{h(h+k)}\ = 0$$

les trois parties dont elle se compose se détruisant l'une l'autre. On voit donc que Galilée ne pouvait obtenir qu'un résultat négatif.

Le plateau de gauche de la balance subit les actions suivantes

1º)(I) perd du poids alors que (II) en gagne *(perte nette égale au poids du liquide qui coule d'un vase à l'autre):*

$$- 2\ a\ Dg \left[\sqrt{h(h+k)} - h \right]$$

2º) de même qu'un fusil à répétition où la cartouche serait enflammée électriquement "reculerait" continuellement, le vase (I) est repoussé continuellement par l'eau qui s'en écoule; puisque la quantité de mouvement totale est nulle. celle prise vers le bas et emportée par le jet doit être analogue à celle subie vers le haut par le vase (I) - 2 a h Dg

Ces deux actions sont affectées d'un *signe moins car elles allègent le plateau de gauche;* ce sont elles qui avant que l'eau atteigne le vase (II) imposent la diminution initiale de poids.

3º) le vase (II) subit une poussée de la part du jet qui le frappe, poussée analogue à celle que manifesterait une cible très mobile qui recevrait une fusillade nourrie $+2a\ Dg\sqrt{h(h+k)}$

Cette action est affectée du signe plus car elle charge le plateau de gauche.

"A propos du second terme de cette somme, une petite remarque est encore nécessaire. On pourrait penser que la poussée perdue par l'ouverture de l'orifice est - a h Dg et non pas - 2 a h Dg, mais cette *conception statique* est tout à fait inapplicable au *problème dynamique* qui nous occupe. La pesanteur n'imprime pas instantanément la vitesse V_0 aux particules liquides qui s'échappent, mais cette vitesse est engendrée par les pressions réciproques de ces dernières particules et de celles qui restent et la poussée ne peut être déterminée que par la quantité de mouvement".

(Comme on l'a déjà vu aux deux numéros précédents, la poussée dynamique est double de ce que ferait prévoir la statique).

<u>Nº17: *Le théorème du moment de la quantité de mouvement qui s'applique aux turbines)*</u>*: (voir fig.10).*

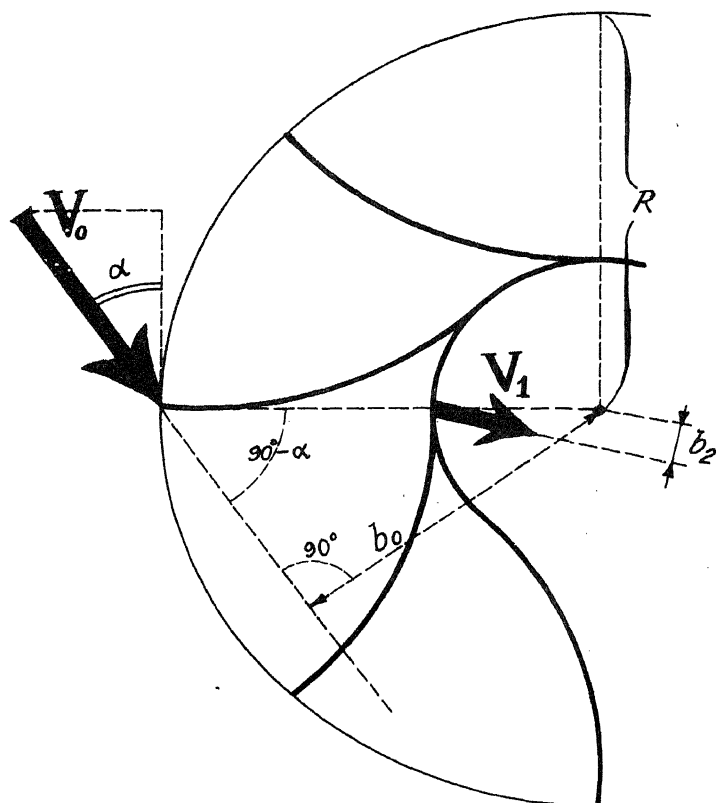
Le taux de variation du moment de la quantité de mouvement est égal au couple des forces *(à* $\mathbf{F} = \frac{\Delta(M\mathbf{V})}{\Delta t}$ *correspondant* $\mathbb{C} = \frac{\Delta(I\Omega)}{\Delta t}$*)*

Si V_0 est la vitesse absolue de l'eau à l'entrée dans la turbine et b_0 son bras de levier par rapport à l'axe de rotation, et si $\frac{M}{t}$ est la masse d'eau qui entre par seconde, le moment de la quantité de mouvement est à chaque seconde augmenté de $\circledcirc \frac{M}{t} \mathbf{V}_0 b_0$ *(axe dans le sens du produit vectoriel* $\mathbf{b}_0 \times \mathbf{V}_0$ *).*

S'il n'y avait aucun frottement et si l'eau s'échappait de telle sorte que le bras de levier *(*b_1*)* de la vitesse absolue à la sortie fut nul, ce serait la valeur du couple moteur.

L'expression du travail maximum que l'on puisse atteindre, R étant le rayon de la périphérie et M la masse d'eau écoulée

$$A = (\mathbb{C})(\Omega)(t) = \left(\frac{M}{t} \mathbf{V}_0 \mathbf{b}_0 \right) \left(\frac{\mathbf{V}_0 \cos \alpha}{R} \right) (t)$$

$$M\ V_0^2 R \cos^2 \alpha \frac{1}{R} = M\ V_0^2 \cos^2 \alpha$$

$\frac{M}{t}$ *masse d'eau par seconde.*

V_0 *vitesse absolue à l'entrée.*

V_1 *vitesse absolue à la sortie.*

$\times \searrow V_0 \frac{M}{t}$ *couple du flot qui entre.*

◎ $\downarrow b_1 \times \rightarrow V_1 \frac{M}{t}$ *Couple emporté par le flot à la sortie.*

Couple moteur

◎ $(b_0 \times V_0 - b_1 \times V_1) \frac{M}{t}$ *dont les frottements se retranchent.*

Vitesse angulaire.

$\Omega = \frac{\text{vitesse tangentielle } V_0 \cos \alpha}{\text{Son bras de levier } R}$

Fig. 10

Note (1): Il ne peut être question de moment d'inertie pour un fluide, c'est pourquoi, au lieu de l'expression $I\Omega$ pour le moment de la quantité de mouvement, on doit prendre $M\, b_0 \times V_0$; $M\, V_0$ est la quantité de mouvement, b_0 est son bras de levier.

Ce théorème est dû à Euler et est valable quels que soient les phénomènes qui ont lieu à l'intérieur de la roue à aubes.

Note(II) Toutes les turbines reçoivent l'eau par la périphérie c'est le moyen d'avoir le plus grand bras de levier possible b_0 et donc d'avoir le couple moteur maximum pour un débit et une vitesse donnés.

On distingue les turbines à impulsion et celles à réaction. Dans les turbines à *impulsion,* on amène l'eau avec la plus grande vitesse possible et l'eau n'est en contact qu'avec un côté des aubes, ce qui diminue le frottement *(une surface d'air libre étant gardée tout le long du passage).* L'eau coule librement et la section droite est à peu près constante. *(roue Pelton).*

Dans les turbines à *réaction,* une partie seulement de la tête d'eau est transformée en vitesse, l'autre sert à amener l'eau sous pression. L'eau remplit tout l'espace et comme la section se rétrécit de la périphérie vers l'intérieur, la vitesse augmente. Le frottement est beaucoup plus considérable dans les turbines à **réaction** que dans celles à impulsion*(turbine Francis).*

Les turbines à implusion conviennent aux chutes de grande hauteur; les turbines à réaction sont parfois abouchées à un siphon pour diminuer les pertes d'énergie à la sortie.

N°18: *La pression en théorie cinétique des gaz (statistique).*

Une des applications intéressantes de la théorie des chocs consiste à interpréter la pression des gaz comme un effet statistique des chocs individuels des molécules contre les parois du récipient solide qui les contient.

Comme les composantes de la vitesse de rotation des molécules n'interviennent pas dans la pression, nous n'avons ici aucun besoin de faire intervenir l'atomicité des molécules; nous assimilerons donc les molécules à *de petites sphères élastiques (comme on le fait pour les gaz monoatomiques; s'il s'agissait de* ***calculer*** *les chaleurs spécifiques, il faudrait tenir compte de l'atomicité. Nous le ferons d'ailleurs en thermodynamique).*

Hypothèses: 1e) équipartition de la vitesse $V_x = V_y = V_z = V\sqrt{\frac{2}{3}}$

2e) choc parfaitement élastique de la molécule $-V_y$ se changeant en $+V_y$ lors du choc.

Considérons les chocs qui se produisent sur le plan a, c *(fig.11) (y = o).* Comme seule la composante de vitesse normale à ce plan est affectée par le choc *(et intervient dans la pression sur la dite paroi),* ne considérons que la vitesse suivant la direction y normale à cette face y = o.

Lors d'un choc d'une molécule individuelle, soit

$-m\,\overleftarrow{V_y}$ *(quantité de mouvement ou momentum)* avant le choc,et

$+m\,\overrightarrow{V_y}$ " " " " " après le choc

la variation de la quantité de mouvement *"de la molécule"* est

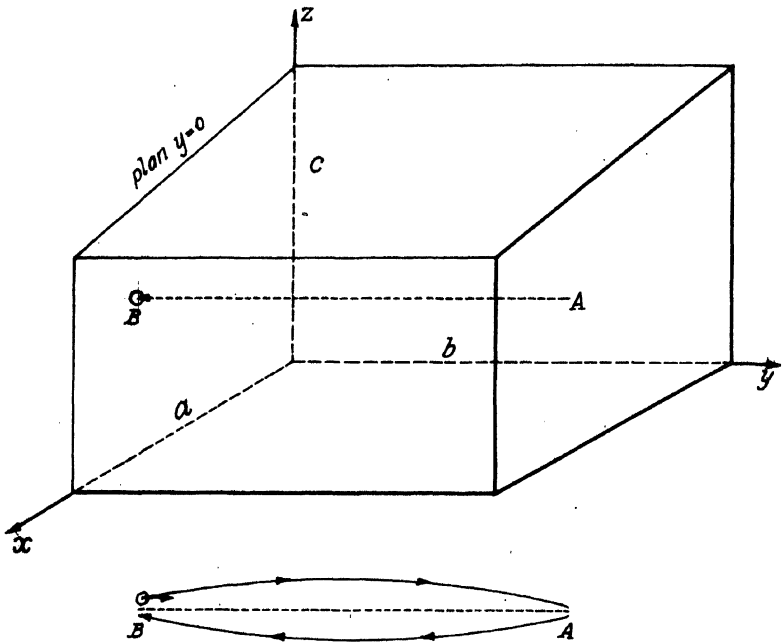
$+2m\,\overrightarrow{V_y}$; celle de la paroi $-2m\,\overleftarrow{V_y}$

2b = espace parcouru entre deux chocs consécutifs sur la paroi y = o

Fig. 11

La force que la paroi a ressentie multipliée par le temps du choc *(c'est-à-dire* $\mathbf{F}\,\Delta t$ *l'impulsion ou percussion)* est donc égale à $2m\,\mathbf{V}_y$ par choc et par molécule.

Mais la **molécule** met $2\,\frac{BA}{V_y} = \frac{2b}{V_y}$ secondes entre deux chocs consécutifs sur la paroi $(y = o)$

Donc chacune des molécules tape sur la paroi $y = o$ avec la fréquence de $V_y \div 2b$ *(coups par seconde)*; elle exerce donc sur cette paroi une force

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta(M\ V)}{\Delta t} \qquad 2m\ V_y \div \frac{2b}{V_y} = \frac{m\ V_y^2}{b}$$

Si n est le nombre de molécules par centimètre cube*(densité corpusculaire)*, le nombre de molécules est n abc et la force résultant sur la cible $y = o$ de superficie ac est

$$n\ abc\ \mathbf{F} = n\ abc\ \frac{m\ V_y^2}{b} = n\ m\ V_y^2\ ac$$

La pression $\frac{\mathbf{F}}{ac} \quad n\ m\ V_y^2$

$n\ m$ est la masse totale des molécules contenues dans un cen-

timètre cube $= D = \frac{M}{abc}$ et V_y^2 est le $\frac{1}{3}$ du carré de la vitesse totale V^2

$$p = \frac{F}{ac} = \frac{1}{3}\frac{M\,V^2}{v} \quad ; \textit{(en posant } v = abc\textit{)}$$

La demi-force vive ou énergie cinétique de translation est donc $\frac{1}{2}\frac{M}{v}V^2 = \frac{3}{2}p$

Ainsi de supposer les molécules être des sphères élastiques conduit à considérer la *pression comme proportionnelle à l'énergie cinétique de translation par unité de volume.*

En d'autres termes, l'énergie potentielle de pression

$$p\,v = \frac{R}{N}T = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}M\,V^2\right),$$ s'il y a N molécules grammes; soit par molécule gramme en appelant μ la masse moléculaire gramme *(mol)*

$$p\,v_\mu = R\,T = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\mu\,V^2\right)$$

a finalement $\frac{1}{2}\mu\,V^2 = 3\,\frac{R\,T}{2}$ ce que l'on énonce: l'énergie cinétique de translation, donc des trois degrés de liberté des centres de gravité, est le triple de $\frac{R\,T}{2}$ par molécule gramme *(R = 8.31 joules).*

Et l'on généralise en supposant "l'équipartition de l'énergie" chaque degré de liberté absorbe la même énergie pour une même élévation de température. Ce sera la clef de la théorie des chaleurs spécifiques.

Remarquons que la notion de *température absolue* est ainsi rattachée à *l'énergie cinétique de molécules invisibles.* Chaque fois que l'on explique ainsi du compliqué visible **par** du plus simple invisible, on *"atomise"* une question.

N°19: *Résilience.* En résistance des matériaux, on donne ce nom à l'énergie nécessaire pour rompre une éprouvette de section unité.

En entaillant un bloc d'acier, on crée une section faible ABCD où se produira la rupture lorsqu'un marteau en forme de couteau arrondi viendra frapper *(fig.12)*

$$\text{Le nombre de } \frac{\text{livre×pieds}}{\text{pouce carré}} = \frac{\text{Energie perdue par le marteau}}{\text{aire A B C D}}$$

est la mesure de la "résilience".

Pour le fer ou le cuivre, on trouve des nombres d'autant plus faibles qu'ils sont plus fragiles.

L'acier fondu durci donne des résiliences 40 fois plus grandes que le fer forgé par exemple.

Le bronze phosphoreux laminé et étiré donne des résiliences 20 fois supérieures à celles du cuivre pur.

Nous reparlerons de résilience dans le chapitre de l'élasticité; nous allons indiquer comment on se sert des "moutons" pour mesurer l'énergie cinétique perdue lors de la rupture *par choc* de l'**éprouvette.**

N°20: *Mouton-pendule de Charpy.* C'est un pendule monté sur paliers à billes et dont le couteau se trouve au centre de percussion du pendule *(revoir N°9 au besoin).* On connaît la

A
B
D
C
marteau
D A
C B
Fig. 12
b
Couteau
G
L
A aiguille à frottement doux qu'entraîne le petit butoir B et qui restera fixe en A' pour indiquer l'angle de relevée maximum α'
A
B
M masse du pendule
L bras du centre de gravité
α
A'
α'
Chabotte (fixe)
E
E éprouvette à casser.

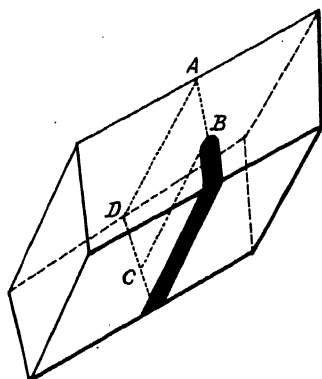
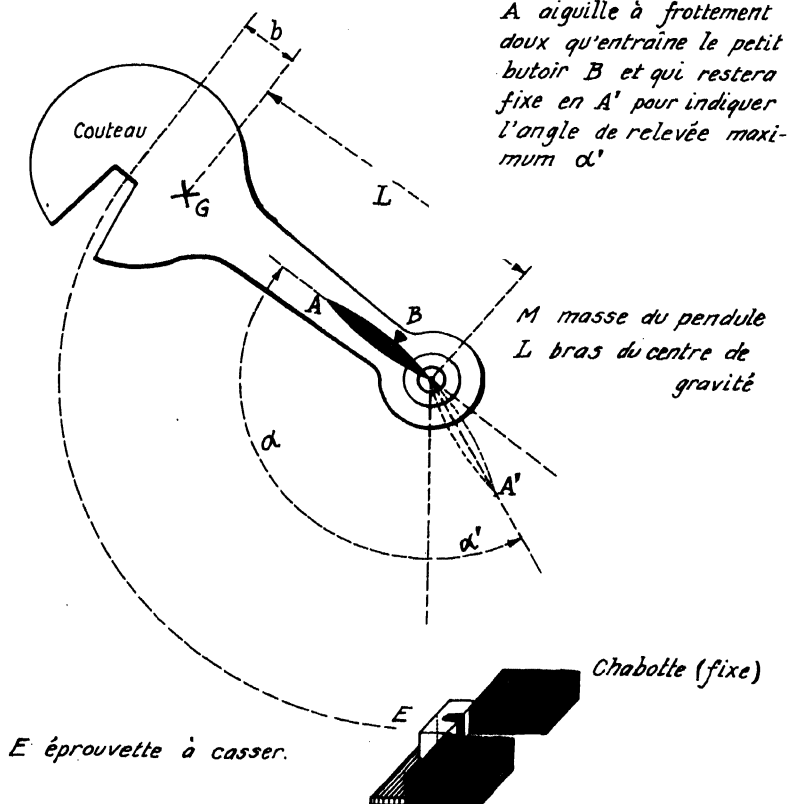



Fig. 13

position du centre de gravité du pendule et la perte d'énergie cinétique provoquée par la rupture de l'éprouvette est donnée par *(fig.13)*

$$M g \left[L (1 - \cos \alpha) - L (1 - \cos \alpha') \right]$$

$$= M g L (\cos \alpha' - \cos \alpha)$$; *(voir aux Nº 11 et 12)*

Une manivelle et crémaillère permettent de donner à ce lourd pendule un angle α quelconque. Un petit levier permet de déclencher le mouvement du pendule.

Des barêmes donnent le travail de frottement; pour vérifier ces données, on fait des essais "à blanc", sans casser d'éprouvette en calculant $M g L (\cos\alpha'_0 - \cos \alpha_0)$, perte d'énergue due aux frottements seuls.

Le travail de rupture est égal rigoureusement à la demi-force vive du mouton au bas de sa course *(théorique)* $M g L (1 - \cos \alpha)$ *(diminuée du frottement pendant la descente)*, moins l'énergie potentielle de la remontée *(augmentée du frottement pendant la remontée)*, moins la demi-force vive de projection des morceaux (P)

$$M g L (\cos \alpha' - \cos \alpha) - \left[A_{frottement}\alpha) + (A'_{frott.}\alpha') \right] - P$$

N°21: *Mouton rotatif (de Guillery)* Un volant à surface lisse peut être porté à très grande vitesse et un bouton de contrôle permet de faire sortir un couteau qui brisera l'éprouvette maintenue tangentielle au volant par une chabotte.

L'intérêt de ce mouton est que l'on peut obtenir des résultats avec des *chocs beaucoup plus rapides* qu'avec les pendules ou marteaux ordinaires *(très important en artillerie)*.

Si I est le moment d'inertie du volant, et si la vitesse passe subitement de Ω_0 à Ω_1 lors du choc, l'énergie de rupture sera $1/2 \; I(\Omega_0^2 - \Omega_1^2)$

Note: Ne pas confondre le *"travail de rupture"* avec la force *(ou le couple de percussion dans les moutons)*

le travail de rupture est $A = \frac{1}{2} I (\Omega_0^2 - \Omega_1^2)$

le couple de percussion est $= I \frac{\Omega_0 - \Omega_1}{\Delta t}$

(on appelle aussi moment de l'impulsion le produit couple de percussion × Δt

$$(\mathbf{F} \Delta t) (L+b) = \mathfrak{C} \Delta t = I (\Omega_0 - \Omega_1)$$

Si, par contacts électriques ou autrement, on peut connaître la durée Δt, on pourra déduire la *force du choc*.

$$\mathbf{F} \quad \frac{I(\Omega_0 - \Omega_1}{L + b} \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

Problème 1: Si le coefficient de restitution *(Nº 6)* du bronze sur ivoire est de 7/9 et que le frottement soit négligeable *(poli parfait)* quel est l'angle de réflexion lorsque l'angle d'incidence vaut 30 degrés *(Nº8 choc oblique)*.
Réponse: 36°35'

Problème 2: Quelle est la période complète des petites oscillations d'un pendule simple dont la longueur est l = 200 cms, si l'accélération de la pesanteur est 980?
Réponse: 2".84

Problème 3: (Avec les notations du N°10) Deux surcharges m = 1 livre et m' = 2 livres ont été placées de part et d'autre de l'axe d'oscillation; λ = 2 pieds, λ'=1 pied. La période des oscillations infiniment petites du pendule qui était de 2 secondes est devenue 2 sec.2; quel est le moment d'inertie du pendule relativement à l'axe d'oscillation?

Réponse: 28.57 livre × $(\text{pieds})^2$

Problème 4: (N°11) La balle d'un fusil pèse 2 grammes. Elle est tirée horizontalement sur un pendule de translation de masse 3 kilogrammes suspendue par des cordes de 2m.5.

Un curseur à frottement doux se déplace de 15 cms horizontalement poussé par la remontée du pendule. Quelle est la vitesse du projectile? *(S'aider de la fig.14)*

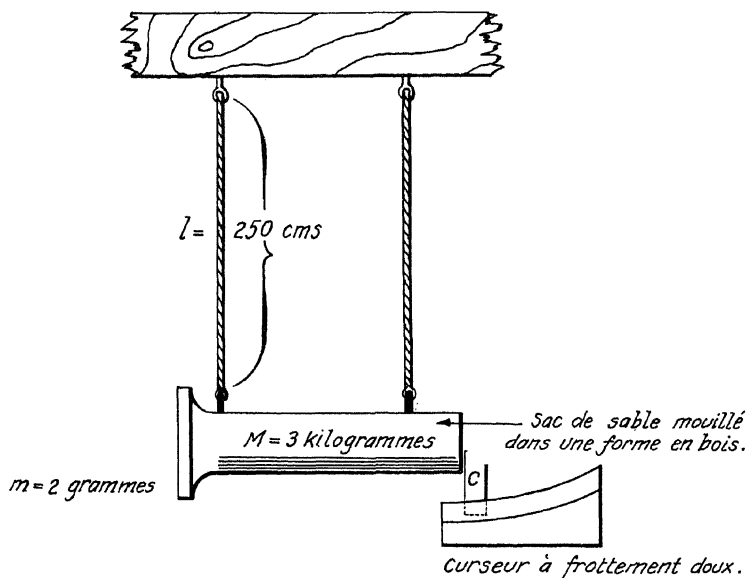



Fig. 14

Réponse: 743 $\frac{\text{mètres}}{\text{seconde}}$.

Problème 5: Que pensez-vous de cette phrase de Galiléé:"Le plus petit choc peut surmonter la plus grande pression, la force du choc est infiniment grande par rapport à celle de la pression" *(ou en langage moderne: "l'impulsion" est une grandeur d'une autre dimension que la "force")*. Concluez en indiquant pourquoi l'on a recours au choc lorsque la résistance est très grande. *(Galilée emploie "pression" dans le sens de résistance à la force")*.

Problème 6: Pourquoi n'est-il pas indifférent de tenir le manche d'un marteau n'importe où? où est-il plus avantageux de placer la main *(centre d'oscillation)* et comment expérimentalement reconnaître que le poignet est bien au centre d'oscillation?

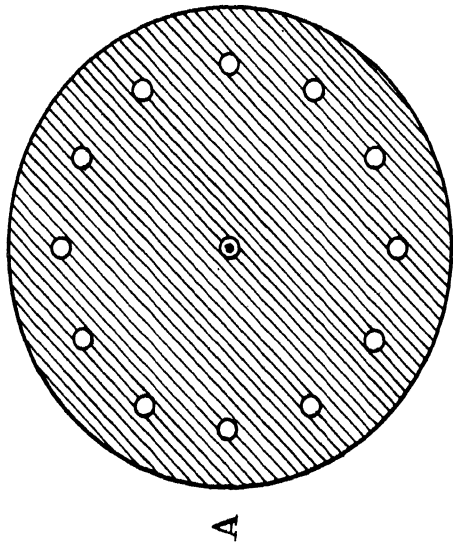
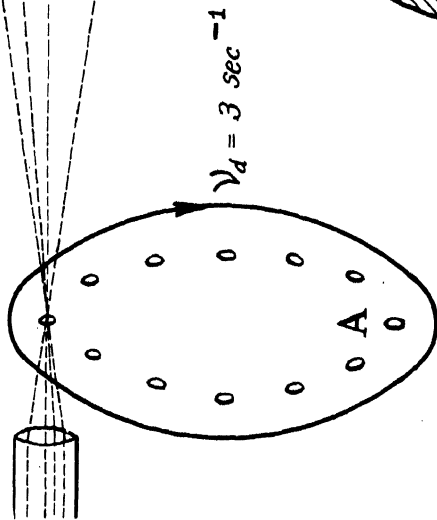
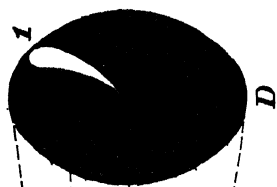
Problème 7: Léonard de Vinci croyait que les hauteurs successives auxquelles une balle élastique rebondit formaient une progression géométrique. Est-ce vrai? et comment appelleriez-vous la raison de la progression?

1
D
A
$\nu_d = 3\ sec^{-1}$
A
si 12 trous
et si $\nu_d = \frac{3\ tours}{seconde}$
$\nu_e = \frac{36\ éclairs}{seconde}$
si $\nu_r = \frac{36\ tours\ d'ailette}{seconde}$
$\nu_a = 0$ (Immobilité apparente.)

Fig. 15

CHAPITRE II

Analyse stroboscopique et au miroir tournant

SOMMAIRE: *L'analyse stroboscopique (pour les machines tournantes, les tiges et cordes vibrantes)* et *l'analyse au miroir tournant (pour les flammes qui varient périodiquement en intensité et en forme)* constituent un chapitre très important de la physique, celui où l'on étudie des phénomènes trop rapides pour les percevoir sans artifice et cela: *pendant qu'ils se produisent et sans arrêter le cours du phénomène ni même le ralentir réellement (ralenti par illusion).*

N°22: *Fréquence et Période (mécaniques).* La fréquence d'une rotation est le nombre de tours par seconde ν *(en sec^{-1})* et la période est la durée d'un tour complet T *(en seconde).*

$$\nu \ sec^{-} \qquad \frac{}{T \ sec}$$

Lorsqu'il ne s'agit pas d'une rotation, mais de tout autre phénomène qui se répète indéfiniment, on appelle encore: période la durée d'une évolution complète; et: fréquence le nombre d'évolutions par seconde.

N°23: *Dispositif de fortune.* Soit un disque A percé de 12 tours et tournant à raison de 3 $\frac{\text{tours}}{\text{sec.}}$ *(ν_d fréquence mécanique = 3)*
Le nombre d'interruptions et de rétablissement de lumière sera de 36 $\frac{\text{éclairs}}{\text{sec.}}$ = *(ν_e fréquence des éclairs). (voir fig.15).*

Soit, d'autre part, un disque D *(ou un ventilateur)* dont une ailette a été peinte en blanc et le reste noirci *(mat).*

Si ce disque D tourne à raison de 36 tours par seconde, l'ailette semblera immobile parce que il s'écoule la même durée entre *deux éclairs consécutifs* et entre deux positions de l'ailette à 360° l'une de l'autre; de sorte que l'ailette étant toujours éclairée lorsqu'elle est dans la position 1 et là seulement, grâce à la persistance des impressions lumineuses, *l'ailette semblera immobile.*

Supposons maintenant que le disque tourne un peu plus vite à raison de 3 tours 1/6 par seconde; ν_e = 3 1/6×12=38 sec^{-1}, la fréquence réelle de l'ailette étant toujours ν_r = 36 sec^{-1}.

Cette fois, l'ailette ayant été saisie par un premier éclair dans la position 1, l'éclair suivant aura lieu avant que l'ailette ait eu le temps de revenir à la position 1; elle se trouvera alors avoir parcouru

$$(T_e = \frac{1}{38^e} \text{ sec}) \times (\nu_r = 36 \ \frac{\text{tours}}{\text{sec}}) = \frac{36}{38}$$ de tour et sera vue par l'oeil $\frac{2}{38}$ de tour à gauche de la position 1, créant ainsi l'illusion d'un mouvement lent à gauche au lieu du mouvement réel rapide et à droite *(fig. 16)*.

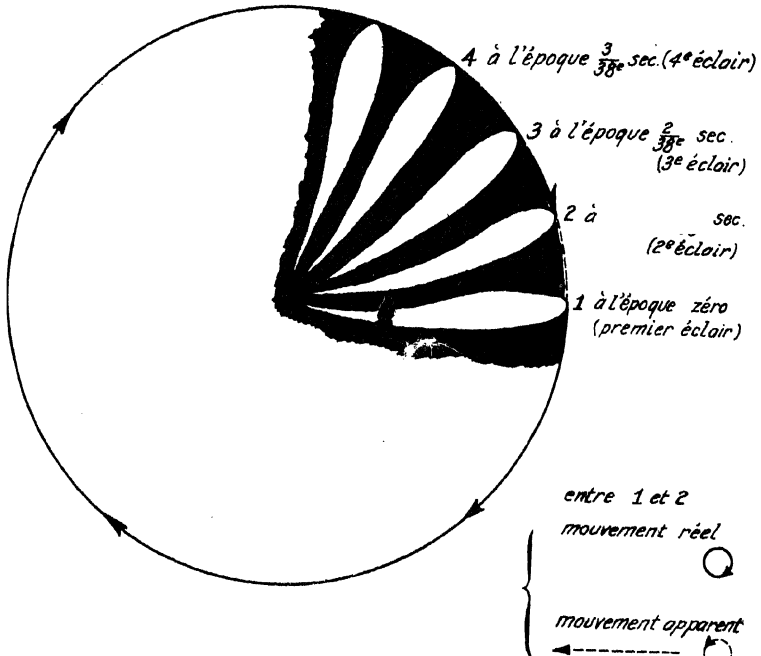



Fig. 16

En vertu de la persistance des impressions lumineuses, l'oeil *(au lieu d'apercevoir une ailette en 1, puis une en 2, puis une en 3...)* a l'illusion d'un mouvement lent continu vers la gauche.

Période apparente: comme $\frac{2}{38_e}$ de tour durent apparemment $\frac{1}{38e}$ sec la durée apparente d'un tour sera

$$T_a = \frac{1}{38} + \frac{2}{38} = \frac{1}{2} \text{ sec.; donc } \nu_a = 2 \ \frac{\text{tours}}{\text{sec.}}$$

On affectera d'un signe négatif (T_a) ainsi que (ν_a) pour marquer que le ralenti est inverse du mouvement réel.

Dans ce cas particulier

$$\nu_a = -2 \ ; \quad \nu_r = +36 \ ; \quad \nu_e = +38$$

et l'on voit apparaître la loi simple

$$(\nu_a = -2) = (\nu_r = +36) - (\nu_e = +38)$$

Dans le cas précédent *(où l'ailette semblait immobile)*

$$\nu_a = \quad (\nu_r = 36) - (\nu_e = 36)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier graphiquement et numériquement que, *si la période des éclairs était inférieure à la période de l'ailette,* le ralenti serait du même sens que le mouvement réel $\nu_a > 0$ et que la formule algébrique $\nu_a = \nu_r - \nu_e$ est encore applicable.

N°24: *La fréquence des éclairs est environ double de la fréquence de l'ailette.*

Si la fréquence des éclairs est juste le double de celle de l'ailette, on verra deux ailettes immobiles. Si la fréquence des éclairs est un peu inférieure au double de celle de l'ailette, les deux ailettes du ralenti tournent dans le sens direct *(celui de l'ailette)* et si la fréquence des éclairs est un peu supérieure au double de celle de l'ailette, les deux ailettes du ralenti tournent en sens inverse. La formule algébrique qui lie les fréquences est alors:

$$\nu_a = \nu_r - \frac{\nu_e}{2}$$

Soit encore la fréquence réelle $36 = \nu_r$; et une fréquence d'éclairs un peu inférieure au double de la fréquence réelle: $\nu_e = 70 < 2\nu_r$ *(le mouvement réel étant dans le sens des aiguilles d'une montre ; fig.17).*

Si le premier éclair a lieu lorsque l'ailette occupe la position 1, lorsque le trou suivant laissera passer l'éclair N°2, la durée écoulée sera $T_e = 1/70$e sec; et, si nous prenons pour origine des époques l'époque du premier éclair, ce second éclair aura lieu à l'époque 1/70e ; le troisième à 1/35e; le quatrième à 3/70e sec...

Pendant 1/70e sec., l'ailette parcourt réellement dans le sens des aiguilles d'une montre $(\nu_r = 36 \frac{\text{tours}}{\text{sec}}) \times (T_e = \frac{1}{70} \text{ sec}) = \frac{18}{35}$ tour; c'est donc dans la position 2 que l'oeil la verra; puis au troisième éclair, l'ailette ayant parcoura $(\nu_r = 36 \frac{\text{tours}}{\text{sec}}) \times (2\,T_e = \frac{2}{70} \text{ sec}) = \frac{36}{35}$ tour $= 1$ tour $+ \frac{2}{70}$ tour, l'oeil la verra en 3; ensuite, lors du quatrième éclair, l'ailette ayant parcouru $(\nu_r = 36 \frac{\text{tours}}{\text{sec}}) \times (3\,T_e = \frac{3}{70} \text{ sec}) = \frac{108}{70}$ tour $= 1$ tour $+ \frac{1}{2}$ tour $+ \frac{3}{70}$ tour se trouvera en 4 et ainsi de suite.

Vu la persistance des impressions lumineuses, on aura l'illusion de deux ailettes presqu'opposées *(formant un angle de 17/35 tour)* tournant dans le même sens, celui du mouvement réel et dont la fréquence est: $\nu_a = (\nu_r = 36) - (\frac{\nu_e}{2} = \frac{70}{2}) = 1 \frac{\text{tour}}{\text{sec}}$; en effet $\frac{2}{70}$ tour sont parcourus en $\frac{2}{70}$ de seconde.

La formule annoncée est donc vérifiée. Le lecteur est prié à titre d'exercice de faire la figure et le calcul dans le cas où $\nu_e = 74$ par exemple et de vérifier que la fréquence apparente sera -1; c'est-à-dire qu'il y aura ralenti stroboscopique dans

11
10
8
(6e éclair
époque 5/70)
6
mouvement
apparent
(4e éclair
époque 3/70)
4
(2e éclair
époque 1/70)
2
1
(1er éclair
époque zéro)
mouvement
apparent
3
(3e éclair
époque 2/70)
5
(5e éclair
époque 4/70)
7
(7e éclair
époque 6/70)
mouvement
réel
9
10
18/35 tour = 1/2 tour + 1/70 tour

Fig. 17

le sens opposé au mouvement réel à la fréquence apparente de 1 sec^{-1}.

N°25: *Cas général :* Lorsque la fréquence des éclairs est environ p fois plus grande que la fréquence réelle, on verra *p ailettes au lieu d'une.*

Si $\nu_e = p\nu_r$, les p ailettes sembleront immobiles et formeront une marguerite régulière fixe

Si $\nu_e = (p+\varepsilon)\nu_r$, $\frac{\nu_e}{p} = \nu_r(1+\frac{\varepsilon}{p})$, les ailettes tourneront apparemment dans le sens opposé au mouvement réel; en effet:

$$\nu_a = \nu_r - \frac{\nu_e}{p} = -\nu_r \frac{\varepsilon}{p}$$

Et si $\nu_e = (p - \varepsilon)\nu_r$, $\frac{\nu_e}{p} = \nu_r(1 - \frac{\varepsilon}{p})$ et $\nu_a = + \nu_r \frac{\varepsilon}{p}$

ralenti dans le sens direct.

Règle: Faire le quotient de la fréquence des éclairs par la fréquence réelle $\frac{\nu_e}{\nu_r}$; la partie entière du quotient le plus approché indique le facteur de multiplication des ailettes "p" divisant ensuite la fréquence des éclairs par ce facteur de multiplication: $\frac{\nu_e}{p}$, on trouve ou bien ν_r, ou bien $\nu_r + \nu_r\frac{\varepsilon}{p}$, ou bien $\nu_r - \nu_r\frac{\varepsilon}{p}$ suivant que la fréquence des éclairs vaut exactement p fois la fréquence réelle ou est supérieure ou inférieure à p fois la fréquence réelle.

La formule $\nu_a = \nu_r - \frac{\nu_e}{p} = \pm \nu_r \frac{\varepsilon}{p}$ donne la fréquence apparente des p ailettes avec le signe convenable.

Note: Lorsque les p ailettes ne sont pas immobiles, les marguerites tournantes ne forment pas une figure régulière, les ailettes consécutives n'étant pas directement opposées lorsque leur nombre est pair, ni l'angle $\frac{360°}{p}$ l'une de l'autre dans le cas général; mais à $\frac{\nu_r}{\nu_e}$ de tour.

La figure 18 se rapporte au cas $\nu_r = 36\ sec^{-1}$; $\nu_e = 110\ sec^{-1}$; $\nu_a = -\frac{2}{3}$

En effet, $\frac{\nu_e}{\nu_r} = \frac{110}{36} = 3 + \frac{(2)}{36}$; ici p = 3 on verra 3 fois plus d'ailettes qu'il n'y en a vraiment; $\nu_a = (\nu_r = 36) - (\frac{\nu_e}{p} = \frac{110}{3}) = -\frac{2}{3}$

Les ailettes consécutives ne sont pas à $\frac{1}{3}$ de tour l'une de l'autre, mais à $\frac{36}{110}$ de tour, soit donc une différence de $\frac{1}{115}$e de tour ou 3 degrés $7'\frac{19}{23}$

N°26: Nous n'envisagerons pas le cas où la fréquence des éclairs est très inférieure à la fréquence réelle, car l'importance technique en est nulle

époque 2/110
trajet réel
(2/110) 36 tour
3e éclair
6e
9e
12e
15e
18e
21e
24e
3e
mouvement apparent
mouvement apparent
22e
19e
16e
13e
10e
7e
4e éclair
1er
1er éclair.
époque Zéro.
mouvement réel
2e
mouvement apparent.
époque 1''/110e
trajet réel
(1/110) 36 tour
5e
8e
11e
14e
17e
20e
23e
2e éclair
Angle de deux ailettes
qui apparaissent con-
sécutivement.
36/110 de tour = νt/νe

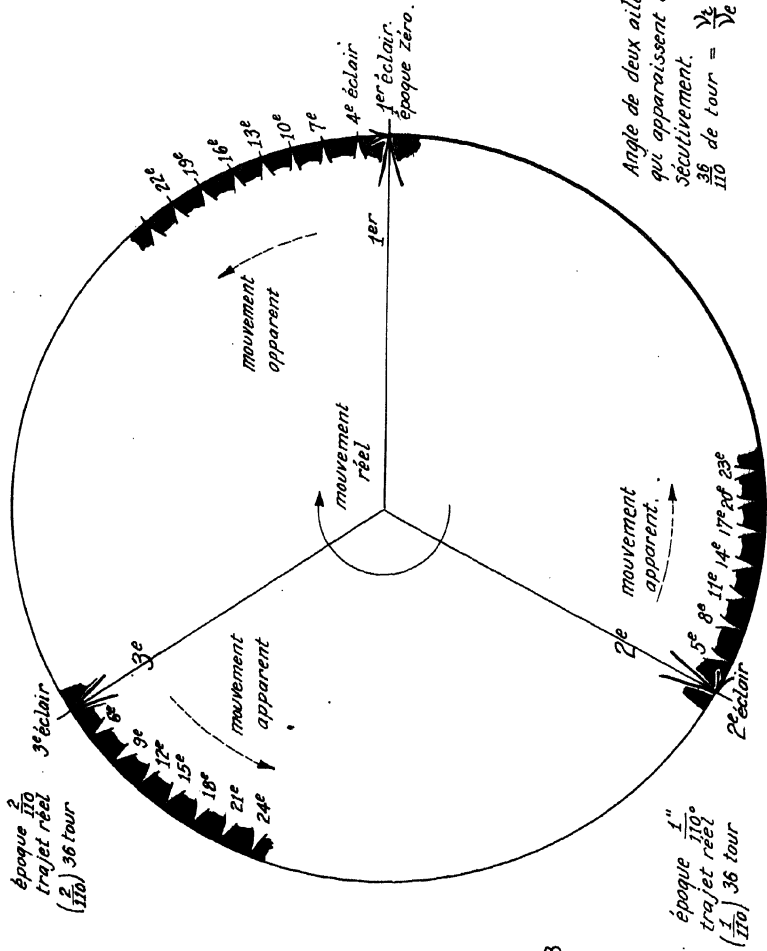



Fig. 18

D'une part, l'ailette ne serait éclairée que tous les deux, trois ou quatre tours et en général le mouvement apparent serait d'intensité très faible, d'autre part ce que l'on veut industriellement c'est avoir presque l'arrêt et le cas du N°23 est le plus important.

Au cinéma, les prises de vue se faisant à la fréquence de 25 sec^{-1} environ, on observe souvent que les rayons de bois d'une voiture automobile paraissent plus nombreux, tantôt immobiles, tantôt tournant dans le sens réel et tantôt en sens inverse. Ce sont là des phénomènes stroboscopiques qui ne sont pas voulus.

N°27: *Stroboscopie d'une tige vibrante (à l'aide d'un disque percé d'un plus grand nombre de trous, car les diapasons ont une fréquence de beaucoup supérieure à celle des* **moteurs** *et ventilateurs) (fig.19).*

Afin de bien suivre ce qui se passe, utilisons la représentation graphique suivante: supposons qu'une règle de verre enfumé se déplace dans une rainure RR' d'un mouvement uniforme et que le diapason porte à l'une de ses branches un style souple et léger *(fig.20).*

a) Si le diapason ne vibre pas et que la règle se déplace, le style trace une ligne parallèle à la rainure *(horizontale)*

b) si le diapason vibre sans que la règle se déplace, le style trace une ligne perpendiculaire à la rainure *(verticale)*

c) si la manivelle M tourne uniformément, imprimant à la planchette une translation rectiligne uniforme, et si le diapason vibre, on aura une *sinusoïde* dont la hauteur verticale *(2h)* est le double de l'amplitude de la vibration *(amplitude=écart maximum d'avec la position d'équilibre)* et dont la largeur de la sinuosité (l) est égale au produit de la période complète de la vibration du diapason par la vitesse linéaire du verre enfumé l = (T) × (V).

Notons que plus le son du diapason sera aigu *(plus grande fréquence ν ou plus courte période T)*, plus il faudra une grande vitesse V pour avoir une courbe lisible.

Pour une même vibration, l'étalement l sera d'autant plus large que la vitesse V sera plus grande; *entre deux vibrations, la plus étalée sera la plus longue en période.*

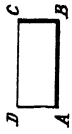
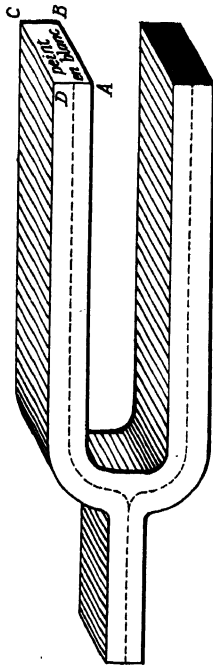
Comme les abscisses de la sinusoïde ainsi dessinée sont égales au produit d'une vitesse constante par les durée écoulées, à condition de prendre *comme unité de mesure*

× 1 sec.)
sec

on pourra dire que *les abscisses seront les diverses époques de la vibration* et l'on a ainsi un graphique cinématique donnant à toute époque *t* sec *(abscisse V.t pieds)* l'élongation de la vibration *(écart instantané d'avec la position moyenne).*

Supposons qu'on ait ainsi réalisé une sinusoide sur verre enfumé, afin de fixer les idées; soient $T_r = \frac{1}{400e}$ sec. et $T_e = \frac{1.05}{400}$ sec les périodes de l'oscillation du diapason et des inter-éclairs.

Le graphique indique une période apparente de $\frac{21}{400}$ sec; c'est-à-dire *21 périodes réelles coïncidant avec 20 périodes d'éclairs.*

(C'est un problème analogue au plus petit commun multiple).

le diapason au repos,
dans l'obscurité,

la plage blanche étant éclairée normalement à ABCD, seule cette extrémité est visible (tout le reste ayant été noirci)

En écl. irag — la plage blanche se trouve agrandie lorsque le diapason vibre. — ABCD au repos se trouve vu comme A'B'C'D' lors de la vibration.

D' C
D C
A B
A' B'

En éclairage intermittent lo.sque la fréquence de 'éclairage est même que celle des vibrations de la tige le diapason a le mê aspect qu'il est immobile, les éclairs suc ifs arrivant toujou pour une pos. on identique de la

Fig. 19

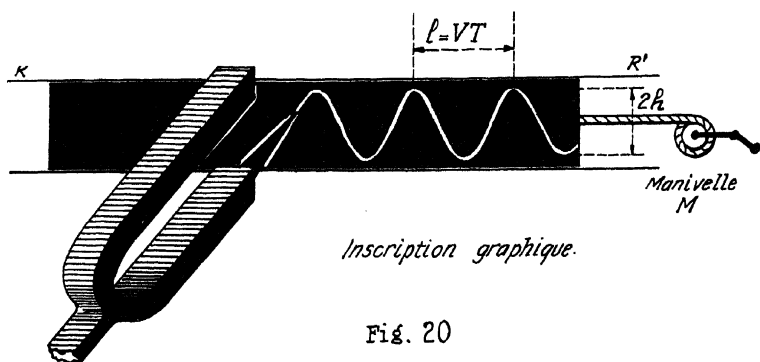



Fig. 20

Les différents éclairs saisissent l'extrémité blanche d'une branche de diapason à diverses hauteurs: le 2e éclair à 1 période 1/20 ,le 3e éclair à 2 périodes 2/20, le 4e éclair à 3 périodes 3/20.... et 21e éclair à 20(1 1/20) = 21 périodes.

Constatons que la relation entre les fréquences est aussi vraie pour les oscillations du diapason que pour les rotations:

$$(\nu_a = + \frac{400}{21}) = (\nu_r = 400) - (\nu_e = \frac{400}{1.05})$$

Le signe plus de la fréquence apparente signifie *(voir figure)* que mouvement réel *(rapide)* et mouvement apparent *(lent)* *commencent tous deux par monter.*

Le lecteur est prié de faire la figure en prenant cette fois une période des éclairs un peu plus courte que la période réelle,ex: $T_e = \frac{T_r}{1.05} = (\frac{1/400}{1.05})$ dans ce cas le ralenti stroboscopique va commencer par descendre *(si le mouvement réel commence par monter).* Vérifier graphiquement et arithmétiquement que la loi des fréquences est toujours: $(\nu_a = -20) = (\nu_r = 400) - (\nu_e = 420)$

N°28: Si l'on éclairait avec des éclairs dont la fréquence fut plusieurs fois la fréquence réelle, on verrait deux, trois... tiges vibrantes au lieu d'une *(tout comme il y avait multiplication des ailettee)* mais ce ne serait pas intéressant ici car ces *images étant suivant la même droite,* on ne pourrait les distinguer l'une de l'autre.

La fait que la longueur T app. est bien plus longue sur le graphique que T réel et que T éclairs, indique *(si l'on veut bien se reporter au graphique du style sur le verre enfumé mobile) que, s'il était possible de réaliser matériellement une vibration aussi longue en période que celle du ralenti,* cette vibration donnerait sur un verre enfumé qui se déplacerait avec la même vitesse V une sinusoïde beaucoup plus allongée: donc l'illusion stroboscopique est un ralenti puisque la durée de cette vibration fictive est supérieure à la durée de la vibration réelle *(à même vitesse le chemin du verre serait plus grand pour le ralenti apparent que pour la véritable vibration).*

N° 29: Ces stroboscopes à disques troués *(ou les stroboscopes à fente)* ont un gros inconvénient: si trous ou fentes sont

Echelle des Périodes
- Diapason — 10 mms $(T_r) = \frac{1}{400}$ sec.
- Eclair — 10.5 mms $(T_e) = \frac{1.05}{400}$ sec.
- Période apparente (demi) — $(T_a \div 2) = \frac{21}{800}$ sec. — 105 mm

Relation des fréquences $\boxed{\nu_a = \nu_r - \nu_e} = \left(400 \ sec^{-1}\right) - \left(\frac{400}{1.05} \ sec^{-1}\right) = 400\left(\frac{5}{105}\right) sec^{-1} = \frac{400}{21} sec^{-1}$

La période apparente dure 20 éclairs (entre le 1er et le 21e) soit $T_a = 20 \times \frac{1.05}{400} = \frac{21}{400}$ sec.

Fig. 21

assez larges pour donner un bon éclairage, le temps de l'éclairage est considérable et l'on a un objet flou. Grâce aux tubes à Néon, Monsieur Guillet a pu réaliser un stroboscope à grand éclairage et netteté remarquable. Les laryngologistes se servent de cet appareil pour stroboscoper les cordes vocales et voir les irrégularités de leur fonctionnement *(tout comme les ingénieurs tiennent à observer les oscillations pendulaires des alternateurs dans les grandes centrales)*. Nous allons décrire le principe de ces stroboscopes à corde vibrante *(demandant au lecteur qui n'aurait jamais vu le montage d'un diapason entretenu électriquement d'aller consulter à la bibliothèque un ouvrage élémentaire d'électricité)*.

(Fig.22): Un ruban d'acier est tendu par la vis V de façon à modifier à volonté les oscillations propres de cette corde vibrante *(nous verrons bientôt que la fréquence du son fondamental - le plus grave - est proportionnelle à la racine carrée de sa tension et inversement à sa longueur)* donc de raccourcir légèrement le ruban augmente sa fréquence pour deux raisons.

Après avoir imprimé une vibration de fréquence voulue *(réglé V)* le ruban reviendrait vite au repos par oscillations amorties; mais une *pile (E)* dite d'entretien va *"entretenir les oscillations du ruban"*: lorsque le ruban baisse, il ramène le contact en A, fermant le circuit de la pile E; alors le courant passe dans l'électroaimant créant à cet instant les pôles N *(nord)* et S *(sud)* dans le fer à cheval *(F)*. Le ruban se *trouve alors attiré vers le haut* et ira plus loin que s'il n'y avait pas attraction magnétique.

Mais, à mesure que le ruban suit cette attraction, le contact en A se rompt et le fer doux se désaimantant dès que le courant cesse, rien ne maintiendra la corde vers le haut, et elle pourra par élasticité revenir à sa position d'équilibre, la dépasser vers le bas par inertie, rétablir le contact en A..., et le cycle recommence.

En son milieu, un pont rétablit puis coupe le circuit primaire d'une bobine d'induction à chaque oscillation de la corde.

Le secondaire est fermé par un tube à néon qui remplace le disque à trous et avantageusement puisque l'éclair est *intense* et ne dure que: 1/10000 seconde ou moins.

N° 30: Dans les usines, il y a avantage à pouvoir stroboscoper en plein jour sans avoir à faire l'obscurité. Le stroboscope Séguin entre autres permet ce résultat. [Le schéma de son fonctionnement est décrit pages 28 et 29, du tome II du Traité de Physique Générale et Expérimentale *(Auguste Blanc et J.L. Librairie de l'Enseignement Technique)*] .

N° 31: ***Miroir tournant***. Il y a avantage à remplacer le style du N°27 par un rayon lumineux impondérable. Cette *"inscription lumineuse"* peut d'ailleurs être rendue permanente par photographie.

Le miroir tournant doit tourner autour d'un axe parallèle au sillon SS' lumineux que décrit le rayon lumineux réfléchi par le miroir M que porte la tige vibrante *(sillon vertical ici)*

a) Lorsque le miroir ne tourne pas et que le diapason vibre, le spot lumineux décrit la trace rectiligne verticale AA' sur l'écran..

(F)
R
N
P
S
Ruban vibrant
A
C
H
M
Générateur
continu
Primaire
Bobine
d'induction
Secondaire
Tube à gaz
néon
(V) vis pour
tendre le rubai
oscillant.
(E) Pile d'entretien des
oscillations du ruban
(M) mercure des godets servant d'interrupteurs
lorsque l'électroaimant attire le ruban.
(H) huile évitant la coupure dans l'air du primaire.
(C) condensateur évitant l'étincelle au contact A lors
de la rupture du circuit d'entretien.
(R) Rhéostat.
(P) Pont qui coupe le courant lorsque le ruban monte.

Fig. 22

b) Lorsque le diapason ne vibre pas et que le miroir tourne la tache lumineuse décrit l'arc horizontal BB'.

c) Enfin, lorsque le diapason vibre et que le miroir tourne avec la vitesse angulaire Ω radians/sec., le spot décrit une sinusoïde d'autant plus allongée horizontalement que la vitesse angulaire du miroir tournant est plus grande et que la période du diapason T est plus longue.

$$\text{arc } \overset{\frown}{A\,K} = V\,T_d = R\;2\quad T_d \qquad \textit{(fig.23)}$$

N° 32: Là où le miroir tournant est *indispensable, c'est* lorsqu'il s'agit d'une *flamme manométrique (qui s'allonge et se raccourcit périodiquement).* La pointe de la flamme remplace le spot lumineux du numéro précédent et l'image sur l'écran est une lame en dents de scie dont deux dents successives sont séparées par la distance $4\pi\nu\, R{\div}\nu'$

ex: $10\ \frac{\text{tours}}{\text{sec.}}$ fréquence de vibration du miroir
$\nu' = 500$ fréquence *(sec^{-1})* du diapason.
$R = 30$ cms distance de l'écran au miroir.

La durée de la vibration du diapason est $T_d = \frac{1}{\nu'} = 2\times10^{-3}$

La vitesse angulaire du miroir est $\Omega = 2\ \pi\,\nu = 20\pi\ \frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$;
celle des rayons réfléchis est horizontalement $2\,\Omega = 40\pi\ \frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$

L'étalement horizontal $\overset{\frown}{A\,K}$ d'une vibration du diapason est

$\overset{\frown}{A\text{-}K} = V\ T_d = 2\Omega R\ T_d = 4\pi\,\nu\ \ R \div \nu' = 7.54$ cms.

Cette analyse au miroir tournant est assez fine pour permettre de montrer les harmoniques des instruments de musique à l'aide d'une capsule manométrique. Nous y reviendrons. Aujourd'hui, les oscillographes surtout cathodiques permettent une analyse beaucoup plus fine encore.

Problème 8: Un **disque** est percé de 40 trous et la fréquence du moteur qui l'entraîne est de 15 sec^{-1}. Si l'on éclaire un moteur qui entraîne un disque noir sur lequel on a peint un secteur de 20 degrés en blanc, quand saura-t-on qu'il tourne exactement à 300 tours par seconde?

Réponse: Lorsqu'on verra deux secteurs blancs opposés et immobiles.

Problème 9: Quelle serait la vitesse du même moteur si l'on apercevait 4 disques blancs *a)* immobiles *b)* tournant dans le sens réel du mouvement *(que l'on a repéré au départ)* avec une fréquence apparente de 2 tours par seconde?

Réponse: a): 150 tours par seconde; *b)* 152 tours par seconde.

Problème 10: Si une plaque de verre enfumé se déplace à raison de 100 pieds par seconde devant le style d'un diapason qui vibre à 500 périodes par seconde, quelle sera la longueur de la sinusoïde *(étalement dû au mouvement du verre et non pas amplitude)*

Réponse: 2 pouces. 4

Problème 11: Quelle est la **longueur** de la sinusoïde enroulée sur un cylindre enfumé; la vitesse angulaire du cylindre est 2 tours par seconde; le rayon du cylindre 1 pied, la période de la tige vibrante 1 ÷ 435 sec. et le nombre de sinusoïdes

Source continue
Elévation
L
Ecran
M
S
S'
(Les rayons réfléchis par le miroir tournant ne figurent pas dans l'élévation)
Axe de rotation des 4 miroirs.
Trace du plan LMSS' sur le plancher
M
L
O
SS'
Plan
2α
angle dont a tourné le plan des vibrations réfléchies
α
angle dont a tourné chacun des miroirs.
Ecran translucide
A
V vitesse horizontale du spot
Aspect de l'écran avec un diapason
A
K
B
B'
A'

Fig. 23

complètes est 50; *(il s'agit de la longueur de ruban sinusoïdal et non de la rectification de la sinusoïde).*

Réponse: 1 pied 5 pouces 1/3

(Voir par exemple page 18, tome II, Physique Générale et Expérimentale déjà cité).

CHAPITRE III

Mouvements harmoniques. Vecteurs tournants. Figure de Lissajous. Modulation. Théorème de Fourier

SOMMAIRE: Mouvement sinusoïdal, vitesse, accélération.- Mouvements sinusoïdaux amortis.- Représentation de Fresnel *(vecteurs tournants)*. Composition de deux mouvements sinusoïdaux de même période et de même direction.- Battements acoustiques.- Dérivation graphique.- Ellipses et autres figures de Lissajous. Théorème de Fourier.- Exemple de modulation.

N° 33: Le mouvement sinusoïdal se retrouve partout en physique: dans le pendule, dans les oscillations élastiques; en optique et en radio. Comme l'a montré Jean-Baptiste Fourier, tout phénomène périodique pouvant s'exprimer par une série de termes sinusoïdaux, à l'exception des phénomènes spectroscopiques, toute étude des vibrations nous ramène donc aux cas divers du mouvement sinusoïdal.

N° 34: *Bases mathématiques requises:* Nous rappelons ici les formules qui nous seront utiles engageant le lecteur à revoir au besoin dans un livre de trigonométrie et dans un livre d'analyse la signification exacte des symboles cités.

Trigonométrie: $\sin p + \sin q \quad 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\cos\varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \qquad \cos x = (e^{ix} + e^{-ix})\ \frac{1}{2}$$

$$+ \cos\varphi \quad 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \qquad \sin x \quad {}^{x} - e^{-ix})\ \frac{1}{2i}$$

Analyse: $\frac{d}{dx}(\cos y) \quad -\sin y. \qquad \frac{dy}{dx}(e^u) \quad e^u . \frac{du}{dx}$

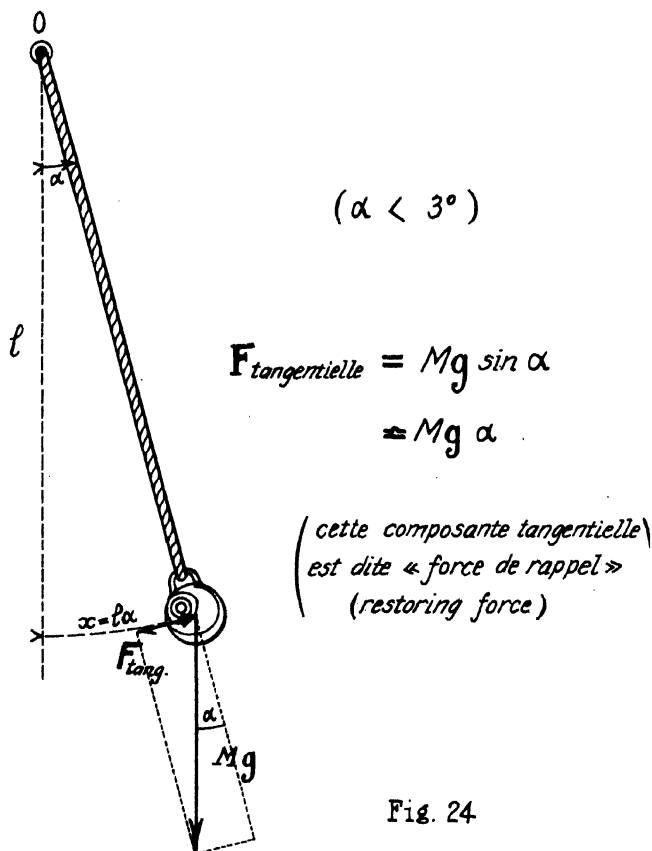
$$\frac{d}{dx}(\sin y) \quad + \cos y . \frac{dy}{dx}; \ \frac{d}{dx}(\log_e u) = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\cos y) \quad - \cos y . \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \sin y . \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sin y) \quad - \sin y . \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos y . \frac{d^2 y}{dx^2}$$

(cas particulier important: y fonction linéaire de x, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ *et les derniers termes disparaissent dans les dérivées secondes; alors* $\frac{d^2}{dx}(\cos y) \quad - \cos y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ *et de même pour le sinus).*

N° 35: Le mouvement du pendule simple *(tant qu'on se limite à l'étude des oscillations infiniment petites, inférieures à 3 degrés)* est la façon la plus élémentaire de se familiariser analytiquement avec le mouvement sinusoïdal. Les angles, sur la figure, sont supérieurs à 3° par raison de clarté, mais ne pas oublier que le demi-angle d'écart (α) *ne doit jamais dépasser 5 degrés pour que ce qui va suivre soit applicable (fig.24).*

Fig. 24

Au n°10, nous avons déjà incidemment calculé la période du mouvement pendulaire; il nous faut reprendre ce mouvement pour étudier *la vitesse et l'accélération* ***tangentielles*** en particulier.

La force "de rappel" qui ronge la composante de la vitesse portée par la tangente *(toute la vitesse ici)* est la projection du poids sur la **tangente** $|F_{tangentielle}| = Mg \sin\alpha \simeq Mg\,\alpha$ *(on sait en effet que pour α petit la valeur du sinus ne diffère guère de celle de l'arc).*

Le fait que cette force tangentielle est dirigée vers les arcs décroissants *(force attractive proportionnelle à l'élongation si l'on confond l'arc $x = l\,\alpha$ avec sa corde)* nous conduit à écrire $\mathbf{F} = - M\, g\, \alpha = - M\, g\, \frac{x}{l}$

(et à rapprocher de ce mouvement ceux des ressorts à boudin où la force de rappel est proportionnelle à l'élongation du ressort).

La vitesse du pendule, toute tangentielle, est

$$V = \frac{dx}{dt}$$

et l'accélération du pendule *(tangentielle)* est cinématiquement

$$\Gamma = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

et dynamiquement

$$\Gamma = \frac{F}{M} = - g\, x \div l$$

d'où l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad - (g \div l)\, x$$

Les formules rappelées au N°34 nous conduisent à admettre que *(puisque l'arc x est d'angle faible, on peut le confondre avec une droite et appliquer l'analyse scalaire habituelle)* x ayant une dérivée égale à $-(g/l)x$ doit être ou un cosinus d'arc fonction linéaire de t, ou un sinus d'arc fonction linéaire de t avec: $\sqrt{\frac{g}{l}}$ pour coefficient de t

$$x = A \sin \quad t + \qquad \text{ou encore}$$

$$A' \cos \quad t + B')$$

L'une se ramenant à l'autre en prenant $B' = -\frac{\pi}{2} + B$ et $A = A'$ nous ne nuirons pas à la généralité de la solution en prenant seulement:

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + B\right) \text{ ; A et B étant 2 constantes.}$$

La vitesse instantanée prendra donc la forme:

$$V = \frac{dx}{dt} = A \sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + B\right) = A \sqrt{\frac{g}{l}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + B + \frac{\pi}{2}\right)$$

Et l'accélération tangentielle instantanée:

$$\Gamma = \frac{dV}{dt} = - A \frac{g}{l} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + B\right) = A \frac{g}{l} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + B + \pi\right)$$

Note 1: A et B sont deux constantes quelconques que détermineront par exemple l'élongation initiale $x = x_0$ *(lorsque $t = o$)* et la vitesse initiale $V = V_0$ *(lorsque $t = o$)*; mais la période est absolument indépendante des conditions initiales *(pourvu que α soit petit)*. Déterminons A et B en fonction de x_0 et V_0

pour $t = o$ $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \quad A \sin B \\ V_0 \quad \cos B \end{array} \right\}$ d'où $B = \text{arctang} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{x_0}{V_0}$ puis $A = \frac{x}{\ldots}$

Note 2: Pour trouver la période T faisons varier la phase de 2π; $\sqrt{\frac{g}{l}}\, T = 2$; d'où $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

N° 36: *Mouvement sinusoïdal amorti:* Deux sortes très utiles:

a) amortissement par le frottement d'un solide *(indépendant de la vitesse)*

b) amortissement par la viscosité d'un liquide *(proportionnelle à la vitesse).*

Avant de décrire les moyens de produire chacun de ces mouvements, traitons rapidement la solution mathématique de leurs équations pour avoir un guide.

Procédé: Le moyen de plus sûr d'intégrer des équations de ce type est d'essayer la substitution d'une fonction exponentielle du temps et de ramener l'équation **différentielle** à un trinôme du second degré

N° 37: *Amortissement par le frottement d'un solide (fig.25).* Comme on sait depuis Charles Auguste Coulomb qu'un tel frottement est à peu près indépendant des vitesses, à la force de rappel *(restoring force):* $-k\,x$ va s'allier une force constante: $-f$ et l'équation du problème sera:

$$M\,\frac{d^2x}{dt^2} \quad -k\,x - f$$

changeons de variable en posant $k\,x + f = y$ pour ramener à la forme du pendule non amorti

$$\frac{M}{k}\,\frac{d^2y}{dt^2} \quad -y$$

d'où $y = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t + B\right)$, puis $x = \frac{y-f}{k} = \frac{A}{k}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t + B\right) - \frac{f}{k}$

Ceci suffit à montrer que la *période est la même* qu'en l'absence d'amortissement solide.

Une étude plus complète montrerait que l'*amplitude décroît d'une même quantité à chaque oscillation et que le pendule ne s'arrête pas à sa position d'équilibre.*

Effectivement, l'enveloppe des sinusoïdes successives est un triangle dans le cas d'un frottement de solide *(produit soit en serrant l'axe d'oscillation, soit en assujettissant le pendule à entraîner une planchette qui frotte sur un plan rugueux).*

La figure représente ce dernier cas, on peut charger la planchette P de poids connus et faire varier f à volonté bien plus commodément que de serrer l'axe d'oscillation.

N° 38: Amortissement par le frottement d'un liquide visqueux *(frottement proportionnel à la vitesse).*

A la force de rappel: $-k\,x$, s'ajoute: $-R\,\dot{x}$ pour freiner; *($\dot{x}$ étant l'abrégé de $\frac{dx}{dt} = V$; de même que $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$)*

L'équation du mouvement sera donc:

$$M\,\gamma = M\,\ddot{x} \quad M\,\frac{d^2x}{dt^2} \quad -k\,x - R\,\dot{x} \qquad \text{ou simplement}$$

$$|M\,\ddot{x} + R\,\dot{x} \quad k\,x$$

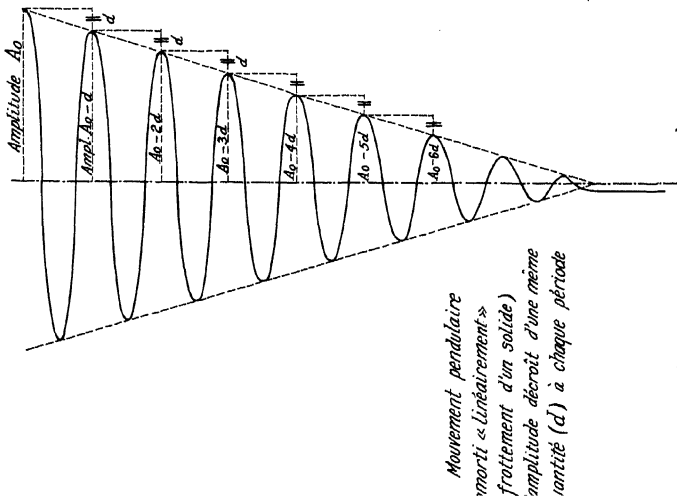
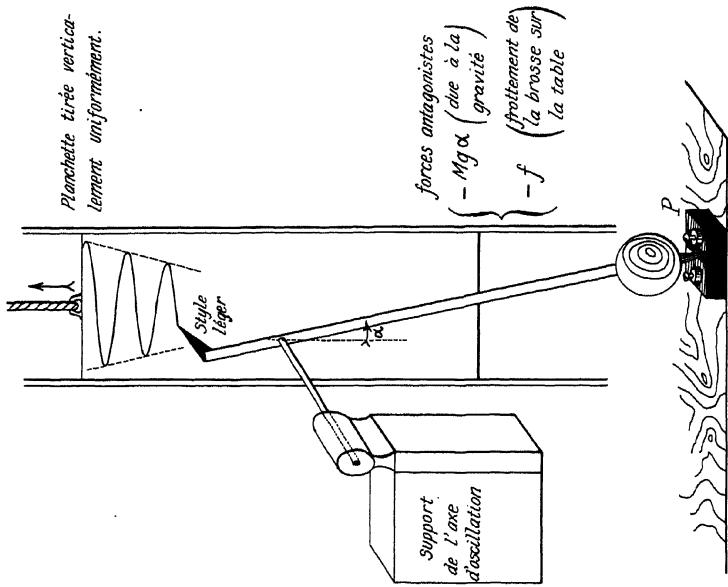
La forme du premier membre indique que la solution doit être une exponentielle du temps *(époque t)*

Amplitude A_0
Ampl. $A_0 - d$
$A_0 - 2d$
$A_0 - 3d$
$A_0 - 4d$
$A_0 - 5d$
$A_0 - 6d$
d
Mouvement pendulaire
morti « linéairement »
frottement d'un solide)
amplitude décroît d'une même
antité (d) à chaque période
Amplitudes en progression arithmétique.
Planchette tirée verticalement uniformément.
Style léger
α
Support de l'axe d'oscillation
forces antagonistes
$-Mg\alpha$ (due à la gravité)
$-f$ (frottement de la brosse sur la table)
P

Fig. 25

Essayons $x = A\,e^{\lambda t}$; $\dot{x} = A\lambda e^{\lambda t}$; $\ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$
(A et λ désignant des coefficients constants, indépendants du temps).
Substituant ces valeurs, on va disposer *(pour déterminer λ et discuter le mouvement)* *d'un trinôme du second **degré*** ce qui est plus maniable qu'une équation différentielle.

$$M\,\lambda^2 + R\,\lambda + \mathfrak{k} = 0$$

Discussion: a) si le réalisant ou discriminant est négatif, les racines seront imaginaires: $R^2 - 4\,M\mathfrak{k} < 0$ *(très faible viscosité) (Nº 39)*

b) si le réalisant est nul, les racines sont égales et l'on dit être dans le cas de "l'amortissement critique"*(Nº40)*

c) enfin si le liquide est extrêmement visqueux,les racines sont réelles *(Nº41)*

Seul le premier cas possède des oscillations dans les deux sens.

Nº 39: *Liquide de très faible viscosité.* $R^2 < 4M\mathfrak{k}$

$$\lambda = -\frac{R}{2M} \pm i\sqrt{\frac{\mathfrak{k}}{M} - \frac{R^2}{4M^2}}$$, d'où les deux solutions en x

$$x_1 = A\,e^{(-\frac{R}{2M})t + i(\sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4M^2})t} \qquad \text{et} \quad x_2 = B\,e^{(-\frac{R}{2M})t - i(\sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4M^2})t}$$

Une propriété des équations différentielles linéaires (où *x, ẋ et ẍ n'entrent qu'au premier degré)*est que la somme de deux solutions x_1 et x_2, $x_1 + x_2$ est aussi une solution de l'équation et de même toute combinaison linéaire $Ax_1 + Bx_2$ est aussi solution. C'est la base du *principe de "superposition" des effets infiniment petits* très important en élasticité notamment *(lois de Hooke).*

Le lecteur est prié de vérifier cette propriété en substituant $(x_1 + x_2)$ à x dans l'équation différentielle.

La solution la plus générale est donc dans le premier cas *(réalisant négatif):*

$$x = e^{(-R/2M)t}\left(A\,e^{i(\sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4M^2})t} + B\,e^{-i(\sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4M^2})t}\right)$$

(où i selon l' habitude désigne $\sqrt{-1}$, le verseur du plan complexe, ce qui fait tourner de π/2 radian dans le sens positif le vecteur par quoi on le multiple).

Les formules d'Euler *(rappelées au Nº 34)* permettent d'écrire

$$A\,e^{i(\sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4} \qquad A\,(\cos\sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4M^2}.\,t + i\,\sin\sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4M^2}.\,t)$$

$$B\,e^{-i(\sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4M^2})t} = B\,(\cos\sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4M^2}.\,t - i\,\sin\sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4M^2}.\,t)$$

d'où, en posant *(pour abréger l'écriture):* $\delta = \sqrt{\mathfrak{k}/M - R^2/4M^2}$,

$$x = e^{-R/2M.t}\left[(A + B)\cos\delta.t + i\,(A - B)\sin\delta.t\right]$$

Les constantes A et B peuvent être des nombres complexes $A = a + b\,i$ et $B = a' + b'\,i$ *(si l'une est réelle, il n'y a qu'à annuler son coefficient de i)*

$$x = e^{-R/2M.t}\left[(a+a')\cos\delta.t - (b-b')\sin\delta.t + i\left\{(b+b')\cos\delta.t + (a-a')\sin\delta.t\right\}\right]$$

Il faut *(puisque partie réelle et partie imaginaire sont irréductibles l'une à l'autre) que séparément la partie réelle soit solution de l'équation et de même que séparément le coefficient de l'imaginaire soit solution aussi:*

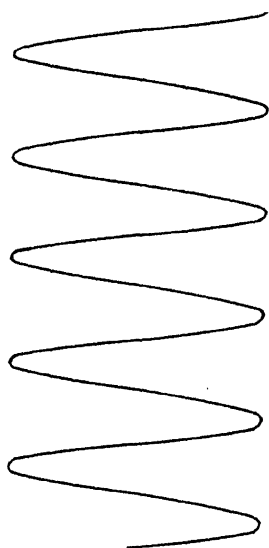
Fig. 26 A

non amorti (ou entretenu)

Fig. 26 B

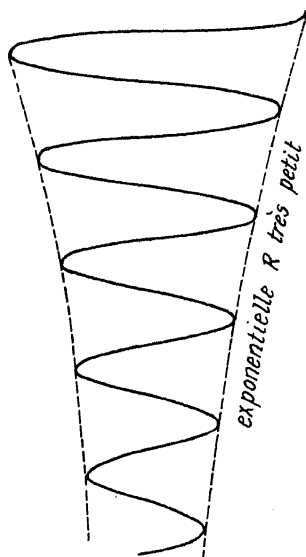
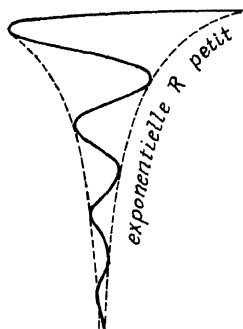
exponentielle R très petit

amortissement très faible

amortissement faible

Fig. 26 C

$$x = e^{-R/2M \cdot t} \quad [\, C \cos \delta . t - D \sin \delta . t \,] \quad \text{et}$$

$$x = e^{-R/2M \cdot t} \quad [\, C' \cos \delta . t + D' \sin \delta . t \,]$$

en posant $a+a' = C$, $b-b'=D$, $b+b'=C'$ et $a-a'=D'$.

Comme toutes les constantes sont quelconques, les deux solutions **sont** essentiellement de la même forme et sans nuire à la **généralité,** il nous suffit de garder l'une d'elles, la première par exemple

$$x = e^{-R/2M \cdot t} \quad [C \cos \delta . t - D \sin \delta . t]$$

Note 1: Nous mettons un point entre δ et t pour marquer qu'il s'agit du produit de $\delta = \sqrt{k/M - R^2/4M^2}$ par t et non pas du symbole δt *(variation de t).*

Note 2: On peut encore condenser **davantage** la forme de la solution en posant $C = K \cos \varphi$ et $D = K \sin \varphi$ ce qui détermine K et φ sans ambiguité et permet, grâce à la formule: $\cos \varphi \cos \delta . t - \sin \varphi \sin \delta t = \cos (\varphi + \delta . t)$ d'écrire

$$K \quad e^{-R/2M \cdot t} \qquad . t + \varphi)$$

Le second facteur montre que la période $T = \dfrac{\quad}{\sqrt{k/M - R^2/4M^2}}$ est *un peu plus **longue*** qu'en l'absence d'amortissement $R = o$ et d'autant plus allongée que $(R/2M)$ est important.

Le premier facteur est le facteur exponentiel d'amortissement *(au lieu que l'enveloppe des sinusoïdes soit une droite (fig.25) comme dans le cas de l'amortissement par frottement **solide**, elle est ici une exponentielle): (voir fig.26).*

La signification physique de K est "l'*amplitude initiale*" et celle de φ est "*la phase initiale*".

On appelle "*décrément logarithmique*" le **logarithme** népérien du rapport de deux amplitudes successives *(d'époques t et t + T):* c'est une quantité facile à mesurer et comme il s'agit d'un rapport, l'unité de mesure est arbitraire.

Le décrément logarithmique est donc

$$\log : \frac{K \; e^{-R/2M \cdot t}}{K \; e^{-R/2M \cdot (t+T)}} \qquad \frac{R}{2M} \; T = \frac{R}{M} \; \frac{\pi}{\sqrt{1 - R^2/4M^2}}$$

Pour déterminer les constantes K *(amplitude initiale)* et φ *(phase initiale),* calculons l'expression de la vitesse

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = - K \; e^{-R/2M \cdot t} \left[\frac{R}{2M} \cos \left\{ \sqrt{k/M - R^2/4M^2} . t + \varphi \right\} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{k/M - R^2/4M^2} \; \sin \left\{ \sqrt{k/M - R^2/4M^2} \cdot t + \varphi \right\} \right]$$

Appelons x_0 l'élongation initiale et $\dot{x}_0$ la vitesse initiale ($t = o$, époque).

$$x_0 = K \cos \varphi \quad \text{et} \quad \dot{x}_0 = - K \left[R/2M \cos \varphi + \sqrt{k/M - R^2/4M^2} \; \sin \varphi \right]$$

Entre ces deux équations, l'une donnant $\cos \varphi$, l'autre $\sin \varphi$, *(quand on y substitue* $\cos \varphi$ *tiré de la première),* on détermine

$$\text{tg} \; \varphi = - \frac{\dot{x}_0 + R/2M \; x_0}{x_0 \; \sqrt{k/M - R^2/4M^2}}$$

Planchette tirée uniformément vers le haut.
Style léger
axe des oscillations
α
résistance visqueuse
f = − Rẋ

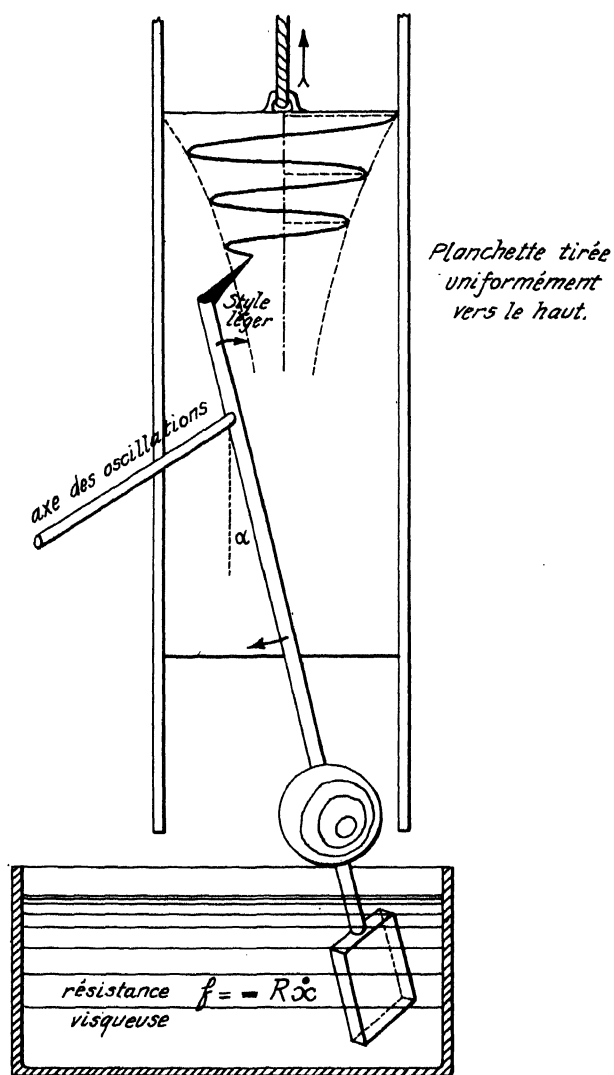



Fig. 26 D

En calculant cos φ par la formule $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$, puis en substituant à tg φ sa valeur en fonction de x_0 et $\dot{x}_0$, on a:

$$K = \frac{x_0}{\cos\varphi} = x_0\sqrt{1 + tg^2\varphi} = \sqrt{\frac{x_0^2\ k/M + \dot{x}_0^2 + \dot{x}_0 x_0 R/M}{k/M - R^2/4M^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x_0^2 + \dot{x}_0^2 M/k + \dot{x}_0 x_0 R/k}{1 - R^2/4Mk}}$$

Lorsque la viscosité est faible *(R petit)*, en première approximation on a:

$$tg\ \varphi = - \frac{\dot{x}_0}{x_0}\frac{M}{k} \quad \text{et } K = x_0\sqrt{1 + \frac{M}{k}\frac{\dot{x}_0^2}{x_0^2}}$$

Les trois graphiques de la figure 26 représentent

26_A , R = 0 amortissement nul

26_B R très petit } ces deux valeurs étant inférieures à $\sqrt{4\,Mk}$ c'est-à-dire que l'amortissement critique n'est pas atteint

26_C R petit

Remarquer que pour 26B et 26C, l'enveloppe des sinusoïdes n'est plus une droite *(comme dans le cas 25 du frottement solide)*, mais une exponentielle.

La figure 26D est un dispositif simple d'amortissement proportionnel à la vitesse: une palette dans l'eau.

(Le même dispositif nous permettra d'étudier l'amortissement critique puis l'amortissement apériodique en remplaçant l'eau par de la glycérine de moins en moins diluée, puis par de la mélasse ou un goudron épais; nous n'aurons donc pas à répéter le dispositif pendulaire, mais seulement à indiquer l'allure des courbes "critiques" et "apériodiques).

N° 40: *Amortissement critique:* Lorsque le réalisant de l'équation résolvante est nul, les racines sont égales toutes deux à $-\frac{R}{2M}$

Dans ce cas *(au lieu de $x = A\,e^{\lambda t}$)* substituons dans l'équation différentielle $e^{\lambda t}\ \psi\ (t)$ à x.- ψ est une fonction indéterminée de la durée et λ est une constante.

de $x = e^{\lambda t}\ \psi\ (t)$, on tire successivement

$$\dot{x} = e^{\lambda t}\ \{\lambda\ \psi + \dot{\psi}\}$$

$$\ddot{x} = e^{\lambda t}\ \{\lambda^2\ \psi + 2\lambda\dot{\psi} + \ddot{\psi}\}$$

puis substituant ces valeurs dans l'équation du mouvement $M\ddot{x} + R\dot{x} + kx = 0$

il vient:

$$e^{\lambda t}\ (M\lambda^2\psi + 2M\lambda\dot{\psi} + M\ddot{\psi} + R\lambda\psi + R\dot{\psi} + k\psi) = 0$$

$$\text{ou } \psi\,(M\lambda^2 + R\lambda + k) + \dot{\psi}\ (2M\lambda + R) + M\ddot{\psi} = 0$$

Le coefficient de ψ est nul puisque c'est l'équation résolvante. Celui de $\dot{\psi}$ est également nul puisque dans le cas présent *(racines égales)* $\lambda = -\frac{R}{2M}$

L'équation de condition se réduit donc à $\ddot{\psi} = 0$, c'est-à-dire que la fonction ψ doit être linéaire en *t (du premier degré en t)* $\psi = A + Bt$;*(A et B étant deux constantes).*

Ainsi l'élongation x dans le cas de l'*amortissement critique* a pour expression

$$e^{-R/2M \cdot t}(A + Bt)$$

Il n'y a plus d'oscillation mais la courbe décrite par le pendule tend asymptotiquement vers zéro.

$$\dot{x} = e^{-R/2M \cdot t}\left\{B - \frac{R}{2}\frac{A}{M} - \frac{R}{2}\frac{B}{M} \cdot t\right\}$$

Cette vitesse s'annule pour $t = \frac{2M}{R} - \frac{A}{B}$

Si $\frac{2M}{R} > \frac{A}{B}$, c'est à une époque positive τ qu'a lieu le maximum d'élongation *(courbe fig.27.A)*

Si $\frac{2M}{R} - \frac{A}{B}$, c'est à l'époque initiale t = o qu'a lieu le maximum d'élongation *(courbe fig.27.B)*

Enfin, si $\frac{2M}{R} < \frac{A}{B}$ le maximum d'élongation est défini pour une valeur négative de t, ce qui n'a pas de sens physique, il n'y a donc alors pas de maximum d'élongation *(courbe fig.27.C)*

Note: Les électriciens appellent "galvanomètre balistique" un appareil qui est amorti critiquement *(comme la courbe 27 A)* et sert à mesurer la quantité d'électricité.

A maximum de déviation ou élongation à l'époque τ

B- maximum à l'origine

C pas de maximum.

A

B

C

x

$t=0$ $t=\tau$ t

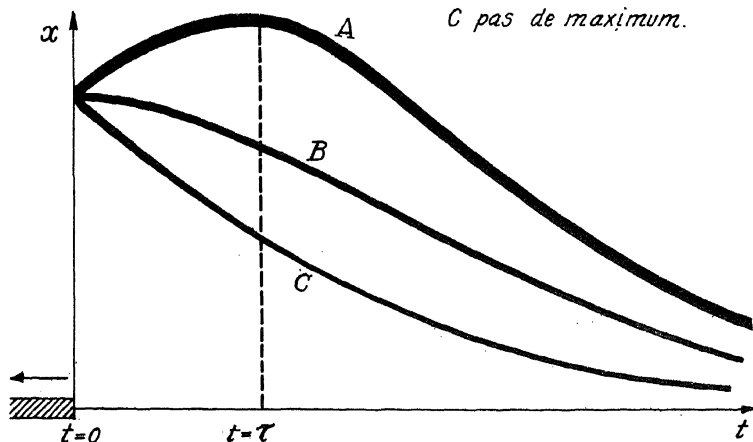



Fig. 27

Divers aspects de l'amortissement « critique »
(même schéma expérimental qu'à la fig. 26D.)

N° 41: *Amortissement "a-périodique"*. C'est le cas où les racines de l'équation résolvante sont réelles: $R^2 > 4M\mathfrak{k}$, c'est-à-dire le cas où la viscosité du liquide est très grande.

$$e^{-R/2M \cdot t} \left(A\ e^{+\sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M} \cdot t} + B\ e^{-} \right.$$

(puisque x_1 et x_2 étant les solutions, toute combinaison linéaire $Ax_1 + Bx_2$ est aussi solution) $x_0 = A + B$

La vitesse instantanée a pour expression:

$$\dot{x} = e^{-R/2M \cdot t} \left\{ -\frac{R}{2M} \qquad \overline{4M^2 - \mathfrak{k}/M} \cdot t + B\ e^{-\sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M} \cdot t} + \right.$$

$$\left. + A \sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M}\ e^{+\sqrt{\cdots}} - B\sqrt{\cdots}\ e^{-\sqrt{\cdots}} \right\}$$

Ce cas ne donnant aucune oscillation, nous pouvons supposer la vitesse initiale nulle, ce qui donne

$$0 = \dot{x}_0 = -\frac{R}{2M} (A + B) + \sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M} \quad (A - B)$$

ou

$$A \left(\sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M} - \frac{R}{2M} \right) - B \left(\sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M} + \frac{R}{2M} \right)$$

Nous pouvons donc déterminer A et B en fonction de x_0, R, M et $\mathfrak{k}$

$$A = \frac{x_0 \left\{ \sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M} + R/2M \right\}}{2 \sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M}}$$

$$B \quad \frac{x_0 \left\{ \sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M} - R/2M \right\}}{2 \sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M}}$$

La solution prend alors la forme

$$x = \frac{x_0\ e^{-R/2M \cdot t}}{2 \sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M}} \left\{ \sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M} \left(e^{+\sqrt{\ } \cdot t} + e^{-\sqrt{\ } \cdot t} \right) + \frac{R}{2M} \left(e^{+\sqrt{\ } \cdot t} - e^{-\sqrt{\ } \cdot t} \right) \right\}$$

soit en utilisant les fonctions hyperboliques *(qui sont définies par les mêmes formules que les fonctions circulaires au Nº 34 en omettant les i)*

$$x = \frac{x_0\ e^{-R/2M \cdot t}}{\sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M}} \left\{ \sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M}\ \cosh \sqrt{R^2/4M^2 - \mathfrak{k}/M} \cdot t + \frac{R}{2M} \sinh \sqrt{\frac{R^2}{4M^2} - \frac{\mathfrak{k}}{M}} \cdot t \right\}$$

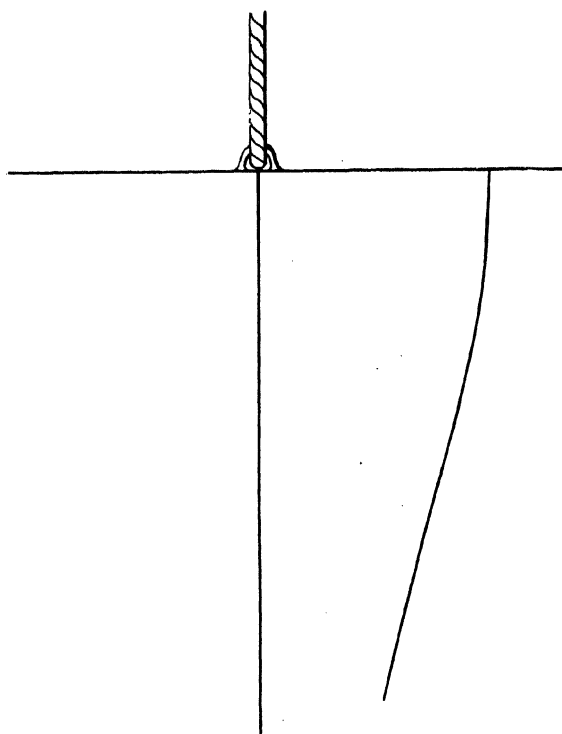
La figure 28 indique l'allure de l'amortissement apériodique ainsi nommé parce que le mouvement n'a plus rien de sinusoïdal; le retour à la position d'équilibre est très long.

L'appareillage moderne utilise de préférence l'amortissement critique; quand la "viscosité" devient trop grande, il n'y a plus d'intérêt vu le temps que met le système "à retourner au zéro".

Le lecteur est prié de comparer les figures 25 à 28 pour bien différencier entre eux les divers amortissements.

N° 42: *Représentation de (Fresnel Augustin) d'un mouvement sinusoïdal (par un vecteur tournant)*.

Nous limiterons notre étude aux mouvements sinusoïdaux *entretenus*, c'est-à-dire à ceux pour lesquels "un échappement" fournit l'énergie que les frottements gaspillent, compensant ainsi les pertes *(s'aider de la fig.29)*.

Ces mouvements ne sont donc *pas amortis*, ils sont *à amplitude constante*.

amortissement apériodique

$R > \sqrt{4 k M}$

(même schéma expérimental que 26D.)

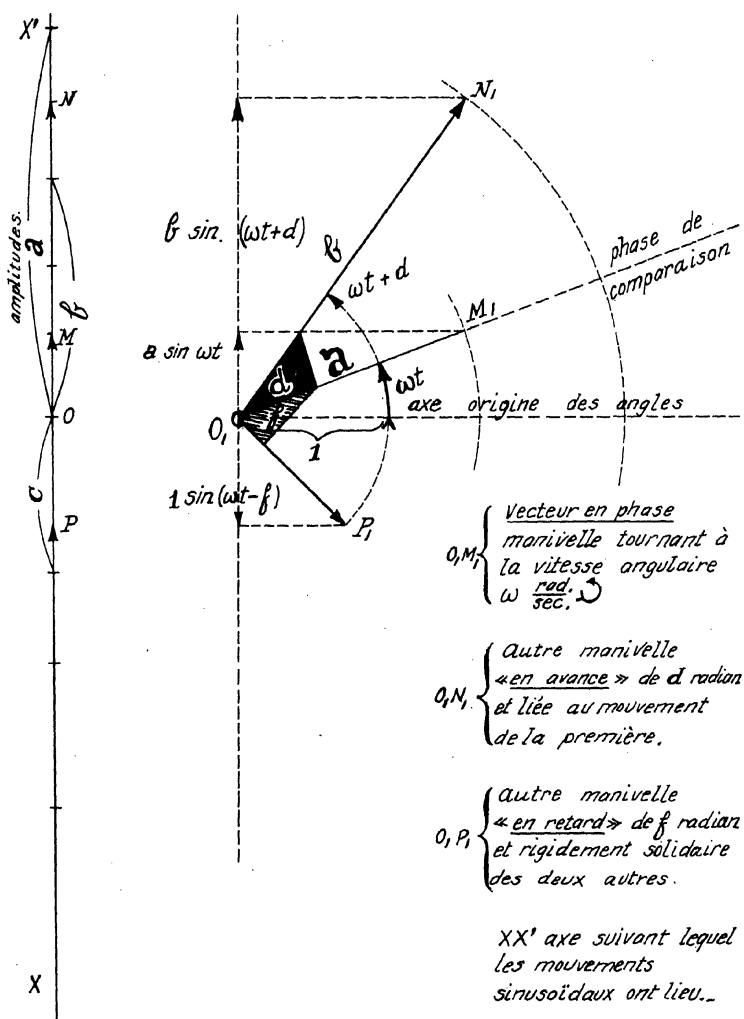
Fig. 28

Nous nous proposons de représenter trois mouvements sinusoïdaux qui ont lieu suivant la direction X X' et *de même fréquence*.

$OM = a \sin \omega t$; $ON = b \sin (\omega t + d)$; $OP = 1 \sin (\omega t - f)$

Fresnel prend trois manivelles O_1M_1, O_1N_1 et O_1P_1 ayant pour longueurs respectivement a,b et c les trois amplitudes, et interceptant entre elles les angles $d = (\widehat{O_1M_1, O_1N_1})$ et $f = (\widehat{O_1P_1, O_1M_1})$

Ces manivelles supposées *solidaires* tournent dans le sens positif *(sinistrorsum)* à la vitesse angulaire ω; à chaque instant t, les angles des manivelles avec l'origine des angles sont ωt pour O_1M_1 ; $\omega t + d$ pour O_1N_1; et, $\omega t - f$ pour O_1P_1.

Donc, les projections de ces manivelles sur la direction XX' *(à $+\pi/2$ de l'origine des angles)* sont bien *à tout instant* les mouvements qu'il s'agit de représenter. L'intérêt de cette représentation va apparaître aux numéros 43 et 45 puis 48 surtout.

X'
N
amplitudes
a
b
M
O
c
P
X
N₁
b sin. (ωt+d)
b
ωt + d
phase de comparaison
M₁
a sin ωt
a
d
ωt
axe origine des angles
O₁
1
1 sin(ωt-f)
P₁
O₁M₁ Vecteur en phase manivelle tournant à la vitesse angulaire ω rad./sec.
O₁N₁ Autre manivelle « en avance » de d radian et liée au mouvement de la première.
O₁P₁ Autre manivelle « en retard » de f radian et rigidement solidaire des deux autres.
XX' axe suivant lequel les mouvements sinusoïdaux ont lieu._

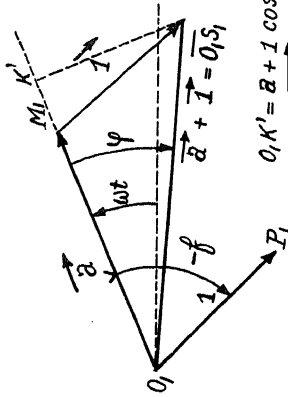



Fig. 29

Fig. 30 A

Fig. 30 B

N° 43: *Composition* de deux mouvements sinusoidaux de *même période* et de *même direction* décalés de "d radians" l'un par rapport à l'autre.

Soient les deux mouvements sinusoïdaux *(de la fig.29)*

$$a \sin \omega t \quad \text{et} \quad b \sin (\omega t + d)$$

Proposons-nous de représenter leur somme par une manivelle tournante $O_1 S_1$ et leur différence par une autre manivelle tournante $O_1 D_1$

Règle de Fresnel: "On porte sur une droite quelconque une longueur $O_1 M_1$ égale à l'amplitude (**a**) du premier mouvement; puis, à la suite, mais faisant avec le prolongement de $O_1 M_1$ un angle (**d**) égal à la différence de phase vers le haut si comme ici le deuxième mouvement $O_1 N_1$ est "en avance" sur le premier *(et vers le bas s'il était comme $O_1 P_1$ en retard sur le premier)*, on porte une longueur $M_1 N_2$ égale à l'amplitude (**b**) du second mouvement. La droite $O_1 N_2$ donne l'amplitude du mouvement résultant et l'angle $M_1 O_1 N_2$ donne sa différence de phase avec le premier mouvement composant *(ici l'avance de phase du vecteur somme)*".

Cette règle est immédiate si l'on veut bien considérer que $O_1 M_1$ et $O_1 N_1$ sont deux *vecteurs (tournants)*. Comme la *somme de ces deux vecteurs* est bien obtenue par la règle de Fresnel et que nous avons remarqué qu'à tout instant la projection sur XX' des deux manivelles était bien l'élongation des mouvements sinusoïdaux, nous devons admettre que la projection sur XX' du vecteur somme des deux manivelles est bien à tout instant la somme des élongations des deux mouvements.

La figure 30A **représente** la somme et la différence de deux vecteurs l'un en phase, l'autre en avance de phase sur lui. La figure 30B est relative au cas de deux vecteurs dont le second est en retard de phase sur le premier.

Quant à la différence de deux vecteurs tournants $\vec{a} - \vec{b}$ il suffit d'ajouter au premier le vecteur - b pour être ramené au cas de l'addition {*c'est-à-dire ajouter π à la phase du vecteur b puisque* $[\sin (\omega t + d) + \pi] = - \sin (\omega t + d)$}

Note: Remarquer que dans ces constructions de composition de vecteurs tournants, jamais (ωt) n'intervient, *seules les phases relatives* des divers vecteurs entrent en ligne; on peut donc dire que toutes les figures polygonales que l'on doit faire pour combiner les vecteurs tournants sont *invariables de forme* lorsque le temps *(durée)* s'écoule; elles tournent, il est vrai, à raison de "ω" radians par seconde, mais *à tout instant* la construction est valable: cette propriété nous permettra au N° 48 de trouver les solutions *de régime* des équations différentielles harmoniques par un graphique simple puisque justement *une équation différentielle est une relation vraie à tout instant et que les constructions des vecteurs tournants de **Fresnel** satisfont à cette condition.*

N° 43: *Battements acoustiques (Combinaison de deux mouvements sinusoïdaux de même amplitude mais de périodes très peu différentes)*. Supposons deux diapasons presque identiques entretenus électriquement *(s'ils étaient parfaitement égaux, alourdir l'un d'eux par une petite masse mobile que l'on peut fixer à l'une des branches)*.

S'ils vibrent tous les deux dans un plan vertical et sont pratiquement dans le prolongement l'un de l'autre *(fig.32)* on

Solution trigonométrique du problème des battements (Pour chaque onde individuelle, voir détails Fig. 31 B)

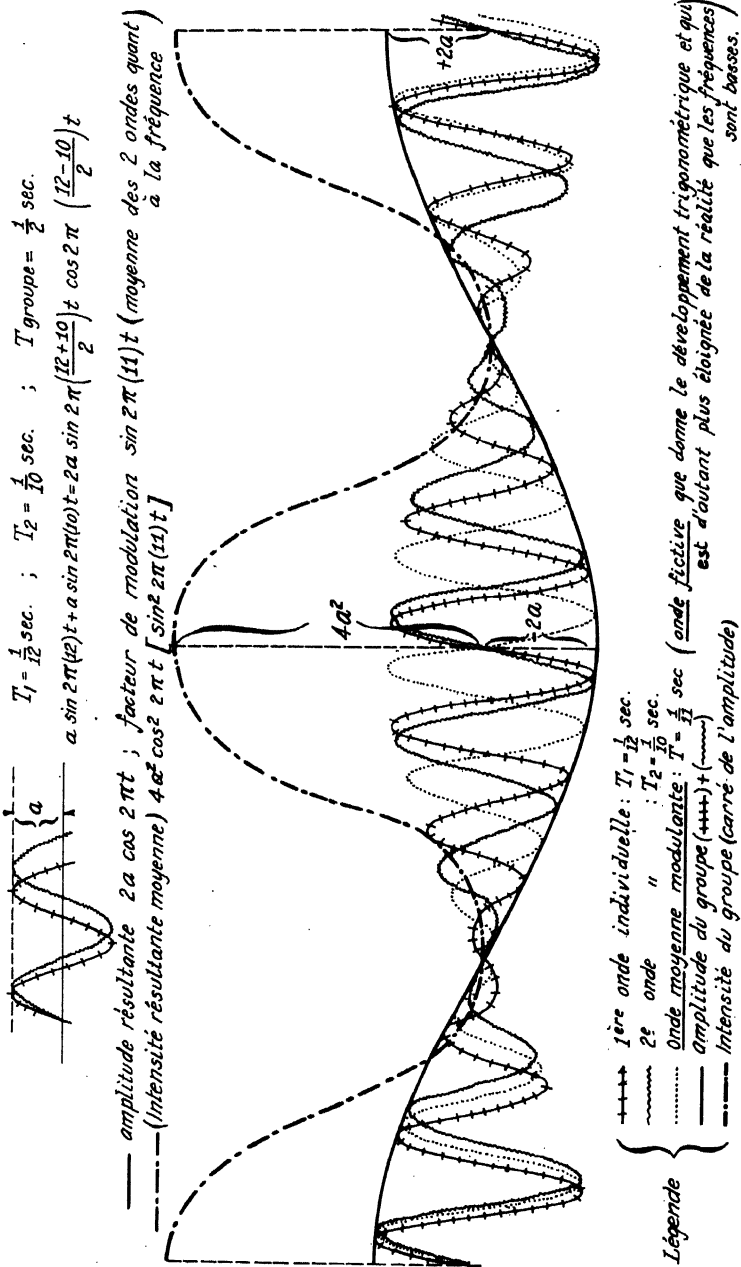



Fig. 31 A

pourra dire que les vibrations de l'un et l'autre pourront être représentées par les amplitudes parallèles:

$$x_1 = A \sin 2\pi\nu t \quad \text{et} \quad x_2 = A \sin\left[2\pi(\nu+\varepsilon)t - \varphi\right]$$

dont la somme (N° 34) peut s'écrire:

$$x_1 + x_2 = 2A\cos(\pi\varepsilon t - \frac{\varphi}{2}) \sin\left[2\pi(\nu + \frac{\varepsilon}{2})t - \frac{\varphi}{2}\right]$$

amplitude variant lentement facteur modulant

On ne perçoit plus les deux sons individuels, mais des "battements" *(les maxima du son résultant)* dont la fréquence est beaucoup plus faible que la fréquence moyenne des vibrations des deux diapasons *(différence des fréquences).*

La figure 31A montre l'explication trigonométrique du **phénomène.** La courbe en trait plein représente "l'amplitude variant lentement" *(ou les vibrations du "groupe des deux ondes", caractérisant l'énergie des "paquets d'ondes").* On dit aussi "train d'ondes).

La courbe en trait pointillé représente les modulations de la phase moyenne *(en* ***réalité*** *il devrait y avoir les modulations superposées de chacune des phases composantes puisque justement les extrémités de chaque paquet d'ondes sont comme les divisions terminales* **communes** *à vernier et règle, les extrémités de la "période" plus petit commun multiple* ***des périodes individuelles****).* La figure 31B montre plus en détail la formation du groupe: nous avons composé algébriquement les élongations des deux ondes et constaté graphiquement que le train d'ondes avait bien pour période le plus petit commun multiple des périodes individuelles des ondes.

Les courbes en trait mixte —·—·—·—·— représentent l'intensité du groupe *(carré de l'amplitude du groupe).*

A noter que *pour avoir une figure claire à petite échelle,* nous avons dû prendre deux vibrations qui ne correspondent pas à la réalité $\nu_1 = 10$ et $\nu_2 = 12$. En prenant des nombres de vibrations de l'échelle musicale 500 et 501 par exemple, le calcul ne serait pas plus compliqué mais la figure seratt illisible.

Emploi des battements: Pour"accorder" deux instruments de musique, on modifie l'instrument qui semble le plus défectueux jusqu'à ce que le nombre de battements par seconde devienne de plus en plus rare *(à mesure que les fréquences individuelles s'égalisent, celle du groupe décroît)* et quand les battements cessent pour donner l'unisson, l'accord est obtenu *(fréquence nulle).*

Loi des fréquences: La fréquence du groupe de deux ondes est la différence des fréquences individuelles

$$(\nu_{gr} = 2\ \text{sec}^{-1}) = (\nu_1 = 12\ \text{sec}^{-1}) - (\nu_2 = 10\ \text{sec}^{-1})$$

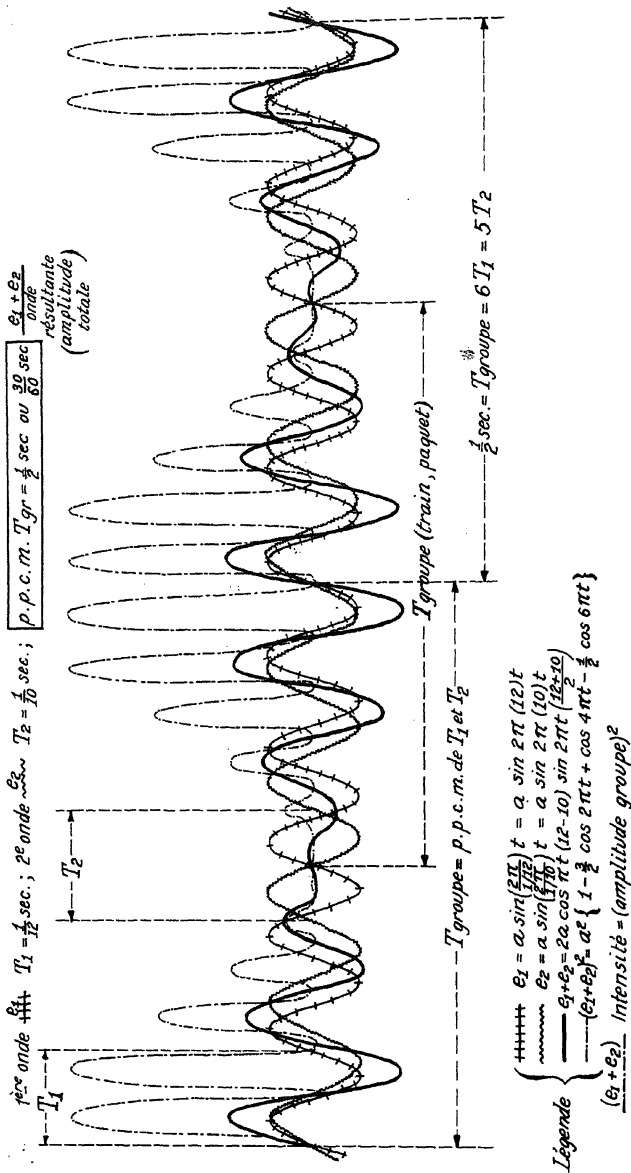
Note: Ces considérations seront reprises en optique physique à propos de la longueur d'onde du groupe et de la vitesse du groupe. La loi est particulièrement simple pour les battements vu que *la fréquece est indépendante du milieu (alors que la vitesse du groupe dépend de la dispersion tout comme la longueur d'onde).*

Solution détaillée (voies graphique et arithmétique).

Fig. 31 B

N° 44: *Moyen de montrer optiquement les battements acoustiques*. La figure 32 va nous donner la réalisation expérimentale de la courbe en trait plein de la figure 31B et cela *visuellement* par un spot lumineux.

Une couple de diapasons vibrant tous deux verticalement ont une fréquence légèrement différente: *(l'un d'eux a une branche portant une boulette de cire)*. Ces deux diapasons sont porteurs chacun d'un miroir et *un rayon lumineux* se réfléchissant successivement sur les deux miroirs M_1 et M_2 *vibre verticalement comme un diapason unique* dont les amplitudes variables lentement seraient à chaque instant proportionnelles aux sommes des élongations instantanées des deux diapasons *(donc avec un groupe de fréquence $\nu_1 - \nu_2$)*.

Afin de donner les abscisses voulues *(proportionnelles aux durées écoulées)* un troisième miroir *(d'axe vertical)* tourne uniformément de

$$\Omega \ \frac{\text{radians}}{\text{seconde}}$$

Si R 6 pieds, $N = 2 \ \frac{\text{tours}}{\text{sec}}$ (120 R.P.M.) et si les diapasons ont pour fréquences *(entretenues électriquement)*

$\nu_1 = 552$; $\nu_2 = 500$ *(celui qui a une boulette de cire)*.

La fréquence du groupe est $\nu_1 - \nu_2 = 552 - 500 \quad 52 \ \text{sec}^{-1}$
Donc la période du groupe est de $T_{gr} = \frac{1}{\nu_{gr}} = \frac{1}{52}$ sec.

La vitesse angulaire du miroir M_3 est

$$2\pi \ \frac{\text{radians}}{\text{tour}} \ (N=2) \ \frac{\text{tours}}{\text{sec}} = 12.57 \ \frac{\text{rad.}}{\text{sec.}}$$

La vitesse angulaire *horizontale* avec laquelle le rayon lumineux est dévié *de par la rotation du miroir tournant seulement* est donc 25.14 rad./séc *(double de celle du miroir tournant)*.

Et la vitesse *linéaire horizontale* que le spot lumineux possède à 6 pieds sur l'écran est donc

$$V \text{ horizontale} = 25.14\left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right).6 \text{ pieds} \quad 150 \ \frac{\text{pi.}}{\text{sec}}$$

La longueur KN dont se trouvera étalé "le groupe" sur l'écran sera le chemin parcouru par la lumière en un 1/52e de seconde, soit

$$150 \ \frac{\text{pi.}}{\text{sec}} \ \frac{1}{52\text{e}} \text{sec} = 2 \text{ pi.10 po.8/13.}$$

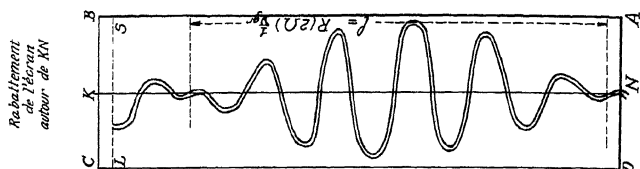
Grâce à la persistance des impressions lumineuses sur la rétine, on aura l'illusion d'un éclairage continu et l'on pourra opérer la mesure aisément.

Note:. La vitesse verticale du spot, **qui n'est pas due au miroir** tournant, mais aux oscillations verticales des miroirs M_1 et M_2 n'entre pas en ligne de compte pour la période du groupe, de sorte que même avec des diapasons à amortissement, on n'aurait pas d'erreur dans la mesure de la période du groupe.

Pour accorder deux instruments, il n'est donc pas nécessaire d'avoir un appareillage électrique compliqué.

N° 45: *Dérivation graphique des fonctions sinusoïdales* dont la phase est une fonction linéaire *(soit de l'époque, soit de la position, soit des deux)*.

Collimateur
L
cire.
D_1
M_1
D_2
M_2
M_3
BKC
PLAN (HORIZONTAL)
$V = R(2\Omega)$
E
2Ω
R.
Spot
AND
$\Omega = 2\pi \frac{rad.}{tour} N \frac{tours}{sec.}$
⊗ verticale
Rabattement
de l'écran
autour de KN
C
K
B
L
S
$\ell = R(2\Omega)\frac{1}{\nu_{gr}}$
D
N
A
boulette de cire
D_1
M_1
D_2
M_2
M_3
Miroir
tournant
ÉLÉVATION
verticale
B
A
E
K
N
C
D
E Ecran
LS trainée lumineuse quand M_3 ne tourne pas mais que les diapasons vibrent.
KN trainée quand M_3 tourne sans que les diapasons vibrent.

Fig. 32

Nous nous limiterons en deuxième année aux fonctions sinusoïdales de l'époque *(les autres n'intervenant que dans les phénomènes de propagation des ondes)*

Soit $z = A \cos(\omega t + \varphi)$ et $y = B \sin(\omega t + \varphi)$

ω est appelé la *pulsation (2π radians ÷ T secondes)*
φ est nommé déphasage *(retard ou avance compté en radians) (voir ici au Nº 34)*

$$\dot z = \frac{dz}{dt} = - A\,\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \dot y = \frac{dy}{dt} \quad B\,\omega \cos(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t+\varphi) \quad \text{et} \quad \ddot y = \frac{d^2 z}{dt^2} = - B\omega^2 \sin(\omega t+\varphi)$$

Ce sont là les manières en usage chez les mathématiciens.

Comme $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ $- \sin\alpha$ et $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = + \cos\alpha$ Fresnel a eu l'heureuse idée de trouver une expression plus simple à retenir comme à interpréter graphiquement. Le lecteur est prié de vérifier l'équivalence des formules de Fresnel aux formules ci-dessus.

$$z = A \cos(\omega t + \varphi) \qquad z = B \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot z = A\,\omega^1 \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \qquad \dot z = B\,\omega^1 \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot z = A\,\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \qquad \ddot z = B\,\omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^n z}{dt^n} = A\,\omega^n \cos(\omega t + \varphi\ n\,\frac{\pi}{2}) \qquad \frac{d^n z}{dt^n} = B\,\omega^n \sin(\omega t + \varphi + n\,\frac{\pi}{2})$$

La règle est simple: *l'amplitude est multipliée* à chaque dérivation par *la pulsation* et la phase est avancée chaque fois de un quadrant.

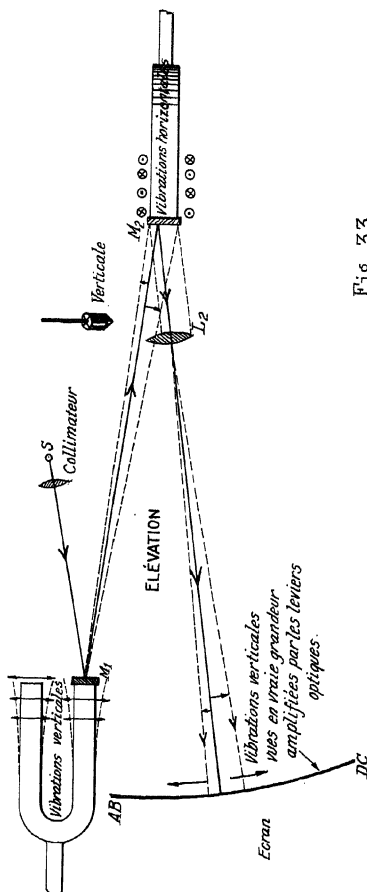
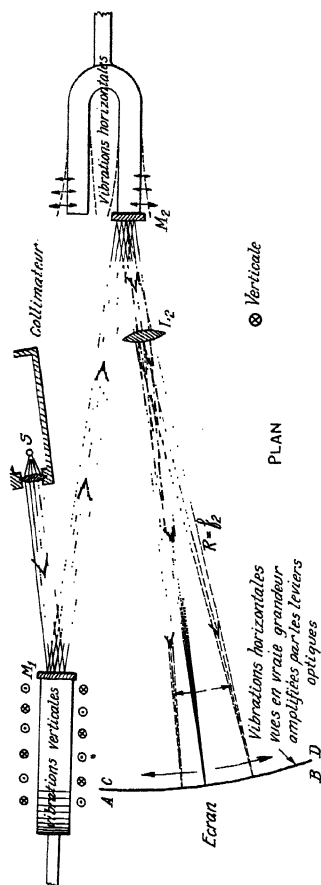
L'opération inverse de la dérivation *(l'intégration)* qui donne "la fonction primitive, celle dont la dérivée ést la fonction donnée" est aussi simple, il suffit de changer les signes.

Ainsi:

$$\int A \cos(\omega t \qquad dt = A\,\omega^{-1} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$\iint A \cos(\omega t + \varphi)\, dt^2 = A\,\omega^{-2} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$$

Il n'y a pas de danger de se tromper de signe ou d'écrire un cosinus pour un sinus puisque dérivation ou intégration ne changent ni le signe qui précède ni la forme de la fonction.

La représentation graphique du numéro 42 nous montre immédiatement qu'une fonction sinusoïdale, ses dérivées successives et ses intégrales successives forment une croix d'ailes de moulin dont les longueurs sont en progression géométrique de raison égale à la pulsation (ω). Au numéro 48 le lecteur pourra constater cette progression *(figure)*. Insistons seulement sur le fait que toutes ces manivelles de la fonction, de ses filles et de ses mères *(comme nous le disions déjà au nº 42)*, tournant toutes avec la même vitesse angulaire et dans le même sens, *leur position relative* est invariable et leur ensemble tout comme l'équation différentielle est *"une relation*

M1
S
Collimateur
vibrations verticales
A C
Vibrations horizontales
L2
M2
Ecran
R = f2
Vibrations horizontales vues en vraie grandeur amplifiées par les leviers optiques
B D
PLAN
⊗ Verticale
Vibrations verticales
S
Collimateur
Verticale
M1
AB
ELÉVATION
M2
Vibrations horizontales
L2
Ecran
Vibrations verticales vues en vraie grandeur amplifiées par les leviers optiques
DC
Profil de l'écran seul lorsque la vibration horizontale est en avance de π/4 radian sur la verticale (Ellipse gauche).
B
A
ωt=π
verticale
ωt=π/4
vibration
horizontale
vibration
D
C

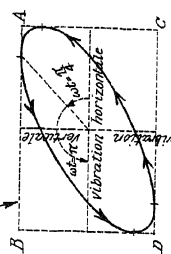



Fig. 33

vraie à tout instant", une figure vectorielle toute prête pour résoudre graphiquement les équations différentielles harmoniques.

N° 46: *Ellipses et autres figures de Lissajous:* Il est indispensable pour comprendre l'optique cristalline, comme pour saisir la combinaison de deux champs électriques ou magnétiques à angle droit l'un de l'autre de connaître les figures de Lissajous et c'est gagner du temps que de les décrire une fois pour toutes en mécanique vibratoire.

Expérience: Reprenons les deux diapasons de la figure précédente, mais au lieu de les faire vibrer tous deux verticalement, *faisons-les vibrer (fig.33) dans des plans perpendiculaires* l'un à l'autre.

Si les deux diapasons avaient exactement la même fréquence *(unisson)*, la tache lumineuse *(spot)* donnerait une ellipse continue immobile en position et d'apparence uniformément lumineuse vu la persistance des impressions lumineuses; mais comme il est très difficile d'obtenir exactement l'unisson, l'ellipse se déformera lentement donnant successivement les aspects que le calcul nous fera prévoir pour des valeurs différentes de la différence de phase entre les deux mouvements sinusoïdaux. En effet, celui qui est le plus lent prendra de plus en plus du retard sur l'autre et présentera successivement les mêmes phases relativement au premier que divers diapasons qui auraient des phases très différentes l'un de l'autre *(et qui auraient eux la même fréquence que le plus rapide)*.

Note 1: Il n'y a pas lieu d'employer un miroir tournant (comme dans le cas des battements) puisqu'ici le spot reçoit des vibrations horizontales aussi bien que verticales *(tandis que dans les battements, les miroirs vibraient tous deux verticalement)*.

Note 2: Si l'un des deux diapasons est chauffé *(après que l'unisson a été réalisé)* comme l'élasticité est fonction de la température, en calculant la durée au bout de laquelle l'ellipse de Lissajous repasse par la même forme, on a la fréquence du "groupe orthogonal" soit la différence des fréquences des deux diapasons tout comme dans le cas des battements ou "groupe parallèle". Et ainsi on a un moyen très élégant et précis de calculer la variation thermique d'élasticité. Nous reprendrons ceci après les cordes vibrantes.

C'est grâce à la persistance des impressions lumineuses sur la rétine que l'on voit toute l'ellipse à la fois au lieu d'un seul spot mobile tournant sur l'ellipse.

Dans la figure 34, nous avons représenté l'ellipse de Lissajous lorsque l'*avance* de la vibration horizontale était *(K étant un entier)*

1) nulle ou 2π ou $K\ (2\pi)$

2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ou $K\ (2\pi) + \frac{\pi}{4}$ ou $(8K + 1)\pi/4$

3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $K\ (2\pi) + \frac{\pi}{2}$ ou $(4K + 1)\pi/2$

4) $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ ou $K\ (2\pi) + \frac{3\pi}{4}$ ou $(8K + 3)\pi/4$

5) $\varphi = \pi$ ou $K\ (2\pi) + \pi$ ou $(2K+1)\ \pi$

6) $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ ou $K\ (2\pi) + \frac{5\pi}{4}$ ou $(8K + 5)\pi/4$

1er cas
φ = 0, 2Kπ...
x = a sin ωt
y = b sin ωt
2ème cas
φ = (8K + 1) π/4
x = a sin(ωt + π/4)
y = b sin ωt
3ème cas
φ = (8K + 2) π/4
x = a sin(ωt + π/2)
y = b sin ωt
4ème cas
φ = (8K + 3) π/4
x = a sin(ωt + 3π/4)
y = b sin ωt
a = 2   b = 3
5e cas
φ = (8K + 4) π/4
x = a sin(ωt + π)
y = b sin ωt
6e cas
φ = (8K + 5) π/4
x = a sin(ωt + 5π/4)
y = b sin ωt
7e cas
φ = (8K + 6) π/4
x = a sin(ωt + 3π/2)
y = b sin ωt
8e cas
φ = (8K + 7) π/4
x = a sin(ωt + 7π/4)
y = b sin ωt

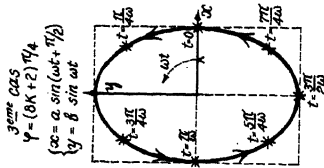
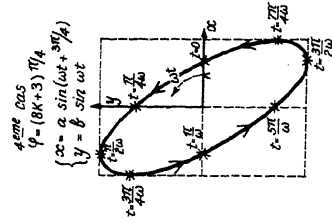
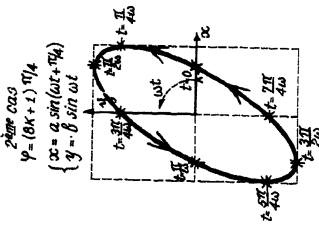
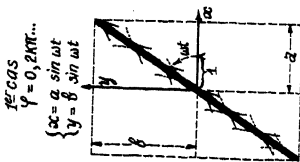
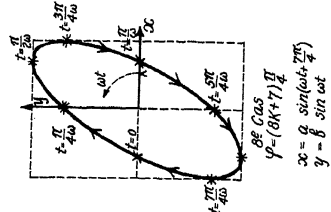
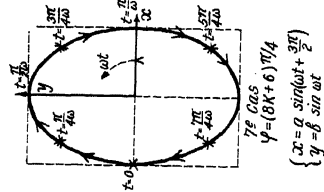
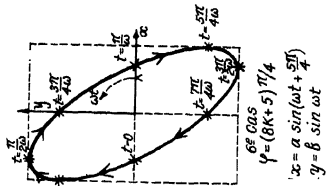
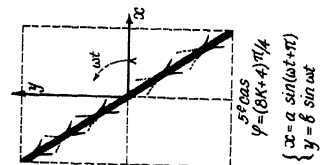



Fig. 34

7) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ou $K(2\pi) + \frac{3\pi}{2}$ ou $(4K - 1)\pi/2$

8) $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ ou $K(2\pi) + \frac{7\pi}{4}$ ou $(8K + 7)\pi/4$

On constatera sans peine qu'à mesure qu'augmente l'avance de la vibration (x) horizontale sur la verticale (y) *(ce que l'on traduit en disant que le retard de phase φ de la vibration verticale croît)*

a) l'ellipse est gauche depuis $\varphi = 0$ *jusqu'à* $\varphi = \pi$ et le grand axe de l'ellipse s'incline progressivement vers la gauche également passant de la première diagonale du rectangle à la seconde diagonale

b) l'ellipse est droite depuis $\varphi = \pi$ *jusqu'à* $\varphi = 2\pi$ et le grand axe de l'ellipse revient vers la droite occuper la position de la première diagonale du rectangle formé par les amplitudes *(élongations maxima)* des deux vibrations.

Cas particulier: lorsque les amplitudes sont égales, a = b, l'ellipse dégénère en circonférence de cercle lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, étant droite *(clockwise)* pour $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ et gauche *(counterclockwise)* pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Autres figures de Lissajous lorsque les fréquences des mouvements sinusoïdaux l'un vertical et l'autre horizontal sont très différentes.

1) si les périodes étaient incommensurables et parfaitement constantes, la courbe du spot lumineux ne se fermerait jamais, il n'y aurait pas de groupe orthogonal, on ne parlerait pas de périodicité résultante

2) supposons que le rapport des fréquences soit commensurable ou comme on dit en acoustique et optique que les deux mouvements sinusoïdaux à angle droit soient les harmoniques d'une même vibration fondamentale,

$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{p}{q}$; p et q étant premiers entre eux.

La période de ce groupe orthogonal *(tout comme celle du groupe parallèle)* est le plus petit commun multiple des périodes individuelles

$$T_{gr.ort.} = q\,T_2 = p\,T_1 = \left\{ T_{\text{groupe parall.}} \right.$$ *(ou période des battements).*

La figure 35 est relative au cas de deux diapasons dont l'un est l'octave de l'autre

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{2}{1} = \frac{T_2}{T_1};\ T_{gr.ort.} = 2\,T_1 = 1\,T_2$$

(la période du plus grave étant double de l'autre, ce dernier accomplit deux cycles pendant que le grave en accomplit une).

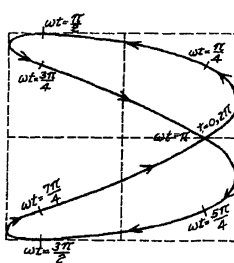
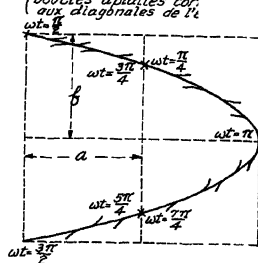
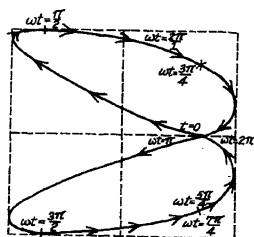
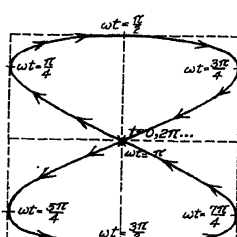
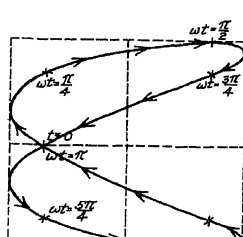
On a toutes les formes intermédiaires à celles de la figure parce qu'il est presqu'impossible d'avoir exactement $\frac{\nu_1}{\nu_2} = 2$, de sorte que tout se passe comme s'ils avaient exactement leurs périodes dans le rapport du simple au double, mais avaient un déphasage variable.

$a = b = 3$ cms.

$T_y = 2\,T_x$: *Constater l'existence de* <u>deux boucles</u> *(si* $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{3}$ *il y aurait 3 boucles)*

Fig. 35

La figure 36 se rapporte au cas où le rapport des fréquences $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ est de 2 à 3. $T_{groupe\ orthogonal} = 3\ T_2 = 2\ T_1$

L'analyse devient impossible lorsque le rapport des fréquences est un rapport formé de deux grands nombres premiers entre eux, la durée de la période résultante dépassant la durée des impressions lumineuses sur la rétine.

Pour avoir une bonne analyse même avec des fréquences simples, il faut avoir des diapasons entretenus électriquement.

Le lecteur est prié à titre d'exercice de faire le tracé des courbes de Lissajous pour p = 1, q = 3; p = 3, q = 4; p=2 q = 5.-

N° 47: *Analyse graphique des courbes périodiques.* Lorsqu'une courbe expérimentale: f(t) présente une périodicité, c'est-à-dire se répète identique à elle-même lorsque l'époque *(t)* augmente d'une durée égale à T "la période du phénomène" ou à un multiple entier de cette période (nT),[avec n entier, (n=1,2,3,4.......)]

soit donc: $f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \ldots\ldots = f(t + nT)$ on sait depuis Fourier développer cette fonction en série de sinus et cosinus ayant pour fréquences celle du phénomène lui même ν et des multiples entiers de cette fréquence fondamentale ν : 2ν, 3ν, 4ν, 5ν, 6ν....

$$f(t) = A_1 \sin\omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + A_4 \sin 4\omega t + \ldots$$

$$+ B_0 + B_1 \cos\omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + B_4 \cos 4\omega t + .$$

Les termes $A_1 \sin \omega t$ et $B_1 \cos \omega t$ constituent *le terme fondamental* qui peut être explicitement réduit à un seul terme en introduisant une phase auxiliaire:

$$A_1 \left(\sin\omega t + \frac{B_1}{A_1} \cos \omega t\right) = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sin (\omega t + \varphi_1)$$

(en effet, en posant $\frac{B_1}{A_1} = tg\varphi_1$*, l'expression* $A_1\left(\sin\omega t + \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\cos\omega t\right)$ *devie*

$$\frac{A_1}{\cos\varphi_1}(\sin\omega t \cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cos\omega t) = \frac{A_1}{A_1/\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \sin(\omega t + \varphi_1) = \sqrt{A_1^2+B_1^2} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

De même en posant $\frac{B_2}{A_2} = tg\ \varphi_2, \ldots\ldots, \frac{B_n}{A_n} = tg\ \varphi_n$, on aurait

$$f(t) = B_0 + \sqrt{A_1^2+B_1^2} \sin(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{A_2^2+B_2^2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \ldots + \sqrt{A_n^2+B_n^2} \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Dans ce développement, B_0 est la *valeur moyenne* de la fonction *(nulle si le phénomène est alternatif)*, le deuxième terme est le *terme fondamental*, les suivants sont dits les *harmoniq* du terme fondamental.

Note 1: (Le lecteur trouvera dans un bon livre de Calcul le moyen d'évaluer analytiquement les amplitudes et les phases d termes du développement. Nous ferons ici une analyse purement graphique, ce qui est la voie la plus générale et la seule à suivre lorsqu'il s'agit de courbes expérimentales et non pas de fonctions bien définies).

Note 2: Toute fonction périodique de l'espace est aussi bien développable qu'une fonction de l'époque, mais n'ayant pas encore rencontré les ondes stationnaires, nous supposerons actuellement avoir affaire à une périodicité temporelle seulement

φ = 0
x = a sin 3ωt
y = a sin 2ωt
t=0
φ = π/4
x = a sin(3ωt + π/4)
y = a sin 2ωt
ωt = 5π/4
ωt = π/4
ωt = π/2
ωt = π
t=0
ωt = 3π/2
ωt = 3π/4
ωt = 7π/4
(boucles aplaties correspondant aux diagonales de l'ellipse)
φ = π/2
x = a sin(3ωt + π/2)
y = a sin 2ωt
0

t=0
t=0
t=0
φ = 3π/4
x = a sin(3ωt + 3π/4)
y = a sin 2ωt
(Boucles aplaties correspondant aux diagonales de l'ellipse)
φ = π
x = a sin (3ωt + π)
y = a sin 2ωt
φ = 5π/4
x = a sin (3ωt + 5π/4)
y = a sin 2ωt

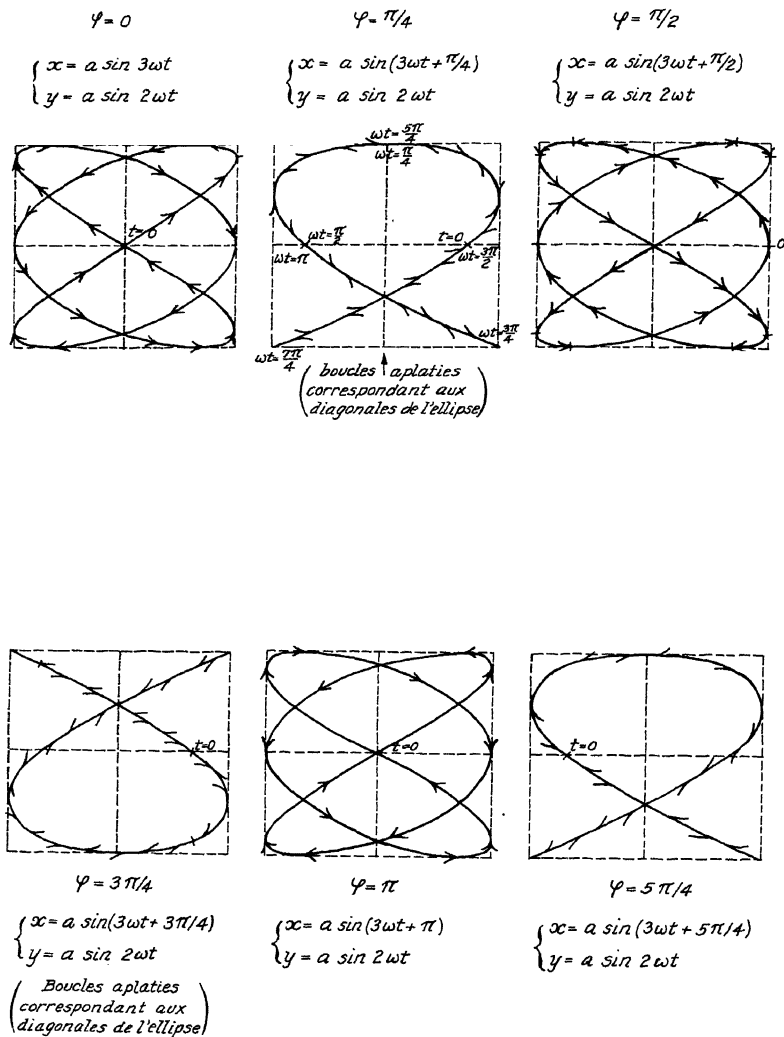



Fig. 36

N° 48. *Remarques permettant de simplifier le travail graphique.*

$\cos(\pi+\alpha) = \cos(\pi-\alpha)$ quel que soit α } *(faites la figure,*
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\pi-\alpha)$ " " " " } *c'est évident).*

Dénotons par $e_{c\alpha}$ la valeur commune a $\cos(\pi+\alpha) = a\cos(\pi-\alpha)$ et par $e_{s\alpha}$ la valeur de a $\sin(\pi-\alpha)$ c'est-à-dire celle de $-a\sin(\pi+\alpha)$.

Désignant par $e_{\pi-\alpha}$ la valeur totale de l'élongation pour $\pi - \alpha = \omega t$
et par $e_{\pi+\alpha}$ la valeur totale de l'élongation pour $\omega t = \pi + \alpha$,
on a

$$e_{\pi-\alpha} = e_{c\alpha} + e_{s\alpha} \qquad\qquad e_{c\alpha} = \frac{e_{\pi-\alpha} + e_{\pi+\alpha}}{2}$$
d'où
$$e_{\pi+\alpha} = e_{c\alpha} - e_{s\alpha} \qquad\qquad e_{s\alpha} = \frac{e_{\pi-\alpha} - e_{\pi+\alpha}}{2}$$

La courbe expérimentale donnant $e_{\pi-\alpha}$ et $e_{\pi+\alpha}$ pour autant de points qu'on le veut; pour toute valeur de α, on peut ainsi séparer la *partie de l'élongation due aux termes sinusoïdaux* de l'autre partie *(B_0 est englobé avec les termes en cosinus parce qu'une constante, tout comme un cosinus, ne change pas de signe quand α change de signe).*

En opérant ainsi *(fig.37)* on s'aperçoit que la *série sinusoïdale:* $A_1\sin\omega t + A_2\sin 2\omega t + A_3\sin 3\omega t + \ldots$ admet *le point* $\omega t = \pi$ sur l'axe des époques pour *centre de symétrie* et que *la série paire:* $B_0 + B_1\cos\omega t + B_2\cos 2\omega t + \ldots$ admet la *droite* $\omega t = \pi$ pour *axe de symétrie.*

On peut aller plus loin dans cette voie et séparer par un dédoublement analogue $A_1\sin\omega t + A_3\sin 3\omega t + A_5\sin 5\omega t \ldots$ de: $A_2\sin 2\omega t + A_4\sin 4\omega t + \ldots$ et de même isoler
$B_1\sin\omega t + B_3\sin 3\omega t + B_5\sin 5\omega t \ldots$ de $B_0 + B_2\sin 2\omega t + B_4\sin 4\omega t + \ldots$

En effet, tous les termes en sinus impairs *(et par suite leur somme)* admettent pour *axes* de symétrie les droites

$\omega t \quad \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots (2K+1)\frac{\pi}{2}$ *(et pour centres de symétrie sur l'axe des époques les points:* $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots 2K(\frac{\pi}{2})$*)*

De même *tous les termes en sinus pairs* et par suite leur somme n'admettent que des *centres de symétrie sur l'axe des époques:*

$$\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots, k\frac{\pi}{2}$$

On peut donc autour des axes $\omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots (2K+1)\frac{\pi}{2}$ opérer pour la séparation de la partie impaire des sinus de la partie paire de la même manière qu'on a opéré pour séparer en sinus et cosinus autour des axes $\pi, 3\pi, \ldots (2K+1)\pi$

Désignant par $e_{s\,t,\frac{\pi}{2}-\alpha}$ $\quad e_{i,\frac{\pi}{2}-\alpha}$ $\quad e_{s\,p,}$

élongation sinus	élongation sinus impairs	élongation sinus pairs
$e_{s\,t,\frac{\pi}{2}+\alpha}$	$e_{s\,i,\frac{\pi}{2}+}$	$e_{s\,p,\frac{\pi}{2}+\alpha}$

(Σ sinus + Σ cosinus)
(Σ cosinus)
(Σ sinus)
ωt = 0
ωt = π/2
ωt = π
ωt = 3π/2
ωt = 2π
ωt = 5π/2
π − α
π
π + α
Σ sinus
Σ cosinus
Courbe expérimentale —— (dont les élongations sont seules indiquées)

Fig. 37

comme $e_{s\ i,\ \frac{\pi}{2}-\alpha} = e_{s\ i,\ \frac{\pi}{2}+\alpha}$ et $e_{s\ p,\ \frac{\pi}{2}-\alpha} = -e_{s\ p,\ \frac{\pi}{2}+\alpha}$

$$e_{s\ i,\ \frac{\pi}{2}-\alpha} = e_{s\ i,\ \frac{\pi}{2}+\alpha} = \frac{1}{2}(e_{s\ t,\ \frac{\pi}{2}-\alpha} + e_{s\ t,\ \frac{\pi}{2}+\alpha}$$

$$\text{et } e_{s\ p,\ \frac{\pi}{2}-\alpha} = -e_{s\ p,\ \frac{\pi}{2}+\alpha} = \frac{1}{2}(e_{s\ t,\ \frac{\pi}{2}-\alpha} - e_{s\ t,\ \frac{\pi}{2}+\alpha}$$

Quant à la série paire *(ou des cosinus)*, les termes harmoniques *pairs* n'admettent que des *axes de symétrie* $\omega t = 0, \pi/2, \pi, k\pi/2$...alors que les harmoniques impairs admettent à la fois des axes de symétrie $\omega t = 0, \pi, \ldots (2k)\pi/2$ et des *centres* de symétrie situés sur l'axe des epoques $\omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots (2k + 1)\frac{\pi}{2}$.

En opérant comme précédemment avec la courbe cosinusoïdale *(de la figure 37)* autour des droites $\omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ on séparera donc la suite des harmoniques cosinus impairs de celle des cosinus pairs; *(voir par exemple les illustrations de:Shea "Transmission Networks and Wave Filters", pages 382 à 387)*

Nous avons ainsi quatre courbes au lieu de la courbe expérimentale *(qui est leur superposition algébrique évidemment)*.

1) $A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t + A_5 \sin 5\omega t + \ldots$ *(fig.38A)*
2) $A_2 \sin 2\omega t + A_4 \sin 4\omega t + A_6 \sin 6\omega t + \cdots$ *(fig.38B)*
3) $B_1 \cos \omega t + B_3 \cos 3\omega t + B_5 \cos 5\omega t + \cdots$ *(fig.39A)*
4) $B_0 + B_2 \cos 2\omega t + B_4 \cos 4\omega t + \cdots$ *(fig.39B)*

Il nous faut maintenant *"moduler"* chacune de nos ondes 1, 2, 3, 4 pour séparer chacun des termes des quatre séries.

N° 49: *Rappel de formules de trigonométrie utiles en modulation.*

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \quad ,$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \quad ,$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}[1 - \cos 2a]$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}[1 + \cos 2a]$$

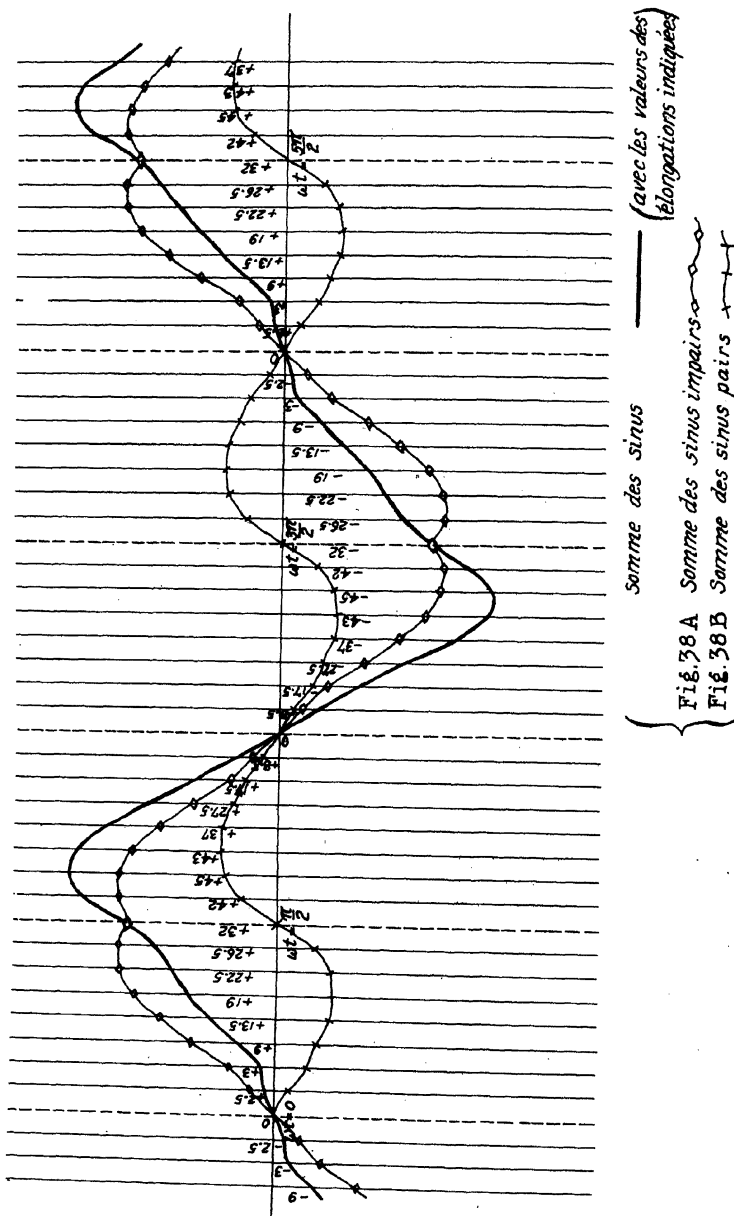
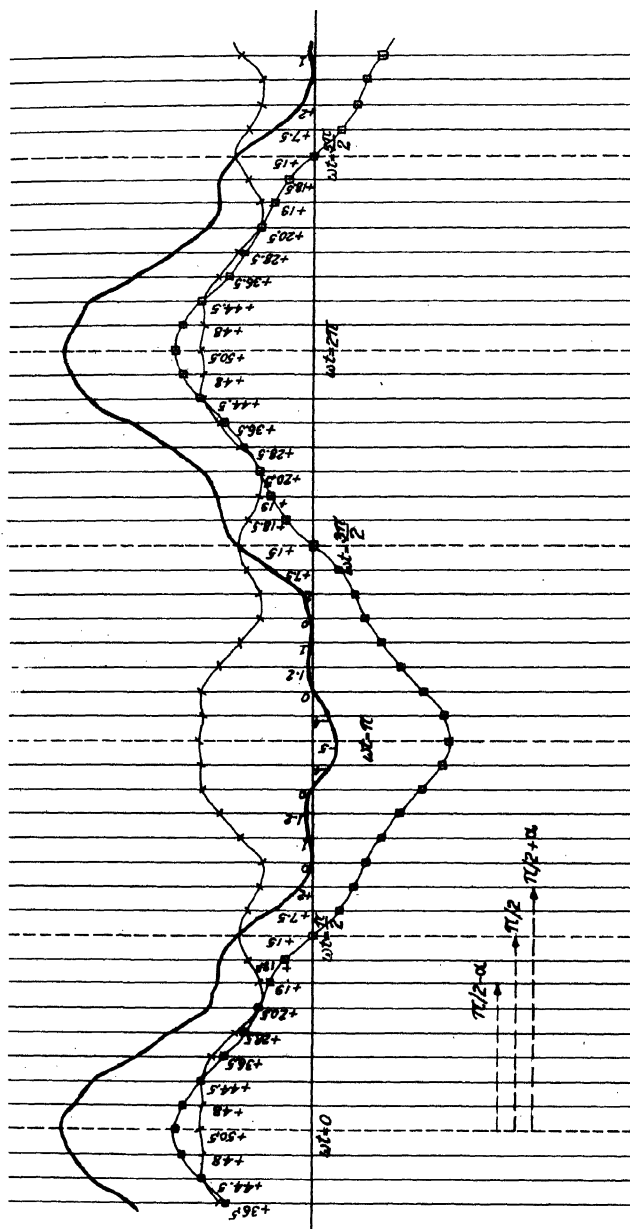
(ces formules sont dans tout livre de trigonométrie).

N° 50: *Fonctions primitives des sinusoïdes et leur variation.*

On appelle *fonction primitive ou intégrale indéfinie* de la fonction $y = \sin mt$ une autre fonction I telle que la dérivée de I par rapport à l'époque soit justement la fonction $y = \sin mt$ *(revoir dans le livre de calcul la définition de la dérivée)*.

Par définition $I = \int \sin(mt).dt$ est donc une fonction telle que

$$\frac{\text{variation de } I}{\text{variation d'époque } t} = \frac{dI}{dt} = \sin(mt)$$

Somme des sinus (avec les valeurs des élongations indiquées)
Fig. 38 A Somme des sinus impairs
Fig. 38 B Somme des sinus pairs

wt=0
wt=π/2
wt=π
wt=3π/2
wt=2π
wt=5π/2
π/2-α
π/2
π/2+α
Somme des cosinus (pairs et impairs) avec la valeur des élongations.
Fig. 39 B Somme des cosinus pairs
Fig. 39 A Somme des cosinus impairs

Intégrales définies :
1) Aire OMPO (positive)
$\int_{x=0}^{x=10} y\,dx = -\frac{1}{3}(10^3-0^3)+\frac{10}{2}(10^2-0^2)$
$= \frac{500}{3} = I_1$
2) Aire PSN (négative)
$\int_{x=10}^{x=13} y\,dx = -\frac{1}{3}(13^3-10^3)+\frac{10}{2}(13^2-10^2)$
$= -54 = I_2$
3) Aire OMPSNPO
$\int_{x=0}^{x=13} y\,dx = -\frac{1}{3}(13^3-0^3)+\frac{10}{2}(13^2-0^2)$
$= +112\frac{2}{3} = I_3$
$I_3 = I_1 + I_2$
$112\frac{2}{3} = 166\frac{2}{3} - 54$
$y = -x^2 + 10x$
$\Delta A = y \cdot \Delta x$
$\frac{\Delta A}{\Delta x} = y = -x^2 + 10x$
Intégrale indéfinie $A = -\frac{x^3}{3} + \frac{10x^2}{2} + c$
(fonction primitive de y)
y
M
B
C
ΔA
A
O
E
D
P
N
S
x
x + Δx
x=5
y=25
x=10
x=13
+
−
1
10
0
1
2
3

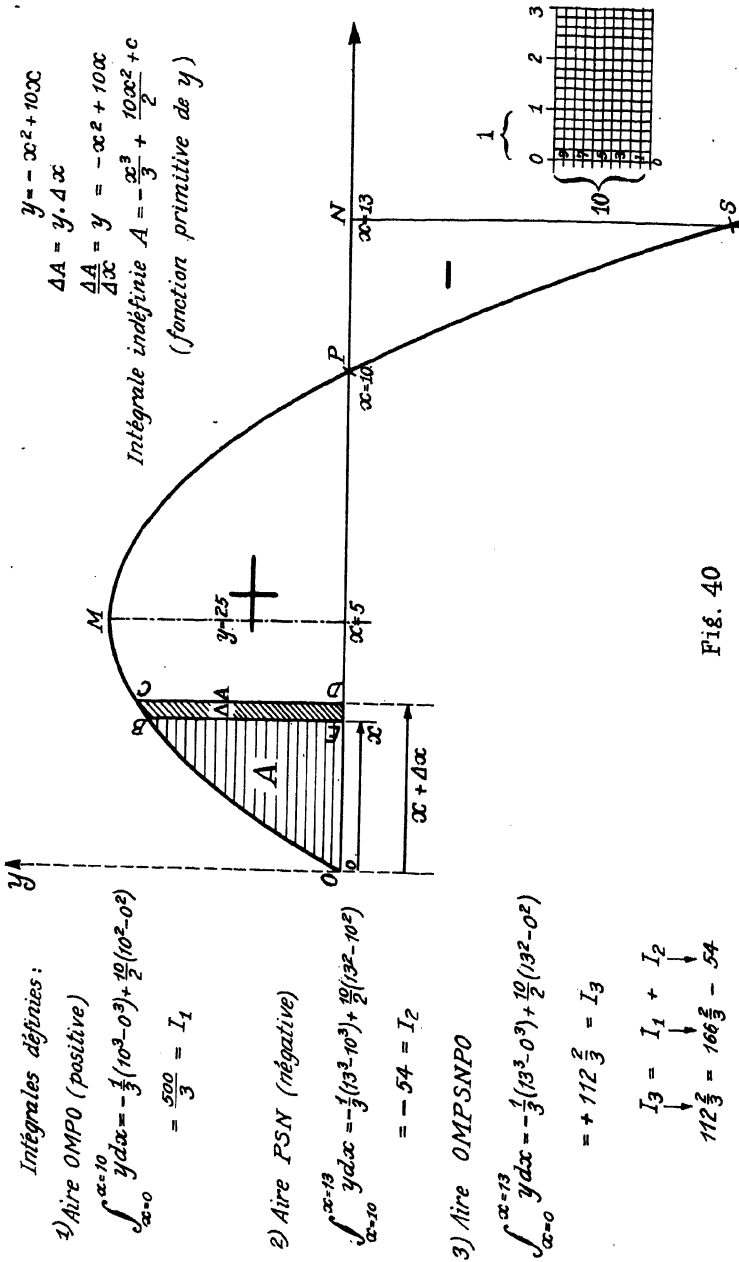



Fig. 40

On voit immédiatement que $I = -\frac{1}{m} \cos (mt) + c$; *(c étant une constante quelconque satisfait à la définition (constatez-le après dérivation).*

Ils s'agissait là d'une intégrale dont les limites n'étaient pas spécifiées.

On appelle *intégrale "définie"* ou *"variation de la fonction primitive"* ce dont elle varie entre des limites données t et t+T

$(I_{t+T}) - (I_t) = \int_t^{t+T} \sin (mt).dt$ est donc la différence des valeurs de la primitive entre les limites d'intégration $(I_{t+T}) - (I_t) = -\frac{1}{m}\left[\cos m (t + 2\pi) - \cos (mt)\right] + (c-c) = 0$

Cette *variation est évidemment nulle puisque le cosinus repasse par les mêmes valeurs au bout d'une durée égale à la période* ou à un nombre entier de périodes *(il n'en serait pas de même si la durée qui sépare les limites était moindre qu'une période).*

De même $J = \int \cos (mt).dt$ serait une fonction

J telle que $\frac{dJ}{dt} = \cos (mt)$; d'où $J = \frac{1}{m} \sin (mt) + c$

et pour la même raison la *variation de J pendant un nombre entier de périodes serait nulle.*

N° 51: *Interprétation graphique de l'intégrale définie en admettant comme intuitive la notion d'aire (fig.40).*

Appelant A l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses x, aire positive vers le haut et négative vers le bas, si nous donnons un accroissement Δx à l'abscisse, il en résulte pour l'aire un accroissement $\Delta A = y \cdot \Delta x$ *(aire du trapèze mixtiligne BGDE)*, aire qui augmente donc lorsque y est positif et diminue si y est négatif (Δx *étant positif).*

On voit donc que l'*ordonnée de la courbe (y)* est la *dérivée de l'aire relativement à l'abscisse* $(\frac{\Delta A}{\Delta x})$

Ou inversement que l'intégrale indéfinie de la fonction y est l'aire de la courbe entre deux ordonnées quelconques *l'intégrale définie étant au contraire l'aire délimitée par la courbe et l'axe des abscisses entre deux ordonnées fixées. Ex:* x = 0 et x = 10 *(premier cas);* x = 10 et x = 13 *(deuxième cas);* x = 0 et x = 13 *(troisième cas).*

Chercher la primitive analytiquement ou *évaluer la différence des aires* supérieures*(positives)* et inférieures *(négatives)* c'est un seul et même problème plus intuitif dans le second cas.

N° 52: *Moyen d'évaluer l'étendue des aires:*

1) les décalquer sur papier quadrillé, compter le nombre de petits carrés et fraction de carré, puis *tenant compte des échelles* du dessin, évaluer l'aire représentée sur le papier.

Sur la figure 40, chaque petit carré de l'échelle vaut(1/5) mm en largeur et (1mm) en hauteur, donc "1/5 mm² en aire"; il faudrait donc diviser le nombre de petits carrés par 5 pour avoir l'aire en mm² *(de la différence entre les petits carrés au-dessus de Ox et ceux au-dessous de Ox).*

2) par planimétrage *(voir le Cours d'Arpentage).*

3) avec la balance en pesant les aires découpées et en les comparant à un carré du même papier d'à peu près le même poids.

N° 53: *Calcul de l'un des coefficients par "modulation".*

Supposons que nous voulions connaître A_2 *(le coefficient de sin 2ωt)*; A cette fin, "modulons" la série partielle Sp *(sinus pairs)*

$$Sp = A_2 \sin 2\omega t + A_4 \sin 4\omega t + A_6 \sin 6\omega t + \cdots + A_{2n} \sin 2n\omega t + \cdots$$

en formant le produit sin 2ωt (Sp) et en intégrant pour toute une période·

$$(\sin 2\omega t)Sp = A_2 \sin^2 2\omega t + A_4 \sin 2\omega t \sin 4\omega t + A_6 \sin 2\omega t \sin 6\omega t + \cdots$$

En vertu des formules du N°49, ceci peut s'écrire

$$(\sin 2\omega t)Sp = \left(\frac{A_2}{2} - \frac{A_2}{2}\cos 4\omega t\right) + \frac{A_4}{2}(\cos 2\omega t - \cos 6\omega t) + \frac{A_6}{2}(\cos 4\omega t - \cos 8\omega t) +$$

$$+ \left(\frac{A_8}{2}(\cos 6\omega t - \cos 10\omega t) + \cdots + \frac{A_{2n}}{2}\left[\cos 2(n-1)\omega t - \cos 2(n+1)\omega t\right] +\right.$$

Si nous *intégrons* maintenant *pour une période complète,*

$$\int_t^{t+T} (\sin 2\omega t)(Sp).dt = \frac{A_2}{2}(t+T-t) = \frac{A_2 T}{2}$$

En effet, lorsque (sinωt) ou (cosωt) accomplissent *une période complète,* cos 2ωt et son intégrale $\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}$ accomplissent *deux périodes entières*; cos 4ωt et son intégrale $\frac{\sin 4\omega t}{4\omega}$ parcourent *quatre périodes* complètes, cos 6ωt et son intégrale effectuent *six périodes* et ainsi de suite, de sorte que les intégrales des cosinusoïdes *reprenant les deux mêmes valeurs aux deux limites d'intégration* seul le terme ($A_2/2 \cdot T$) subsiste dans la totalisation.

Ce que l'on peut écrire

$$A_2 = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} (\sin 2\omega t)\ Sp\ .\ dt$$

Il ne reste qu'à *construire point par point sur du papier quadrillé* la courbe y = (sin 2ωt) (Sp), ce que l'on appelle *"moduler la courbe Sp"* par la "modulante sin 2ωt".

Planimétrant ou pesant le papier délimité par les boucles ou encore comptant les petits carrés, on aura l'intégrale du second membre et par suite A_2 *(qui est la hauteur moyenne de la fonction modulée par sin 2ωt).*

Note 1: Pour avoir tout autre coefficient A_4 par exemple, il suffit de prendre pour modulante sin 4ωt au lieu de sin 2ωt.

Note 2: Pour avoir un coefficient B_5 d'une autre série, il suffit de moduler C_I *(cosinus impairs)* par la modulante cos5ωt

Note 3: Le seul terme qui s'obtient sans moduler la série à laquelle il appartient est le terme B_0 *(ou hauteur moyenne)*

$$B_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}(B_0 + B_2 \cos 2\omega t + B_4 \cos 4\omega t + \ldots)\ dt$$

Note 4: En électricité, le procédé équivalent à ce calcul les coefficients *(procédé qui a fourni le mot "moduler")* consiste à "moduler" l'onde par une autre onde d'amplitude unité.

amplitudes
A
B
C
D
N
P
S
T
W
X
M
Q
R
U
V
Y
Z
1
Obscurité totale
Passage du milieu d'une aile pleine (dent).
Maximum de lumière (entre deux dents).
époques t
(1) courant en éclairage continu variant suivant le mouvement des personnes circulant entre la source et la cellule photoélectrique.—
(2) effet modulateur du disque sur une lumière (unité d'amplitude).—
(3) partie de la courbe (1) conservée intégralement lors du maximum de lumière (entre 2 dents).—
(4) " " " " (1) supprimée entièrement lors de l'interception totale de la lumière par (une dent du disque).
(5) Le zigzag MNPQRSTUVWXYZ... est le courant « modulé » qui affecte le transformateur tout comme un courant alternatif.

Fig. 41

Le plus facile *à saisir* des exemples de modulations est le suivant sur les développements duquel nous reviendrons en photoélectricité.

Une lumière à *éclairage continu* éclairant une cellule photoélectrique *produirait dans le circuit* un courant proportionnel à l'intensité lumineuse et les variations du courant seraient disons pour fixer les idées la courbe ABCD avec un minimum en B et un maximum en A *(ces variations lentes étant dues à la densité de la foule entre la lumière et la cellule photoélectrique).*

Un tel courant de si *basse fréquence* ne peut actionner un transformateur et pour avoir un courant qui puisse actionner un transformateur *il faut éclairer de façon discontinue (par exemple en interposant un disque tournant, avec secteurs alternativement pleins et évidés, entre la source continue de lumière et la cellule photoélectrique).*

On transforme ainsi la courbe continue ABCD en la courbe zigzaguée et le courant peut être alors aisément amplifié *(car il agit sur un transformateur comme un courant alternatif).*

On dit que la courbe **zigzaguée** est la *modulée de la courbe continue;* le disque ajouré étant le modulateur. *(fig.41).*

Quelques problèmes touchant ce chapitre III seront indiqués après le chapitre IV lorsque, ayant vu l'Elasticité et les oscillations forcées, il sera possible de donner des cas moins schématiques. En troisième année, de nombreuses applications seront faites en optique physique.

CHAPITRE IV

Statique et dynamique de l'élasticité plane

SOMMAIRE: Effort unitaire et déformation unitaire.- Modules d'Young pour l'extension et la compression- Moment fléchissant. Angle total de flexion pour toute la poutre.- Fatigue maximum.- Module de Coulomb pour le glissement. Couple de torsion pour un cylindre plein.- Equation de la fibre neutre d'une poutre prismatique.-Flèche.- Coefficient de Poisson ,-Relation entre les constantes élastiques et le coefficient volumique de compression uniforme.- Effort tranchant; l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant.- Oscillations d'un diapason.- Oscillations d'un fil de torsion.- Vibrations harmoniques des systèmes à un degré de liberté. Méthode énergétique pour les étudier. *(Vibrations libres et forcées). (Des compléments d'Elasticité seront* ***donnés*** *en 3e année comme introduction à la Photoélasticité; à ce moment, les principes de ce chapitre auront été appliqués dans le Cours de Résistance des Matériaux).*

N° 54: Qu'il s'agisse de compression *(fluides, maçonnerie, colonne en fer ou en bois)*, [*ou qu'il s'agisse d'extension (cordes, câbles, poulies)*] on appelle *effort unitaire: (stress) la pression* [*ou la traction*] *par unité d'aire normale*: $\mathbf{F} \div a$ *(F étant // à la normale à la section d'aire:a)*; et d'autre part, le quotient du raccourcissement *(en compression)* [*ou de l'allongement (en extension)*] **divisé** par la longueur initiale se nomme raccourcissement unitaire [(ou allongement unitaire]; *(strain)* : $\Delta l \div l$

Lorsque l'effort unitaire a cessé, si la déformation unitaire cesse **également** *(le corps reprenant sa forme initiale)*, on dit *ne pas avoir dépassé la limite d'élasticité*. Nous supposerons qu'il en est toujours ainsi, qu'il n'y a *pas de déformation permanente* et que les *petites déformations* que nous traiterons sont *linéaires*, ***réversibles*** *et superposables*.

Lois de Hooke: 1) les petites déformations sont ***proportionnelles*** aux forces qui les produisent

$$\mathbf{E}\ (\textit{module d'Young}) = \frac{\mathbf{F}\ \text{effort de traction}\ (\textit{ou de compression})}{\Delta l\ \text{allongement}\ (\textit{ou raccourcissement})} \div \frac{\div a\ (\textit{section droite normale à l'effort})}{\div l\ (\textit{longueur initiale})}$$

$$\mathbf{E}\ (\textit{Young modulus}) \quad \frac{\text{stress}\ (\textit{effort par unité d'aire normale})}{\text{strain}\ (\textit{déformation de la longueur unité})}$$

l'existence d'un module d'Young pour les allongements et les

$$3)\quad \vec{x} \times \downarrow mg = \mathbb{C}$$

$$4)\quad \mathbb{C}' = \sum_{z=-Z}^{z=+Z} \frac{E}{\rho} z^2 . da$$

$$5)\quad \mathbb{C} + \mathbb{C}' = 0$$

soit: $mg\,x = \frac{EI}{\rho}\ ;\ I = \iint z^2 . da$

Fig. 42

écrasements traduit la première loi *(de proportionnalité)* de Hooke. *(Nous verrons plus loin que cette première loi est valable pour les efforts tangentiels et se trouve traduite par l'existence d'un module de Coulomb)*

2) les petites déformations *changent de sens sans changer de grandeur* si le sens de l'action change *(ceci est vrai plus ou moins pour les métaux qui travaillent aussi bien à l'extension qu'à la compression, qui ont le même module d'Young pour la traction que pour la compression)*

3) plusieurs déformations infiniment petites produites *simultanément* coexistent sans modification et par suite *ajoutent algébriquement leurs effets (propriété des équations linéaires).*

Note: Pour évaluer la section droite (a) d'un fil ou d'un ruban, on en pèse une grande longueur et l'on cherche la densité

$$a = \frac{\text{grammes}}{(\textit{densité})(\textit{longueur})}$$

Le module d'Young s'exprime en $\frac{\text{livres}}{(\text{pied})^2}$ ou en $\frac{\text{dynes}}{(\text{cm})^2}$, il a donc *les dimensions d'une pression [étant le quotient d'une pression positive ou négative par un nombre pur (rapport $\Delta l/l$*

Le fer forgé ou l'acier ont $E = 3\times10^7 \frac{\text{lbs}}{(\text{inch})^2}$ soit donc:

$$E_{F.S.S.} = 432\times10^7 \frac{\text{lbs}}{(\text{foot})^2}, \text{ et } E_{C.G.S.} \doteq 2\times10^{12} \frac{\text{dynes}}{(\text{cm})^2}$$

N° 55: *Moment fléchissant (dans le cas rudimentaire d'une poutre encastrée (à un bout) et d'une seule force appliquée à l'extrémité libre: fig.42).*

Hypothèses générales admises en élasticité élémentaire

a) Toutes les forces *(ici $\mathbf{F} = m\,\mathbf{g}$)* doivent être dans le plan de symétrie de la poutre, les réactions s'y trouvent aussi.

b) La fibre neutre, lieu des centres de gravité des sections droites, a une *longueur invariable* et sa pente sur l'horizontale est négligeable.

c) Les sections droites restent normales à la fibre neutre, les sections successives passant par le centre de courbure de l'arc de fibre neutre si on les prolonge suffisamment.

Note: Dans la figure 42, on a exagéré notablement la courbure pour rendre plus visible les déformations.

Considérons une tranche de poutre SBB'S' après déformation. *La partie supérieure a été étirée et la partie inférieure comprimée.* Nous supposerons qu'il s'agisse d'un matériau qui travaille aussi bien à la compression *(à la base)* qu'à l'extension *(au sommet)*. [*Autrement, nous devrions "armer" en mettant des barres de fer à la partie supérieure, s'il s'agissait de béton qui n'est bon qu'à la compression*] .

Le long de la fibre neutre, le tronçon SBB'S' a pour longueur

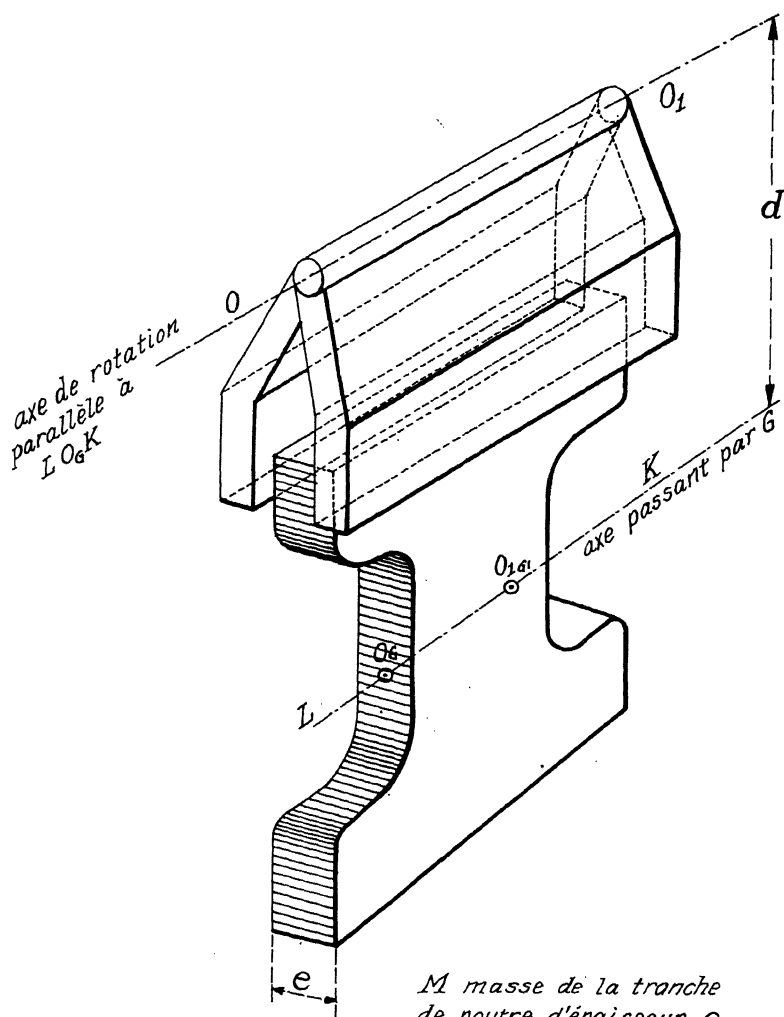
$dx = \rho\, d\theta$ *(longueur toujours la même: dx avant comme après déformation; avant déformation $d\theta$= zéro, mais ρ= indéfini).*

O
O1
d
axe de rotation
parallèle à
L O_G K
K
axe passant par G
O1G1
OG
L
e
M masse de la tranche
de poutre d'épaisseur e
montée en pendule composé.
I = I OG, O1G1 D e
moment superficiel
moment d'inertie
∫∫da.r² = ∫∫dm.r² ÷ densité épaisseur

Fig. 43

A la distance z au-dessus de la fibre neutre, il y a allongement; la fibre étirée a pour longueur

$$dx + \Delta(dx) = (\rho + z)\, d\theta$$

Donc, l'allongement absolu est

$$\Delta(dx) = z\, d\theta$$

et *l'allongement relatif (ou unitaire)* est

$$\frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{z\,d\theta}{dx} = \frac{z\, d\theta}{\rho\, d\theta} = \frac{z}{\rho} \quad \textit{(strain)}$$

L'effort unitaire de traction **N** *(stress)* est donc *(première loi de Hooke)*

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{F}}{a} = \mathrm{E}\ \textit{(module d'Young)}\ \frac{\mathbf{z}}{\rho}$$, pour toute *aire unité* située à la distance z au-dessus de la fibre neutre: telle que les parties de (da) (1,2,3,4) vues en vraie grandeur dans le profil de la section droite, l'effort est Ez/ρ

La force de traction que subit le dit élément d'aire (da) est donc

$$\mathbf{N}\ da = E\,\frac{z}{\rho}\, da$$ et si l'on convient de fixer le sens des efforts ***exercés** par la partie de gauche de la poutre*(donc *soufferts par la partie de droite),* cette force aura le sens marqué par les flèches de l'élévation *(où elle est vue en vraie grandeur)* et du profil où les sens sont marqués ⊗ et ⊙

Prenons pour axe des couples l'axe LOK normal au plan de flexion de la poutre *(plan déterminé par les positions successives de la fibre neutre),* axe qui en élévation se projette suivant le point O.

Le couple de réaction élastique *(moment antifléchissant)* est le produit vectoriel de **z** *(bras de levier)* par la force **N** da

$$⊙ d\mathcal{C}_{e} = \uparrow \mathbf{z} \times \overleftarrow{\mathbf{N}\ da} = \mathbf{E}\ (da)\ \mathbf{z}^2 \frac{1}{\rho}$$

Pour toutes les tranches parallèles à:da *(parallèles à l'axe LK et perpendiculaires à la fibre neutre),* tranches dont se compose la section droite, les couples de réaction élastique actués par la partie de gauche de la poutre ont *la même direction et le même sens:* en effet, pour une tranche inférieure telle que da' (1'2'3'4') la force **N'** da' est bien de sens opposé à celui de **N** da, mais son bras de levier **z'** est également de sens opposé à celui de z de sorte que les produits vectoriels ont des axes parallèles et de même sens.

$$\mathcal{C}_{a.f.} = \downarrow \mathbf{z}' \times \overrightarrow{\mathbf{N}'da'}$$

*Cette remarque est indispensable pour pouvoir appliquer à la sommation des axes le calcul infinitésimal; ce calcul ayant été **développé** pour les scalaires, on ne le pourrait appliquer à des vecteurs ou axes qui ne seraient pas **parallèles**).*

Pour toutes ces tranches, lors de la totalisation des couples élastiques pour toute la section-droite, on peut mettre en facteur (E/ρ). Par hypothèse, le matériau dont il s'agit ici travaille aussi bien à la compression qu'à l'extension *(E même pour le bas que pour le haut)* et les sections droites restant normales à la fibre neutre, la courbure $\frac{1}{\rho}$ est la même partout dans une même section droite.

couple élastique total $\odot \frac{E}{\rho} \ldots z^2 . d = \odot \frac{E I}{\rho}$

On appelle souvent $I = \iint z^2 . da$ "le moment d'inertie *(superficiel)* de la section. C'est une quantité géométrique qui ne dépend que de la forme et des dimensions de la section et non pas de la nature du matériau ou des charges appliquées.

Pour éviter toute confusion, nous appellerons ici la quantité I le *"moment superficiel de la section droite"*, car il n'y a aucune parenté entre un moment d'inertie et cette quantité I.

Un "moment superficiel de section droite" a les dimensions du *carré d'une aire (pieds)^4 ou (cms)^4;* alors qu'un moment d'inertie a les dimensions *d'une aire par une masse* slug (pieds)^2 ou gramme (cms)^2

Si l'on découpe une tranche de poutre de faible épaisseur uniforme e, on a affaire à un volume e.a *(épaisseur)x (aire)* et si le matériau a une densité D, on pourra calculer *(fig.43) le moment d'inertie de cette tranche relativement à un axe $O_6 O_{16}$, en la faisant osciller autour de cet axe (voir Nº 10).* Si la substance est friable et qu'on ne puisse la fixer par la région médiane, on l'emboîtera par la tête et, calculant $I_{O O_1}$ on déduira $I_{O_6 O_{16}}$ en appliquant le théorème de Huyghens *(d étant la distance entre les axes parallèles).*

$$I_{O_6 O_{16}} = I_{O O_1} - M d^2$$

Pour avoir le moment superficiel de la section, il suffira de diviser le moment d'inertie par D e *(produit densité x épaisseur).*

$$I = \iint z^2 . da = \left[(m \ \lambda^2 + \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} - M d^2 \right] \frac{}{D e}$$

$$\text{slug (pied)}^2 \frac{}{\text{slug (pied)}^3 \text{ pied}} = (\text{pied})^4$$

Le lecteur trouvera dans les formulaires le moyen de calculer graphiquement ou analytiquement le moment superficiel que nous avons évalué physiquement avec les notations du Nº10.

Equilibre des couples: La poutre cesse de se déformer lorsque le couple gravifique fléchissant ou *moment fléchissant* égal au produit vectoriel du bras **x** par la force **mg** est compensé par le couple de réaction élastique qui tend à s'opposer à la déformation

$$(x \times \downarrow m g) + \mathbb{C}_{antih} \odot \frac{E I}{\rho} = 0$$

soit algébriquement $mg \ x = \frac{E I}{\rho}$

C'est pour avoir une valeur notable pour I à quantité égale de matière que les poutres sont en forme d'H; la matière est ramassée où z prend de grandes valeurs.

Cette formule montre que plus x est grand *(plus on se rapproche de l'encastrement)*, plus la courbure est grande; c'est donc au *droit de l'encastrement* qu'aura lieu la *fatigue maximum.*

N° 56: *Angle total de flexion pour toute la poutre.*

C'est l'angle que forment après déformation la section encastrée et la section libre *(voir fig.42)*.

Pour l'arc dx, l'angle de flexion est $d\theta$, dextrorsum*(clockwise)*

$$\circledcirc\ d\,\theta = \frac{dx}{\rho}$$

, substituant à ρ son expression en fonction du couple fléchissant, du module d'Young et du moment superficiel de la section

,l'angle a pour différentielle

$$\frac{m\ g}{E\ I}\ x\ dx = \frac{mg}{2EI}\ d\ (x^2)$$

et comme pour toutes les portions en lesquelles se décompose la la fibre neutre, toutes les rotations élémentaires sont des axes parallèles à $d\theta$ et du même sens que $d\theta$ nous pourrons appliquer le calcul infinitésimal *(scalaire)* et l'angle total de flexion sera

$$= \int_{x=0}^{x=l} \otimes d\,\theta = \frac{mg}{EI} \int_{x=0}^{x=l} x.\,dx = \frac{mg}{EI}\ \frac{l^2}{2}$$

Pour une même force appliquée, *l'angle total de flexion* est donc *proportionnel au carré de la longueur de la poutre [toutes choses égales par ailleurs: même matériau (E) et même moment superficiel de section (I)]*

N° 57: *Fatigue maximum (ou maximale).* Le maximum de fatigue de la poutre fléchie a lieu pour la section où le *couple fléchissant est maximum (donc à l'encastrement où le couple vaut : ($l\ m\ g\downarrow$).*

Mais dans la section encastrée elle-même, les fibres qui sont à la hauteur du centre de gravité *(fibres neutres)* ne travaillent pas, la fatigue maximum *(plus grande traction unitaire ou plus grande compression unitaire)* est donc demandée *aux fibres qui sont les plus éloignées de la fibre neutre.*

Soit Z la distance à la fibre neutre *des fibres qui en sont le plus éloignées,* on a pour expression de l'effort unitaire N:

$N = E\frac{\Delta l}{l}$ *(définition du module d'Young Nº 54)*

D'autre part l'allongement unitaire à la distance Z de la fibre neutre est: $\frac{\Delta l}{l} = Z\ \frac{d\theta}{dx} = (Z \div \rho)$; *(Nº 55 allongement relatif).*

Et le couple élastique antifléchissant est donné par

$$\circledcirc \mathbb{C} = E\ I\ \frac{d\theta}{dx} = E\ I \div \rho$$

Combinant ces trois formules, éliminant $\frac{\Delta l}{l}$ *(strain)* et ρ *(rayon de courbure),* il vient pour *la fatigue unitaire maximum*

$$N_{maximum} = E\ \frac{\Delta l}{l} = E\ Z \div \rho = \frac{E\ Z\mathbb{C}}{E\ I} = \frac{\mathbb{C}}{I \div Z}$$

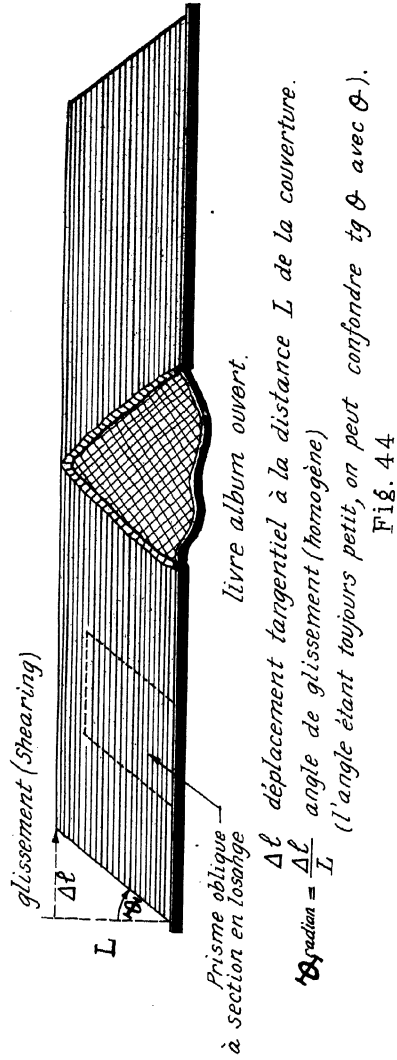
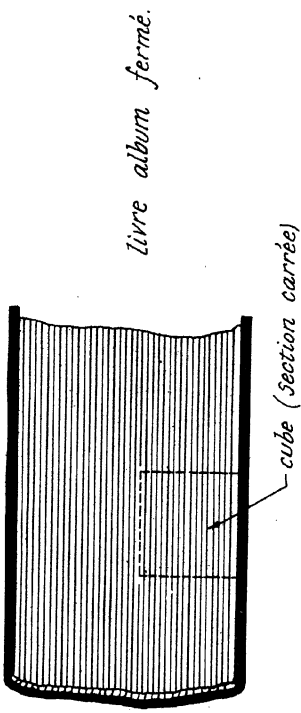
$$N_{maximum} = \frac{\mathbb{C}\text{moment fléchissant maximum}}{I{\div}Z\ \ \text{module de section pour la flexion}} = \frac{l\ m\ g\ Z}{I}$$

Cette fatigue unitaire maximum désignée par R dans les formulaires français est de 12 kilogrammes par millimètre carré pour l'acier, soit

$\Delta \ell$ déplacement tangentiel à la distance L de la couverture.

$\theta_{radian} = \frac{\Delta \ell}{L}$ angle de glissement (homogène)

(l'angle étant toujours petit, on peut confondre $tg\,\theta$ avec θ).

Fig. 44

$$\frac{12000\times 981}{(0.1)^2}\ \frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}\ \text{en C:G:S: ou}\ \frac{12000\div 453.6}{(0.1)^2\ (2.54)^{-2}}\ \frac{\text{lbs}}{(\text{pouce})^2}$$

$$1.18\times 10^9\frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}\ \text{ou}\ 1.71\times 10^4\ \frac{\text{lbs}}{(\text{pouce})^2}$$

N° 58: *Module (μ) de Coulomb (ou de rigidité) pour la torsion.*

Lorsque les déformations unitaires ont lieu *tangentiellement à la force,* on dit qu'il y a "glissement", "cisaillement", ou "effort tangentiel" *(shearing).*

Dans un glissement, les files de molécules d'un tube initial s'inclinent et forment un losange par suite du glissement des couches successives les unes sur les autres tout comme les feuillets d'un livre album épais deviennent, quand on l'ouvre, un prisme oblique dont la **section** verticale *(dans le sens des lignes du livre)* est devenue un **parallélogramme** au lieu d'un rectangle qu'elle était lorsque le livre était fermé*(fig. 44).*

$$\text{L'angle}\ \gamma = \frac{\Delta l\ \text{déplacement tangentiel à la force cisaillante}}{L\ \text{distance de la force au plan immobile}}$$

est appelé déformation unitaire de glissement*(shearing strain)*

Le quotient de la force tangentielle par la section tangentielle dans laquelle elle est répartie est appelé effort unitaire de glissement *(shearing stress)* **F/a** = s

De[illegible]uis Lamé, on représente par μ le quotient s/γ , que l'on [illegible]me module de rigidité, de Coulomb, de glissement*(slide modul[illegible], coefficient of simple rigidity)* et, de même que pour la f[illegible]xion $E = \frac{F\div a}{\Delta l\div l}$, tant que le fil est réversiblement élast[illegible]que, $\mu = \frac{S}{\Phi} = \frac{F\div a}{\Delta l\div l}$ est une constante, on peut appliquer la règle de trois pour déduire Δl de F.

N° 59: *Couple de torsion d'un cylindre plein.*

Lois de la torsion simple *(de Coulomb).*

1) Le couple de réaction *(de rigidité ou de torsion)*d'un fil donné est proportionnel à l'angle de torsion *(de l'extrémitl libre).*

$\mathbb{C} = K\,\theta$; *(K est la constante de torsion du fil)*

2) La constante K de torsion d'un fil est proportionnel-le directement à la quatrième puissance (d^4) du diamètre du fil, et inversement à la longueur du fil (l) ; *(démonstration ci-dessous)* $K = c\ d^4\div l$

3) L'angle dont tournent les diverses sections du fil **est** proportionnel à leur distance à l'encastrement *(comme le montre la figure 45a).*

$\frac{y}{l}$ *(les pailles situées aux distances 1 cm., 2 cm., 3 cm., de l'encastrement tournent d'angles comme 1,2 et 3)*

4) Le couple de torsion est *le même pour toute section du fil*

$$\mathbb{C}_y = K_y\ .\ \theta_y = (c\ d^4\div y)\ .\ \theta_1 . \frac{y}{l} = c\ \frac{d^4}{l}\theta_1$$

N° 60: *Théorie de la torsion simple:* En remarquant que *tous les rayons d'une même section droite restent dans le même plan (si l'on colle des pailles horizontales aux diverses*

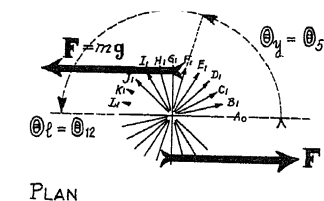
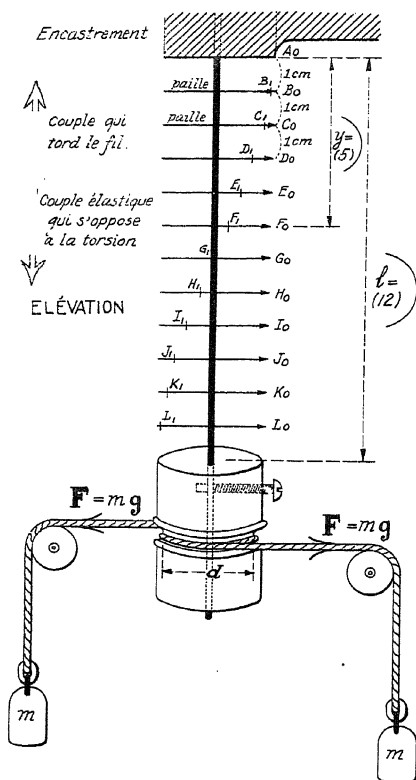



Fig. 45A

$B_0, C_0, D_0, \ldots$ positions initiales des extrémités des pailles collées à 1cm., 2cm, 3cm, ... de l'encastrement.

$B_1, C_1, D_1, \ldots$ positions après torsion.

φ angle de l'hélice $A_0 B_1 C_1 D_1 \ldots$ avec la génératrice primitive $A_0, B_0, C_0, \ldots$ qui s'est transformée en hélice.

$B_0 B_1 = \Phi$

$C_0 C_1 = \ell \Phi = 2 \Phi$

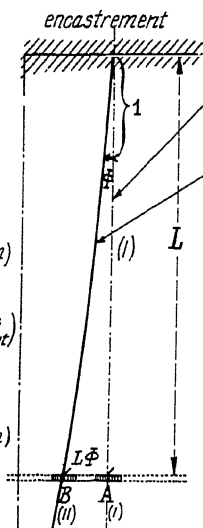
$\widehat{C_0 \Gamma C_1} = 2\,\Theta_1 = 2\,\Phi \div r$

$\widehat{B_0 \Delta B_1} = \Theta_1 = \Phi \div r$

Fig. 45B

Note: l'échelle est différente pour les hauteurs et les rayons.

$\theta_L = \frac{\widehat{AB}}{r}$ (rotation du plan à L de l'encastrement)

$\Phi = \frac{\widehat{AB}}{L} = \frac{\widehat{AB}}{r} \cdot \frac{r}{L} = \frac{\theta_L \cdot r}{L}$
$= \theta_1 \cdot r$ (angle de torsion)

$\Delta\ell = \widehat{AB} = L\Phi$ (déplacement) (longueur vue en vraie grandeur Fig. 47A)

Aire hachurée $d\mathfrak{A} = r(d\beta)(dr)$

Réaction du glissement

$-dF = \mu(d\mathfrak{A})\Phi = \mu\, r(d\beta)\,dr\,\Phi$

$\Phi = (\theta_L)\, r \div L$

$= r\,\theta_1$ (θ_1 étant la rotation de la section située à l'unité de distance de l'encastrement.)

$-dF = \mu(d\beta)\, r^2\,(dr)\,\theta_1$

Cette force ayant r pour bras de levier l'anticouple de torsion est donc :

$d\mathbb{C}_{élastique} = \vec{r} \times -\vec{dF} = ◎\,\mu\,\theta_1\,(d\beta)\,r^3(dr)$

d'où le couple total de réaction.

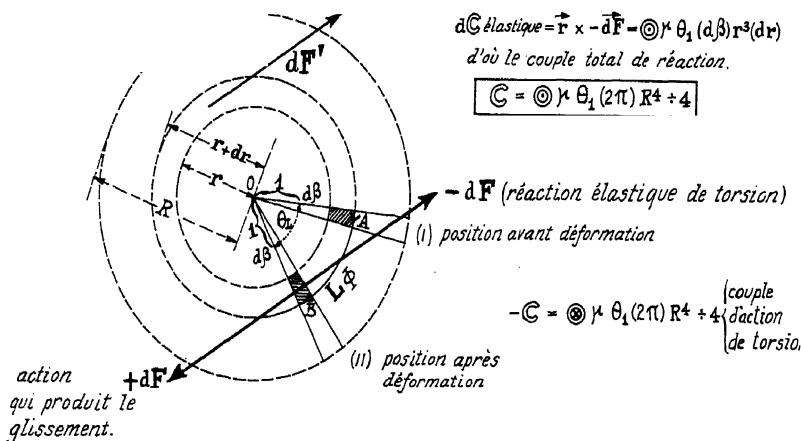
$$\boxed{\mathbb{C} = ◎\,\mu\,\theta_1\,(2\pi)\,R^4 \div 4}$$

$-\mathbb{C} = ⊛\,\mu\,\theta_1(2\pi)\,R^4 \div 4$ (couple d'action de torsio[n])

Fig. 47A

hauteurs les pailles restent horizontales), la troisième loi montre donc qu'une génératrice d'un fil cylindrique se déforme en *hélice* puisque les rotations des sections horizontales sont proportionnelles aux distances verticales à l'encastrement *(tout comme pour une vis le nombre de tours est proportionnel au nombre de pas): (voir fig. 45A et 45B).*

N.B.1: Ne pas confondre "l'angle φ que forment l'hélice et la génératrice primitive" avec "l'angle θ_1 la rotation de la section située à l'unité de distance de l'encastrement"

$$I \quad \psi_1 \qquad \vartheta_1 \div 1 \quad = \quad \psi_y \div y$$

N.B.2: Ne pas oublier non plus que Δl ici n'est *pas un allongement ou rétrécissement dans le sens de l'effort*, mais un glissement; de plus, la section a est ici parallèle à l'effort et non plus normale; comparez la figure 47 *(torsion)* à la figure 42 *(extension et compression)*

Hypothèse:

La définition du module de rigidité *(ou de glissement, de cisaillement, de Coulomb,...Nº 58)* "μ" comme étant le quotient

$$\frac{\text{de l'effort de cisaillement unitaire: } s}{\text{par l'aire tangentielle sur laquelle il s'exerce: } a}$$

indique *tant que l'élasticité réversible n'a pas été dépassée* *que* μ = constante $\frac{F \div a}{\Delta l \div L}$; d'où

F *(force tangentielle ou cisaillement)* — (μ) *(module de rigidité)* — $\left(\frac{\Delta l}{L}\right)$ *(angle $\frac{\Phi}{I}$)* — (a) *(aire sur laquelle l'effort tangentiel a été appliqu*

L'hypothèse d'où nous partirons pour déduire la théorie de la torsion à la suite de Coulomb sera donc que, *puisque la réaction élastique qui freine la torsion est égale et opposée à l'action qui tord le fil,*

"la réaction tangentielle, tant que la limite d'élasticité n'a pas été dépassée, est proportionnelle à l'aire (a) de l'élément considéré et à l'angle (Φ) dont se tord une des fibres du fil qui passe par le dit élément d'aire; le coefficient de proportionnalité étant évidemment le module μ"

Le lecteur ayant déjà une perspective *(fig. 46)*, nous nous contenterons de figurer sur une vue en plan *(fig. 47a)* et une élévation *(fig. 47B)* les forces et couples relatifs à un "élément d'aire ou petite aire tangentielle" hachurée.

Action tangentielle produisant la torsion $\Phi = \frac{AB}{L}$ sur la portion du fil qui a pour section droite l'aire hachurée ($d\mathcal{A}$)

d F — μ (module de Coulomb) — ($d\mathcal{A}$) (aire tangentielle) — Φ *(d'après l'hypothèse)* (angle dont est tordue la matière)

la rotation du plan de la section *(située à L de l'encastrement)* est $\theta_L = \widehat{AB}/r$; d'après la troisième loi *(Nº59)* si l'on désigne par θ_1 la rotation à la distance 1 de l'encastrement, on a

$$\theta_1 = \frac{\theta_L}{L} = \frac{\widehat{AB}}{rL}$$ et nous pourrons exprimer

Φ en fonction de cette rotation unitaire *(chemin des points à l'unité de* ***distance*** *de l'encastrement et à l'unité de distance de l'axe de torsion)*

$$\Phi = \frac{\widehat{AB}}{L} = r\ \theta_1$$

Comme d'autre part l'aire hachurée s'exprime en fonction de $(d\beta)$ l'angle de la tranche considérée et de (r) la distance à l'axe par

$$d\mathcal{A} = r \underset{(arc)}{(d\beta)} \quad \underset{(épaisseur\ radiale)}{(dr)},$$

l'expression de l'action tangentielle sera

$$dF = \mu r\ (d\beta)\ (dr)\ r\ \theta_1 = \mu\ (d\beta)\ \theta_1\ r^2\ \ dr$$

Mais, vu la symétrie, pour toute la section, la force résultante est nulle, car à toute action dF correspond une autre action dF' pour l'élément de la section qui est opposé par **l'axe** au premier élément considéré *(d'ailleurs s'il y avait une force résultante le fil ne resterait pas vertical, mais nous avons vu (fig.45a) que nous n'exercions qu'un couple pur; c'est ce que nous confirme l'analyse du phénomène qui nous montre que pour* ***tous*** *les couples d'éléments* ***opposés*** *d'une section, on a une force résultante nulle et un couple pur).*

Cette force dF a pour bras de levier r et donc produit un couple de torsion $\vec{r} \times \vec{dF}$ d'axe parallèle à l'axe du fil et descendant *(puisqu'un tire-bouchon qui tournerait comme le fil est tordu s'enfoncerait dans le plan horizontal).*

Remarque capitale: Pour tout autre élément d'aire de la section considérée qui est opposée par **l'axe** ou quelconque, le lecteur est prié de vérifier que le *couple de torsion est* ***représenté*** *par un axe parallèle à l'axe du fil et vers le bas.* Pour totaliser tous ces axes de couples, il suffit de les ajouter numériquement *parce qu'ils sont tous parallèles et* ***de même sens:*** donc le calcul intégral*(scalaire)* ordinaire peut être utilisé ici.

$$-\mathbb{C} = \Sigma\ \vec{r} \times \vec{dF} = \Downarrow \mu \underbrace{\int (d\beta)_0^{2\pi}}\ \theta_1 \underbrace{\int (r^3\,dr)_0^R}$$
$$= \Downarrow \mu\ \theta_1 (2\pi)\ \left(\frac{R^4}{4}\right)$$

Remplaçant R par $\frac{d}{2}$ *(demi-diamètre,* puisque le diamètre est plus facile à évaluer que le rayon et de même θ_1 par $\left(\frac{\theta_L}{L}\right)$ puisque la rotation θ_L terminale est ce que l'on mesure, le couple de torsion prend la forme

$$\mu \frac{\theta_L}{L}\ 2\pi\ \frac{(d/2)^4}{} = \frac{\pi}{32} \mu\ \ (\theta_L)$$

ce qui explique bien les lois expérimentales (du No.59)

La "constante de torsion" K $\frac{\pi}{32}\,\mu\,\frac{d^4}{L}$ est donc bien *"proportionnelle à d^4"* et *"inversement proportionnelle à L"*.

N° 61: Si la tige n'était pas cylindrique *(pleine)*, l'intégration donnerait pour le moment de réaction

$+\mathbb{C}$ ou pour le couple de torsion $-\mathbb{C}$

$$\mu\theta_1 \iint r^2 (d\,\mathcal{A})$$

Cette quantité $\iint r^2 d\,\mathcal{A}$ *(qui ne vaut $\frac{\pi d^4}{32}$ que pour un cercle)* est donnée dans les formulaires sous le nom de ***"moment d'inertie polaire central de section"***; nous le désignerons par J de même que le moment d'inertie axial de section l'a été par I.

$$\mathbb{C} = \mu\,\theta_1\,J$$

(μ correspond à E module de flexion et θ_1 correspond à $\frac{1}{\rho}$ courbure de la poutre fléchie).

N° 62: Résumons dans un tableau les principales grandeurs qui interviennent en élasticité élémentaire *(flexion simple et torsion simple)* et qui ont été déjà vues.

E module d'extension, ou de compression *(module d'Young) n'a la même valeur pour l'extension et la compression que pour les métaux: (la maçonnerie ne résiste pas à l'extension)*	μ module de rigidité, de torsion de glissement *(de Coulomb)*
$E = \frac{F + a\textit{(section normale à la force)}}{\Delta\, l\textit{(allongement} \pm) + l}$	$\mu = \frac{F + a\textit{(section tang. à la force)}}{\Delta\, l\textit{(glissement)} + L\textit{(distance au plan immobile)}}$
I module superficiel de la section droite *(par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la section et normal au plan de flexion, plan contenant les forces et la fibre neutre)*	J moment d'inertie polaire central superficiel de la section droite *(par rapport à l'axe du cylindre)*.
$I = \iint z^2 . da$	$J = \iint r^2 . da$
$\frac{I}{Z}$ module de section pour la flexion *(Z étant la plus grande distance à la fibre neutre)*	$\frac{J}{V}$ module de section pour la torsion *(V étant la plus grande distance à l'axe d'inertie)*.
$N = \mathbb{C}_f + \frac{I}{Z} = E\,\frac{Z}{\rho}$ *(fatigue unitaire de tension ou de compression)* ($\mathbb{C}_f$ *moment fléchissant, rayon de courbure local de la poutre fléchie; le maximum de fatigue ayant lieu à l'encastrement pour la charge en bout)*	$T = \mathbb{C}_t + \frac{J}{V}$ *(fatigue unitaire de cisaillement maximum)* ($\mathbb{C}_t$ *couple de torsion égal à $\mu J \frac{\theta_L}{L}$)* $T = \mu \frac{\theta_L}{L} V = \mu\,\theta_1\,V$

N° 63: *Equation approchée de la fibre neutre d'une poutre fléchie.*

La formule rigoureuse de la courbure *(inverse du rayon de courbure)* est en coordonnées rectangulaires *(ou Cartésiennes)*, dans le plan de flexion (x,z),

$$C = \frac{1}{\rho} = \frac{Z''}{(1+Z'^2)^{3/2}}$$

(ds étant l'arc de courbe de la fibre neutre, $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$; et $d\theta$ étant l'angle de deux sections voisines comprenant l'arc ds de fibre neutre, $\rho\, d\theta = ds = \sqrt{1 + Z'^2}\; dx$

position avant la charge
Encas-trement
0
poutre fléchie
X
θ
M' ρ dθ M
x
x+dx
F=mg
ℓ
prolongement de la fibre neutre (irréel)
ρ
dθ
Z
$\overset{\frown}{Fx} = \overset{\frown}{EI\frac{d\theta}{dx}}$ (voir fig 42) ; changeons d'origine ; rapportons les abscisses à 0 (encastrement).
$F(\ell - X) = EI\frac{d\theta}{dX} = \frac{EI}{\rho}$
$\theta = \text{arctang}\ \frac{dZ}{dX}$; $\frac{d\theta}{dX} = \frac{\frac{d^2Z}{dX^2}}{1+\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2} = \frac{Z''}{1+Z'^2}$
$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{\sqrt{1+Z'^2}\,dx}{d\theta} = \frac{(1+Z'^2)^{3/2}}{Z''}$ ou sensiblement $\approx \frac{1}{Z''}$
$\frac{d\theta}{dX} \approx \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{Z''}{(1+Z'^2)^{3/2}} \approx Z''$ (puisque Z' très faible pour toute la poutre)
$F(\ell - X) \approx EI\ \frac{d^2Z}{dX^2}$; intégrons
$\frac{F}{EI}\left(\ell - \frac{X}{2}\right)X + Cte = dZ : dX$; la constante
est nulle puisque (encastrement) pour $X=0$, $Z'=0$
2e intégration : $\int \frac{F}{EI}\left(\ell - \frac{X}{2}\right)X\,dX = \int dZ$
$\frac{F}{EI}\left(\ell\frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{6}\right) + Cte = Z$; pour $X=0$, $Z=0$
$\frac{F}{EI}\ \frac{X^2}{2}\left(\ell - \frac{X}{3}\right) = Z$
Equation de la fibre élastique
Nous devons trouver la flèche maximum en faisant $x=0$ ou $X=\ell$ dans l'équation de la fibre neutre.
$X=\ell$ donne $Z = \frac{F}{EI}\ \frac{\ell^2}{2}\left(\ell - \frac{\ell}{3}\right) = \frac{F}{EI}\ \frac{\ell^3}{3}$
$f = \frac{F\ell^2}{3EI}$

Fig. 48

De plus $\theta = \arctan \frac{dZ}{dx} = \arctan Z' = \tan^{-1} Z'$

d'où $d\theta = \frac{Z''}{1 + Z'^2}$, *et finalement* $\frac{1}{\rho} = \frac{Z''}{(1+Z'^2)^{3/2}})$

Mais les poutres surtout métalliques sont toujours *très peu fléchies* dans les conditions d'utilisation, de sorte que l'angle que fait la poutre en service avec la position qu'elle avait avant d'être chargée est toujours un angle très petit; la tangente de cet angle *(ou pente): Z'* est donc une quantité très petite et *négligeable devant l'unité* dans les calculs techniques.

On peut donc simplifier la formule ci-dessus et écrire $C = \frac{1}{\rho} \simeq Z''$ d'où la formule du N° 55 peut être pratiquement réduite à $\mathbb{C} = \frac{E\,I}{\rho} \simeq E\,I\,Z''$, forme infiniment plus maniable; *(avec les notations de la figure 42)* ,le couple fléchissant exercé à la distance x de l'extrémité libre est

$\otimes - \mathbb{C} = \vec{x} \times \downarrow m\,g$; le couple élastique antifléchissant de la partie de gauche de la poutre étant

$\odot + \mathbb{C} \simeq E\,I\,Z''$; l étant la longueur de la poutre, changeons l'origine, et appelons **X** = l - x les distances comptées à partie de l'encastrement et non plus à partir de l'extrémité libre.

Le bras de levier du poids est alors x = l - X et l'égalité du couple fléchissant au couple de réaction élastique peut s'écrire algébriquement

$$F\,(l - X) = E\,I\,Z''$$

Intégrons une première fois

$$\frac{F}{E\,I}\left(lX - \frac{X^2}{2}\right) + c = Z' \; ;$$ *(c étant une constante.)*

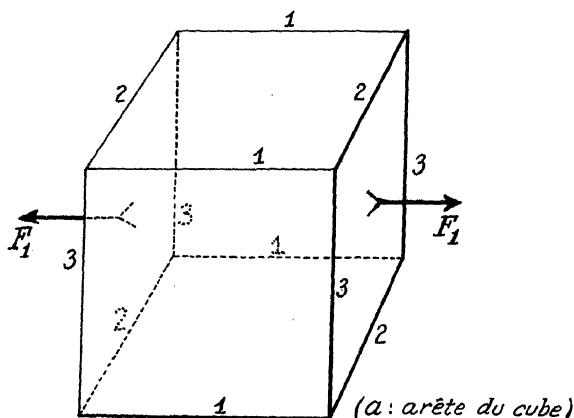
Cette constante est nulle puisque, à l'encastrement, pour **X** = 0 (x = l) la poutre étant toujours raccordée tangentiellement Z' = 0.

Intégrons une seconde fois

$$\frac{F}{E\,I}\left(l\,\frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{6}\right) + c' = Z$$

Cette autre constante d'intégration est également nulle puisque la flèche de la poutre Z est nulle à l'encastrement *(pour X = 0)*.

$$Z = \frac{F}{E\,I}\,\frac{X^2}{2}\left(l - \frac{X}{3}\right)$$ est donc l'équation de la fibre neutre élastique après flexion. La figure 48 nous montre l'allure de la courbe si pour la clarté de la figure nous représentons la poutre avec une échelle énorme pour les hauteurs relativement à celle adoptée pour les longueurs. La partie en pointillé n'est qu'un prolongement virtuel qui n'a pas de réalité physique.

N° 64: Pour trouver la *"flèche"* maximum (f) c'est-à-dire le plus grand écart de la poutre d'avec sa position d'équilibre avant la charge, il suffit de substituer à X la valeur l dans l'équation de la fibre

suivant ↔ 1 exerçons une traction $p_1 = \frac{F_1}{S} = \frac{F_1}{a^2}$

les arêtes 1 deviennent : $a\left(1+\frac{p_1}{E}\right)$ *(1ère loi de Hooke) ; E module d'Young*

" " ↗ 2 et 3 ↕ deviennent : $a\left(1-\sigma\frac{\Delta a}{a}\right) = a\left(1-\frac{\sigma p_1}{E}\right)$ *chacune des arêtes latérales est rétrécie.*

D'après la 3e loi de Hooke, si l'on exerce de même $p_2 = \frac{F_2}{S}$ *et* $p_3 = F_3 \div S$ *suivant les deux autres directions, l'addition algébrique des déformations donnera pour dimensions nouvelles du cube déformé :*

$$\begin{cases} \text{arêtes} \leftrightarrow 1 & a\left(1+\frac{p_1}{E} - \sigma\left[\frac{p_2}{E}+\frac{p_3}{E}\right]\right) \\ \text{arêtes} \nearrow 2 & a\left(1+\frac{p_2}{E} - \sigma\left[\frac{p_3}{E}+\frac{p_1}{E}\right]\right) \\ \text{arêtes} \updownarrow 3 & a\left(1+\frac{p_3}{E} - \sigma\left[\frac{p_1}{E}+\frac{p_2}{E}\right]\right) \end{cases}$$

volume $\approx a^3\left(1+\frac{p_1+p_2+p_3}{E}[1-2\sigma]\right)$ *en considérant les déformations comme infiniment petites.*

$$\underset{\text{(dilatation cubique)}}{\theta} = \frac{\Delta v}{v} = \boxed{\frac{1-2\sigma}{E}(p_1+p_2+p_3)}$$

$$\frac{1-2\sigma}{E}(N_1+N_2+N_3)$$

Fig. 49

$$f = Z_{x=l} = \frac{F}{EI}\frac{l^2}{2}(l - \frac{l}{3}) = \frac{F}{EI}\frac{l^3}{3}$$

N° 65: *Coefficient de POISSON (POISSON RATIO)*

Lorsque l'on exerce une traction F sur un fil de longueur initiale l_o et de diamètre initial d_o, à mesure que le fil s'allonge et devient $l_o + \Delta l$, on constate que le diamètre se contracte et devient $d_o - \Delta d$.

Le quotient de la contraction latérale unitaire $-\Delta d/do$ *(rétrécissement de chaque unité de longueur transversale)* par l'allongement unitaire $\Delta l/l$ *(allongement de chaque unité de longueur dans le même sens que l'effort de traction est représenté par la lettre* $- \sigma$

$$- \sigma = \frac{-\Delta d}{d_o} \div \frac{+\Delta l}{l_o}$$ *(coefficient de Poisson toujours négatif ou nul)*

Si l'on comprime une colonne, $\frac{-\Delta l}{l} < o$, il y aura un élargissement latéral $\frac{+\Delta d}{d_o} > o$ et le coefficient de Poisson a la même valeur négative que dans le cas de la traction.

Le caoutchouc a un coefficient de Poisson très grand $- \sigma = - \frac{1}{2}$ les métaux usuels $- \sigma = - \frac{1}{3}$ et le liège $\sigma = 0$; l'utilité du liège tient justement à ce fait que le bouchon ne tend pas à s'élargir lors de la fermeture.

Il est difficile parfois de mesurer directement la contraction latérale lors d'un effort de traction; on la déduit généralement de la variation du volume intérieur d'un tube de la substance considérée dont on connaît déjà le module d'Young.

N° 66: Relation entre les constantes élastiques et le coefficient volumique de compression uniforme *(bulk modulus* $-\frac{\Delta v}{v_o N}$) , ou de dilatation uniforme $+ \frac{\Delta v}{v_o N}$

La figure 49 se rapporte au cas d'un *étirement uniforme (la compression uniforme ne sera pas envisagée ici)*

Soit un cube ayant primitivement pour arête "a", donc pour aire primitive de chacune de ses faces "a^2".

Désignons les trois directions d'arêtes par 1,2,3.

Suivant la direction marquée (1), exerçons une traction unitaire N_1 *(symbole de Lamé pour désigner un effort normal)* ou p_1 pour rappeler que cette grandeur *(stress)* est homogène à une pression.

Les arêtes de direction (1) sont allongées (N°54) alors que (2) et (3) sont de ce fait rétrécies.

$$N_1 = p_1 = \frac{F_1}{a^2} = \frac{\Delta a_1}{a_1}E \;;\; - \sigma = \frac{-\Delta a_2}{a_2} \div \frac{\Delta a_1}{a_1} = \frac{-\Delta a_3}{a_3} \div \frac{\Delta a_1}{a_1}$$

Si l'on n'exerçait de traction *que dans la direction (1)* la nouvelle arête de cette direction deviendrait

$$a_1 + \Delta a_1 = a_1 + a_1\frac{N_1}{E} = a_1(1 + \frac{N_1}{E})$$

et les nouvelles arêtes transversales seraient:

$$a_2 - \Delta a_2 = a_2 - a_2 \quad \frac{a_2}{a_2} \quad a_2 - a_2 \sigma \frac{N_1}{E}$$

$$a_2 \left(1 - \sigma \frac{N_1}{E}\right)$$

$$\text{et } a_3 - \Delta a_3 = a_3 \left(1 - \sigma \frac{N_1}{E}\right)$$

De même, si l'on étirait (2) seulement, (2) s'allongerait entraînant le rétrécissement de (3) et (1) et de même, si l'on étirait (3) seulement, (3) s'allongerait entraînant le rétrécissement de (1) et (2); en vertu de la troisième loi de Hooke *(principe de superposition des déformations réversibles élastiques du № 54)*, l'addition algébrique des déformations donnera la déformation résultant de la superposition des tractions séparées (1), (2) et (3).

Si donc les étirements unitaires *(stresses)* sont N_1, N_2 et N_3 et *exercés à la fois*, les arêtes seront

$$a_1 + a_1 \frac{N_1}{E} - a_1 \sigma \frac{N_2}{E} - a_1 \sigma \frac{N_3}{E}$$

$$= a_1 \left[1 + \frac{N_1}{E} - \frac{\sigma}{E} (N_2 + N_3)\right]$$

et pour les autres arêtes

$$a_2 \left[1 + \frac{N_2}{E} - \frac{\sigma}{E} (N_3 + N_1)\right]$$

$$\text{et } \quad a_3 \left[1 + \frac{N_3}{E} - \frac{\sigma}{E} (N_1 + N_2)\right]$$

Le volume du cube après déformation sera donc *(en négligeant les produits de quantités petites entre elles)*

$$v_0 + \Delta v = a_1 \left[1 + \frac{N_1}{E} - \frac{\sigma}{E} (N_2 + N_3)\right] a_2 \left[1 + \frac{N_2}{E} - \frac{\sigma}{E} (N_3 + N_1)\right] a_3 \left[1 + \frac{N_3}{E} - \frac{\sigma}{E} (N_1 + N_2)\right]$$

$$= a_1 a_2 a_3 \left[1 + \frac{N_1 + N_2 + N_3}{E} - \frac{2\sigma}{E} (N_1 + N_2 + N_3)\right]$$

$$\text{d'où } \Delta v = v_0 \left[\frac{1 - 2\sigma}{E}\right] \left[N_1 + N_2 + N_3\right]$$

La dilatation cubique relative au triple étirement sera

$$\theta = \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1 - 2\sigma}{E} (N_1 + N_2 + N_3)$$

Si l'étirement est uniforme, $\left(N_1 = N_2 = N_3 = N\right)$

$$\theta = 3 \left(\frac{1 - 2\sigma}{E}\right) N; \text{ d'où } K = \frac{\Delta v + v_0}{N} = \frac{3(1 - 2\sigma)}{E}$$

En changeant tous les signes, on aurait le cas de la compression uniforme

$$- K = \frac{-\Delta v + v_0}{N} = \frac{-3(1 - 2\sigma)}{E}$$

N.B.1: Sur la figure 49, pour ne pas allonger l'écriture, nous avons pris un cube $a_1 = a_2 = a_3 = a$, mais nous avons cru plus clair de distinguer les trois arêtes *dans le texte*.

$\theta = \frac{\Delta v}{v} = 0$ pour le caoutchouc seulement vu que $\sigma = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\Delta v}{v}$ est maximum pour le liège.

Et par suite, le coefficient de compression uniforme K est nul pour le caoutchouc et maximum pour le liège

N.B.2: $\frac{\Delta v}{v_0} = \theta$ *(bulk strain, déformation volumique unitaire correspond à* $\frac{\Delta l}{l_0}$*)* et $K = \frac{\theta}{N}$ *(bulk modulus, coefficient de compression ou d'extension dans les trois directions correspond à* $\frac{1}{E} = \frac{\Delta l}{l_0} + N$)

Pour la *compression uniforme* $- K = \frac{-3}{E}(1-2\sigma)$ c'est-à-dire que

$\frac{-\Delta v}{v_0} = \frac{-3(1-2\sigma)}{E} N$; *(N s'exerçant suivant les trois directions)* alors que si la compression n'est que suivant une seule direction $\frac{-\Delta l}{l_0} = -\frac{1}{E} N$; *(N suivant une seule direction).*

Nous tenons à rappeler que *contrairement aux coefficients de dilatation thermiques, le coefficient volumique de compression uniforme n'est pas le triple du coefficient linéaire (sauf pour le liège).*

N° 67: L'effort tranchant ou force cisaillante est la dérivée du moment fléchissant *(changée de signe).*

Au numéro 55, nous avons considéré l'expression du moment antifléchissant, réaction élastique qui empêchait la poutre de se tordre davantage. Ce couple antifléchissant était dû aux forces développées par l'extension des fibres supérieures et la compression des fibres inférieures.

L'expression de ce couple de réaction élastique des forces normales exercées par la partie de gauche de la poutre a été trouvée (55) rigoureusement égale à $E\, I^{+}\rho$ et approximativement (63) $E\, I\, Z''_{(x)}$, $Z''_{(x)}$ étant la valeur de la dérivée seconde de Z par rapport à l'abscisse, *à l'endroit considéré X.*

Physiquement, il est bien évident que l'extrémité libre X = 1 n'est pas fléchie et que la flexion est maximum à l'encastrement.

Donc, lorsque l'on passe de l'abscisse X à l'abscisse X+ΔX, il est naturel d'admettre que le moment fléchissant diminue, puisque la poutre travaille de moins en moins à mesure qu'on approche du bout libre.

Soit $\mathcal{C}_{a.f.\,X}$ *(couple antifléchissant à la distance X de l'encastrement* et de même $\mathcal{C}_{a.f.\,X+\Delta X}$ *(le couple antifléchissant à la distance X+ΔX de l'encastrement).*

$$= - \Sigma\, (\overrightarrow{X_p - X}) \times \downarrow F_p$$

= - *(le produit vectoriel des bras de leviers des forces directement appliquées $X_p - X$ par les forces directement appliquées F_p)* le signe Σ indiquant que l'on fasse la somme

de tous les produits vectoriels pour toutes les forces appliquées, p = 1,2,3,4...étant l'indice général

$$\mathbb{C}^{a.f.}_{X+\Delta X} < \mathbb{C}^{a.f}_{X}$$ puisque les bras de levier sont plus courts $X_p - (X+\Delta X) < X_p - X$; et ceci à fortiori si entre X et $X+\Delta X$ se trouve une force directement appliquée.

Admettant pour suffisamment exacte la formule (63)

$\mathbb{C}_X = E\ I\ Z''_X$; et que le moment varie de façon continue *(pas de force appliquée isolée entre X et X+ΔX)*

$$\mathbb{C}_{X+\Delta X} = E\ I\ Z''_{X+\Delta X}\ ;\ \text{d'où}\ \mathbb{C}_{X+\Delta X} - \mathbb{C}_X = \frac{\delta \mathbb{C}}{\delta X} . \Delta X = E\ I\ Z''' . \Delta X$$

(Z''' étant une constante en général et même constante négative) (voir Nº 63).

La condition *d'équilibre de translation* du tronçon hachuré de la poutre est d'autre part que l'ensemble des forces appliquées au tronçon égale la force cisaillante exercée tangentiellement par la partie de gauche de la poutre *(voir fig. 50)*

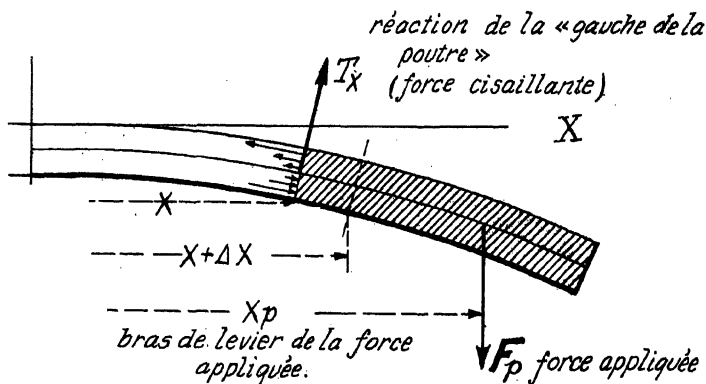



Fig. 50

$$\uparrow T_X = - \Sigma \downarrow F_p$$

Comparant la dérivée du moment antifléchissant et l'effort tranchant:

$$\frac{\delta \mathbb{C}}{\delta X} = - \Sigma\,(\text{zéro}-1)\,F_p = + \Sigma\,F_p$$

car $\frac{\delta X_p}{\delta X} = 0$ *(X_p étant indépendant de X)* et $\frac{\delta X}{\delta X} = 1$

on voit *"que la dérivée du moment antifléchissant est égale à l'effort tranchant changé de signe"*

Avec l'approximation (63) utilisée ci-dessus,

$$= E\ I\ Z''' < 0$$

donc $T_X = - E\ I\ Z''' \quad 0$ ce qui est logique, puisque le tronçon hachuré qui n'a de forces appliquées X_P que dirigées vers le bas ne tombe pas, l'effort tranchant doit être dirigé vers le haut *(Z positifs)* donc T doit être bien positif.

N° 68: *Oscillations de flexion (d'un diapason)*
Mouvement d'une tranche de peu de longueur *(fig. 51)*

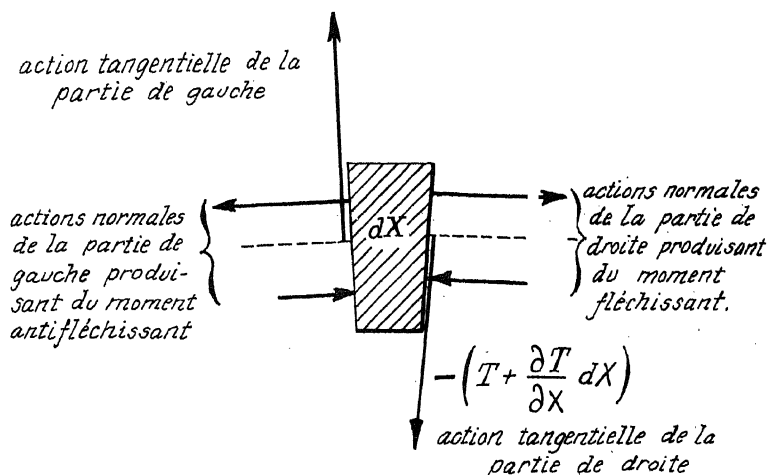



Fig. 51

Soit une tranche de longueur dX *(comptée le long de la fibre neutre lieu des centres de gravité des sections droites)*

Si $\frac{M}{l}$ est la densité linéique *(masse par unité de longueur)*, la masse de l'élément considéré est $\frac{M}{l}$ (dX)

Pour nous placer dans ce problème dynamique dans des conditions analogues au problème statique du N° 67, supposons *que la branche du diapason s'abaisse,* sa vitesse est vers le bas mais la force élastique de rappel est vers le haut donc *l'accélération est vers le haut (positive, vers les Z positifs ↑)*

$$\uparrow F \text{ élastique} = - \frac{M}{l} (dX)\ \ddot{Z}$$

$\ddot{Z}$ étant la dérivée par rapport à l'époque t alors que Z″ l'était par rapport à l'abscisse X; $\ddot{Z}$ étant négative puisque le mouvement est dans une phase retardée ici, comme le premier membre est positif puisque la force antagoniste est vers les Z positifs *(vers le haut)*, il faut mettre un signe moins au second membre pour rendre les deux membres d'un même signe

$$\frac{M}{l} \, dX \, \ddot{Z} \,) \quad - (-)$$

tout comme le premier membre.

Le poids de la petite tranche est négligeable en comparaison des efforts tranchants.

La réaction élastique de la partie de gauche est l'effort tranchant T_X ; comme l'action de la partie de droite est opposée à la réaction qu'elle subit *(laquelle est l'effort tranchant d'abscisse $X+\Delta X$ soit $T_{X+\Delta X}$,)* l'action de la partie de droite est $-T_{X+\Delta X}$.

Ecrivons l'ensemble des forces que subit la petite tranche de la part de la droite et de la gauche de la poutre

$$\uparrow T_X + \downarrow - T_{X+\Delta X} \quad \text{soit} \; - \frac{\delta T}{\delta X} \, dX$$

Et comme $T = - E \, I \, Z'''$,

$$\uparrow F_{\text{élastique}} = - (- E \, I \, Z'''')_{dX} = + E \, I \, Z'''' \, (dX)$$

La relation: force résultante appliquée = *(masse)(accélération)* nous donne ici:

$$- \frac{M}{L} (dX) \, \ddot{Z} = + E \, I \, Z'''' \, (dX)$$

ou en simplifiant par dX et mettant tout dans un seul membre

$$\ddot{Z} + \frac{E \, I \, L}{M} \, Z'''' = 0$$

(autrefois, on écrivait un peu plus longuement à la manière de Leibnitz:

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta t^2} + \frac{E \, I \, L}{M} \, \frac{\delta^4 Z}{\delta X^4} = 0 \quad)$$

Cette équation différentielle spatio-temporelle est du type dit "des cordes vibrantes" parce que les premiers physiciens qui ont eu à la résoudre l'avaient obtenue à propos des vibrations des cordes.

On la résout en fractionnant la difficulté: en posant $Z = U(X) \sin(\omega t + \beta)$ c'est-à-dire en cherchant à trouver l'*amplitude variable u (fonction dépendant de la seule position X et non de l'époque t)* et *la phase variable* $(\omega t + \beta)$ *elle indépendante de l'abscisse X, fonction de l'époque seulement.*

$$\underbrace{Z(X, t)}_{\text{fonction doublement périodique dans l'espace et le temps}} = \underbrace{u(X)}_{\text{fonction de l'espace}} \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \beta)}_{\text{fonction du temps}}$$

Posons pour abréger $\frac{E \, I \, l}{M} = b^2$, l'équation devient $\boxed{\ddot{Z} + b^2 Z'''' = 0}$; dérivons $Z = u \sin(\omega t + \beta)$ deux fois par rapport à t et quatre fois par rapport à X, *n'oubliant pas que u n'est fonction que de X seulement.*

$$\dot{Z} = \frac{\delta Z}{\delta t} = u \, \omega \sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}) = u \, \omega \cos(\omega t + \beta)$$

$$\ddot{Z} = \frac{\delta^2 Z}{\delta t^2} = u \, \omega^2 \sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = - \omega^2 Z$$

$$Z' = \frac{\delta Z}{\delta X} = \frac{\delta u}{\delta X} \sin(\omega t + \beta) = u' \sin(\omega t+\beta)$$

$$Z'' = \frac{\delta^2 Z}{\delta X^2} = \frac{\delta^2 u}{\delta X^2} \sin(\omega t + \beta) = u'' \sin(\omega t+\beta)$$

$$Z''' = \frac{\delta^3 Z}{\delta X^3} = \frac{\delta^3 u}{\delta X^3} \sin(\omega t + \beta) = u''' \sin(\omega t+\beta)$$

$$Z'''' = \frac{\delta^4 Z}{\delta X^4} = \frac{\delta^4 u}{\delta X^4} \sin(\omega t + \beta) = u'''' \sin(\omega t+\beta)$$

Substituant et supprimant le facteur temporel sin $(\omega t+\beta)$, l'équation $\ddot{Z} + b^2 Z'''' = 0$ se réduit à $-u\,\omega^2 + b^2 u'''' = 0$

Posons $\omega^2 = b^2 c^4$ pour alléger encore ; il vient $u'''' - c^4 u = 0$

Nous avons cette fois une équation résolue depuis Euler: essayons de satisfaire à cette équation en substituant à u *(fonction de x seulement)* une exponentielle de x.

$$u = A\, e^{\rho x};\quad u' = \rho u\ ;\quad u'' = \rho^2 u; ...;\quad u'''' = \rho^4 u$$

On transforme ainsi une résolution d'équation différentielle en une résolution d'équation algébrique par suppression du facteur commun u

$$u\,(\rho^4 - c^4) = 0\ ;\quad (\rho + c)(\rho - c)(\rho + c\,i)\,(\rho - c\,i) = 0$$

i désignant l'imaginaire $\sqrt{-1}$

Et comme le principe de superposition *(troisième loi de Hooke, Nº 54)* s'applique aux équations linéaires *(telle que $u'''' - c^4 u = 0$ où la fonction u et ses dérivées ne figurent qu'au premier degré)*, l'intégrale générale sera la somme des solutions particulières

$$u = A\, e^{cx} + B\, e^{-cx} + C\, e^{+cix} + E\, e^{-cix}$$

où A,B,D,E étant des constantes.

A l'aide des formules d'Euler $\begin{cases} e^{cix} = \cos cx + i \sin cx \\ e^{-cix} = \cos cx - i \sin cx \end{cases}$

on peut transformer les termes imaginaires de l'intégrale en la somme d'un sinus et d'un cosinus *(C et D étant de nouvelles constantes)*. On a ainsi affaire à des fonctions plus connues

$$u = A\, e^{cx} + B\, e^{-cx} + C \sin cx + D \cos cx$$

Reste à déterminer les quatre constantes par les condidions aux limites *(boundary conditions)*.

A l'encastrement, x = 0, à tout instant l'ordonnée $Z_0 = 0$ et, le raccordement étant tangentiel, la pente $Z_0' = 0$.

D'autre part, à l'extrémité *libre*, rien ne tord ni rien ne cisaille; donc $\mathbb{C}_{x=l} = 0$ et $T_{x=l} = 0$

$$Z_0 = 0 = \sin(\omega t+\beta)\left[A + B + D\right]$$

$$Z_0' = 0 = \sin(\omega t+\beta)\left[Ac - Bc + Cc\right]$$

$$\mathbb{C}_l = 0 = EIZ_l'' = \sin(\omega t+\beta) EI\left[Ac^2 e^{cl} + Bc^2 e^{-cl} - Cc^2 \sin cl - Dc^2 \cos cl\right]$$

$$T_l = 0 = EIZ_l''' = \sin(\omega t+\beta) EI\left[Ac^3 e^{cl} - Bc^3 e^{-cl} - Cc^3 \cos cl + Dc^3 \sin cl\right]$$

On a donc pour déterminer les constantes un système de quatre relations:

x = cℓ = 1.19 π/2 , 2.98 π/2 , 5.01 π/2 , 6.99 π/2
9.00 π/2 , 10.999 π/2 , ... (2n + 1) π/2
(seules les 2 premières solutions sont
nettement différentes de
(2n + 1) π/2)
+ log | séc x |
− log | séc x |
x = 3π/2
x = 5π/2
x = 7π/2

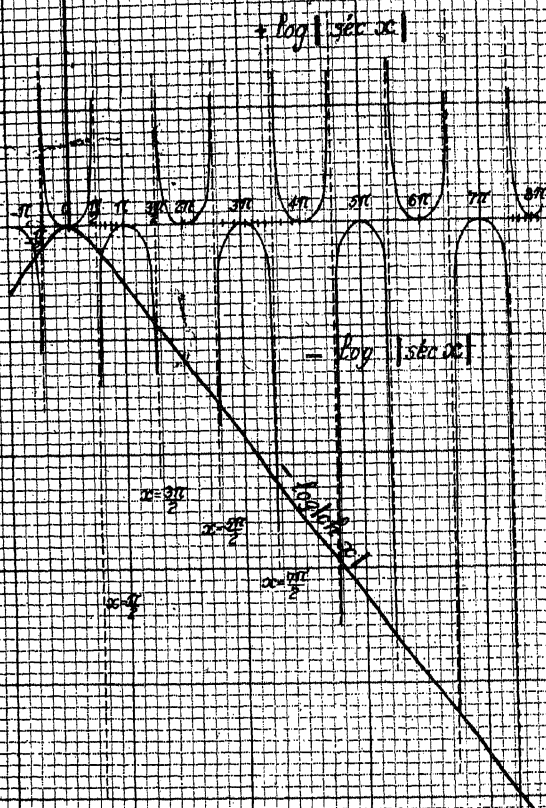



Fig. 52

(I) $A+B+D = 0$

(II) $A-B+C = 0$

(III) $e^{-cl} - C \sin cl - D \cos cl = 0$

(IV) $A\, e^{cl} - Be^{-cl} - C \cos cl + D \sin cl = 0$

Comme les seconds membres sont nuls, il est plus avantageux d'éliminer A,B,C,D pour *déterminer les valeurs de "cl"* graphiquement et ensuite connaissant c avoir la fréquence des vibrations transversales de *(I)* et *(II)* on tire

$A = -\left(\frac{C+D}{2}\right)$ et $B = \frac{C-D}{2}$ substituant ces valeurs dans *(III)* et *(IV)*, il vient:

$$\text{et}\begin{cases}(C + D)\,(e^{cl} + \cos cl) = (D - C)\ \sin cl\\ (C + D)\sin cl = (C - D)\,(\cos cl + e^{-cl})\end{cases}$$

d'où par division membre à membre disparition de C et D.

$$\frac{e^{cl} + \cos cl}{\sin cl} = \frac{-\sin cl}{\cos cl + e^{-cl}}$$

ou multipliant en croix, et mettant tout dans un seul membre

$0 = \sin^2 cl + \cos cl\,(e^{cl} + e^{-cl}) + \cos^2 cl + 1$ et finalement

$$0 = 2 + \cos cl\,(e^{cl} + e^{-cl})$$

telle est la relation cherchée capable de déterminer cl. On ponrrait utiliser la méthode des approximations successives; la voie graphique nous semble plus intéressante en physique.

Cette relation peut s'écrire

$$\text{séc}\ cl = \frac{1}{\cos cl} = -\frac{e^{-cl} + e^{+cl}}{2} = -\operatorname{ch} cl$$

en langage ordinaire: la sécante circulaire de l'arc "cl" et le cosinus hyperbolique de l'arc "cl" doivent avoir une somme nulle.

Les deux fonctions étant paires *(mêmes valeurs pour +x et -x)* inutile de considérer les x<0. Construisant la courbe $y = (-\operatorname{ch} x)$ et la courbe $y = +\text{séc}\ x$, là où les courbes se rencontreront, les abscisses de ces points d'intersection donneront les valeurs de cl et par suite les fréquences des vibrations.

Consultant par exemple le "Handbook of Chemistry and Physics", on voit en prenant les valeurs des tables que les solutions sont:

$$cl = 1.19\,\frac{\pi}{2},\ 2.98\,\frac{\pi}{2},\ 5\,\frac{\pi}{2},\ 7\,\frac{\pi}{2},\ldots(2\pi+1)\,\frac{\pi}{2}$$

(voir fig.52: les ordonnées sont proportionnelles aux logarithmes des deux fonctions paires)

Comme $\frac{E\,I\,l}{M} = b^2$ et $\omega^2 = b^2 c^4$, *tout est connu quant aux fréquences* puisque cl est déterminé: en effet la pulsation

$$\omega = b\,c^2 = \sqrt{\frac{E\,I\,l}{M}}\,\frac{"c^2 l^2"}{l^2} = \sqrt{\frac{E\,I}{M\,l^3}}\,("c\,l")^2$$

et la fréquence relative à chaque valeur de "cl" est

Généralement, on remplace la masse linéique $\frac{M}{l}$ par son équivalent D S *(densité×section droite)*
(la masse M étant le produit (Densité)(volume)=(D) (S l)

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{D}}\sqrt{\frac{I}{S}}\,\frac{"c^2 l^2"}{l^2}$$

- ν : fréquence
- $\sqrt{\frac{E}{D}}$: vitesse de propagation des ondes longitudinales *(dépend de la matière)*
- $\sqrt{\frac{I}{S}}$: module superficiel par unité de section *(dépend de la forme de la section)*
- $"c^2 l^2" = \frac{(2n+1)^2 \pi}{4}$, soit $\frac{(2n+1)^2\pi}{4\,l^2}$ *(dépend de la longueur des branches)*

Mais, $I = \frac{a\,b^3}{12}$ (Nos.55 et 62) et $S = a\,b$ *(aire d'un rectangle)*

d'où $\sqrt{\frac{I}{S}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$ et

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{D}}\;\frac{b}{2\sqrt{3}}\;\frac{c^2 l^{2}}{l^2}$$

fréquence — b(épaisseur) — $\frac{1}{l^2}$ (réciproque de la longueur élevée au carré)

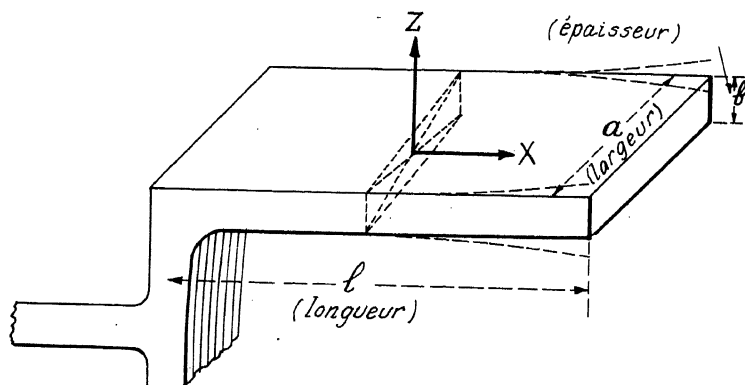



Fig. 53

Donc les fréquences sont pour un matériau donné proportionnelles à l'épaisseur (b), inversement proportionnelles au carré de la longueur ($1/l^2$) et indépendantes de la largeur (a).

Les sons rendus par les branches d'un diapason varient comme la suite des carrés des nombres impairs *(à partir du troisième son très exactement)*. Le premier harmonique possible est donc l'*harmonique "neuf"*; c'est ce qui explique que le diapason rend un son pratiquement "purement sinusoïdal" et peut être employé comme tel en électrotechnique.

N.B.I: Le lecteur qui désirerait avoir la position des noeuds de vibration pour chacun des sons possibles est prié de lire les pages 241 et suivantes du livre de A.Guillet "Propriétés cinématiques des vibrations".

N.B.II: Dans le même livre *(page 242)* le lecteur verra les vibrations d'une poutre reposant sur deux appuis simples et les vibrations d'une poutre encastrée à ses deux extrémités.

Pour de plus amples compléments, voir Timoshenko "Vibration problems in Engineering".

* N° 69: *Oscillations de Torsion:* Nous nous bornerons au cas d'un fil cylindrique plein *(se reporter à la figure 45a)*

La formule générale des oscillations est

$$(\textit{période})\ T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{gl}\ \text{(moment d'inertie du solide qu'est le fil et de la poulie qui lui est fixée)}}{\mu J\ \text{(quotient du couple qui réagit par élasticité)} \div \text{(par l'angle de torsion)}}}$$

Pour un fil cylindrique

$J = \frac{\pi}{32}\ \frac{d^4}{L}$ *(Nº 60);* μ est le module de Coulomb ou de rigidité.

Note: En torsion, il n'y a pas lieu de parler d'oscillations infiniment petites puisque le rapport

$$\frac{\mathfrak{C}}{\theta_L} = \frac{\pi}{32}\mu\frac{d^4}{L}$$ *quel que soit l'angle de rotation,*

donc les oscillations de torsion sont les plus simples, leur période étant rigoureusement indépendante de l'amplitude.

N° 70: Détermination du *moment d'énergie d'un équipage de torsion.*

[*Le lecteur est prié de comparer ce qui va suivre, (relatif aux équipages de torsion) avec ce qui a été fait au Nº 10 pour le pendule physique*]

Il serait quelquefois fastidieux d'employer le calcul intégral pour évaluer "en bloc" l'inertie de rotation d'un fil de torsion et de la poulie au moyen de laquelle on exerce le couple pur.

Comme pour le pendule composé, en modifiant d'une quantité connue de l'inertie de rotation sans troubler le couple, on aura aisément le moment d'inertie global I_{gl} *(de tout l'équipage)* en évaluant la moyenne des périodes d'oscillation avant et après la modification du moment I gl; c'est même beaucoup plus facile à faire que dans le cas du pendule puisque l'on peut partir avec des amplitudes importantes.

Avant d'ajouter des surcharges,

(sec) T =

En éloignant du centre vers la périphérie de petites masses de plomb qui se trouvaient primitivement tout près du fil sur la poulie, *(ceci pour ne pas modifier la traction du fil mais seulement l'inertie de l'équipage)* si l'on a ainsi éloigné symétriquement n masses, de m *(grammes ou slug)* qui étant primitivement à r_0 de l'axe s'en trouvent à la fin à r_1, on a, sans troubler l'équilibre statique ni modifier la tension du fil, augmenté l'inertie globale de

$$\Delta I_{gl.} \quad n\ m\ (r_1^2 - r_0^2)$$

Et comme le couple n'a été modifié en rien, la nouvelle période sera allongée et vaudra

$$(sec)\quad T' \quad T + \Delta T = 2\pi \; \frac{gl. + n\ m}{\mu\ J} \; r^2 - \underline{r_0^2)}$$

d'où
$$\frac{T'^2 - T^2}{T^2} = n\ m\ \frac{r_1^2 - r_0^2}{I_{gl.}}$$

et
$$\underset{\text{slug} \times (\text{pied})^2}{I_{gl.}} = \underset{\text{slug}}{n\ m} \; \underbrace{(r_1^2 - r_0^2)}_{(\text{pied})^2} \; \frac{T^2}{T'^2 - T^2}$$

Ainsi un chronomètre pour évaluer les périodes T et T', une balance pour peser les n masses et une règle pour évaluer 2 r_1 et 2 r_0 les diamètres des anneaux formés par les masses déplaçables suffisent pour connaître l'inertie de l'équipage.

Note: Dans ce calcul, on a implicitement supposé que les distances des n petites masses à l'axe étaient grandes par rapport aux dimensions des petites masses. Si cela n'était pas, il faudrait munir la poulie de n rayons *(à la partie supérieure)* de façon à pouvoir placer les petites masses à des distances suffisantes de l'axe pour que l'approximation soit suffisante: des vis avec des écrous mobiles sont très commodes à cette fin.

N° 71: Vibrations harmoniques des systèmes [illegible] é de [illegible]

Appelons f_1 la force nécessaire pour produire un *allongement unité* de ce ressort *(dit "à boudin" et dont le matériau, lorsqu'on l'étire, travaille par torsion et non par flexion alors qu'il travaillerait par flexion si on l'incurvait).*

L'allongement statique *(au repos)* produit par le poids $P = M\ g$ de la masse M qu'on suspend à sa base sera

$$\Delta l_{statique} = \frac{M\ g}{f_1} \quad \text{d'après la définition même}$$

de f_1.

Ecartons le poids tenseur vers le bas *(sens positif des allongements)* puis abandonnons le système. Il y a des oscillations. Pour étudier leurs modalités, convenons de compter *les écarts (x) d'avec la position d'équilibre comme positifs vers le bas.*

Lorsque le ressort a pour longueur $l_0 + \Delta l_{sta.} + x$, il a pour *allongement total* $x + \Delta l_{sta.}$ et pour allongement relativement à sa position d'équilibre x.

La force "de rappel" est donc *(x étant un nombre algébrique)*

$$\uparrow \mathbf{F} = f_1 (\ x + \Delta l_{stat.}) = (\ f_1 x + M\ g) \uparrow$$

(numériquement $F = Mg + f_1 x$ *ou* $Mg - f_1 x$ *suivant que l'écart du poids est vers le bas ou vers le haut, mais la convention de signe faite pour x permet de représenter les deux cas par une seule formule).*

La figure (54) et le raisonnement seront faits en supposant x positif. Alors la résultante du poids et de la force de rappel est *(comme toujours d'ailleurs)* dans un sens opposé au déplacement

$$\downarrow M\ g + \uparrow (f_1 x + Mg) = \uparrow f_1 x = -\ f_1 x$$

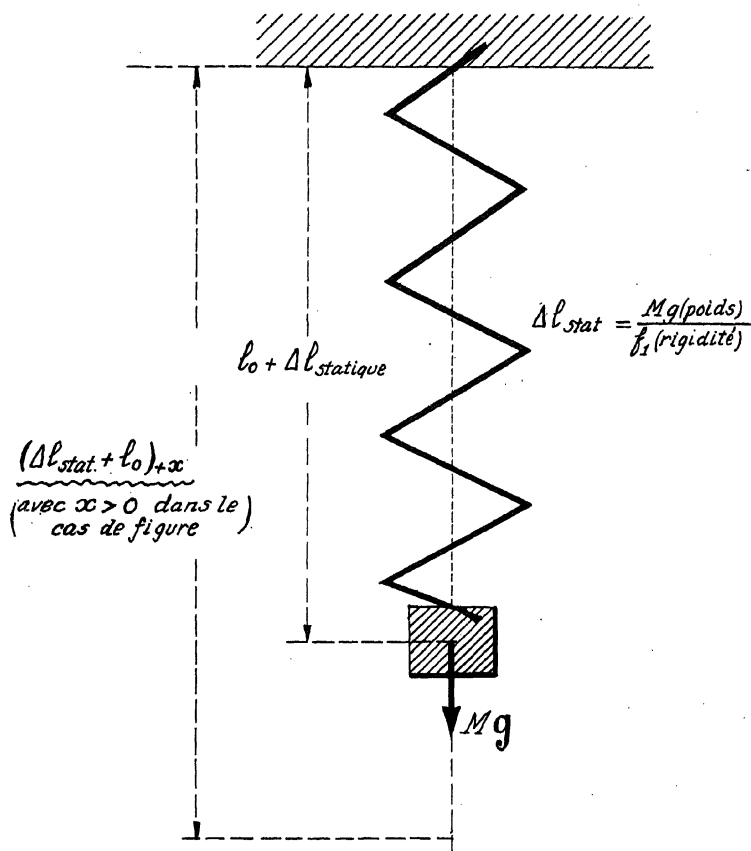



Fig. 54

L'équation générale de la dynamique *(force = masse × accélération)* est donc

$$- f_1 x = M\ddot{x} \quad \text{ou} \quad M\ddot{x} + f_1 x \quad 0$$

c'est l'équation rencontrée au N° 35 à propos du pendule simple.

Posons $\frac{f_1}{M} = k^2$, elle prend la forme simple $\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$ dont la solution a été montrée être $x = A \cos kt + B \sin kt$, où A et B sont deux constantes à déterminer par les conditions initiales du mouvement *(à quel écart* $\boxed{x_0}$ *et avec quelle*

vitesse *le poids a été abandonné)*

$$\Bbbk = \sqrt{\frac{f_1}{M}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}_{statique}$$

La période de la vibration est T (sec), durée pendant laquelle la phase varie de 2π radians.

$$\Bbbk T = 2\pi \quad \text{ou} \quad T = \frac{2\pi}{\Bbbk} = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \text{stat.}$$

et la fréquence $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{(\Delta l)_{stat.}}}$

D'où la règle *"la longueur du pendule simple synchrone (pendule mathématique ayant la même période que le ressort) est celle de l'allongement statique (Δl_{sta}) produit par le poids tenseur"*

Les conditions initiales *(voir le Nº 35 si besoin en est)* sont:

$$x_0 = A$$
$$\dot{x}_0 = \Bbbk B \quad ; \text{d'où}$$
$$x = x_0 \cos \Bbbk t + \frac{\dot{x}_0}{\Bbbk} \sin \Bbbk t$$

Le mouvement de la masse M est donc la superposition de deux mouvements sinusoïdaux d'amplitudes proportionnelles l'une à l'écart initial et l'autre à la vitesse initiale

$$x_1 = x_0 \cos \Bbbk t$$
$$x_2 = \frac{\dot{x}_0}{\Bbbk} \sin \Bbbk t$$

(avec $x = x_1 + x_2$.

Explicitons l'amplitude a et la phase φ de ce mouvement résultant.

$$x = a \sin (\Bbbk t + \varphi)$$

Par identification, $\begin{cases} a \sin \Bbbk t \cos \varphi = \frac{\dot{x}_0}{\Bbbk} \sin \Bbbk t \\ a \cos \Bbbk t \sin \varphi = x_0 \cos \Bbbk t \end{cases}$

après suppression des facteurs temporels communs sin $\Bbbk$t et cos $\Bbbk$t, on a *(amplitude)*

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\Bbbk^2}} = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 \frac{\Delta l}{g}_{stat}}.$$

et *(phase)* $\arctan \frac{x_0 \Bbbk}{\dot{x}_0} = \arctan\left\{\frac{x_0}{\dot{x}_0}\sqrt{\frac{g}{\Delta l stat.}}\right\}$

On voit donc que *la phase et l'amplitude* sont bien définies pour un ressort de rigidité connue et un poids tenseur donné, lorsque position et vitesse initiale sont bien connues.

Note: On appelle rigidité d'un ressort le rapport du poids tenseur à l'allongement statique qu'il produit:

itat

Quant à la période des oscillations, elle est indépendante de la position comme de la vitesse initiale, la période ne dépend *que de la rigidité et du poids tenseur.*

On dit que ces oscillations sont les vibrations propres ou libres *(natural vibrations)* du système pour les distinguer des cas où il y a superposition d'une force alternative qui produit des vibrations forcées *(forced vibrations)*. Avant de parler des vibrations forcées, nous allons donner quelques exemples de vibrations propres moins artificiels que le ressort à boudin et qui permettront au lecteur de calculer la période des vibrations naturelles d'une poutre *(beam)* ou d'un axe *(shaft)*.

N° 72: Vibrations propres d'un poids Mg situé sur une poutre de poids négligeable *(charge concentrée et poutre sur deux appuis libres; voir, par exemple, Guillot, Mécanique I, page 321; ou intégrer directement comme on l'a fait au Nº 63 pour le cas d'une poutre encastrée.)*.

Le maximum de flèche d'une telle poutre est *(à l'état statique)*

$$\text{flèche max.} = \frac{Mg}{EI} \quad \frac{l'^2\, l''^2}{3\, l}$$

"l" étant la longueur totale de la poutre entre les deux appuis simples ($l = l' + l''$); l' et l'' étant les distances du poids à chacun des deux appuis.

On peut considérer cette poutre chargée comme un ressort fictif de longueur Λ indéterminée mais dont l'allongement statique serait *"cette flèche maximum de la poutre"*

$$\Delta\Lambda \quad \text{stat} \quad \frac{M\, g}{3\, E\, I} \quad \frac{l'^2\, l''^2}{l}$$

Ce ressort que constitue la poutre a la "rigidité"

$$f_1 :$$

La période des vibrations libres de la poutre est donc

$$T : \quad = 2\pi \sqrt{\frac{M\ l'^2\, l''^2}{3\ E\ I\ l}}$$

$$= 2\pi\ l'$$

On voit que pour une position donnée de la charge "concentrée" la période des vibrations propres de la poutre est proportionnelle à la racine carrée de la charge *(tant que M est grand devant la masse de la poutre elle-même s'entend)*.

N° 73: Vibrations propres *(de torsion)* d'un axe de machine, à la *rigidité de flexion* f_1 dont nous venons de parler

$$f_1 = \frac{F}{\Delta l \ \text{stat.}}$$

, force requise pour allonger le "ressort" d'une longueur unité, correspond pour les axes et disques qu'ils portent la *rigidité de torsion (ou constante de torsion du Nº 59)* laquelle

$$K \qquad \Delta\Theta \ \text{stat}:$$

est le *couple requis pour tordre de un radian l'extrémité libre*.

Note: Se reporter a la figure 45, remplacer "le fil encastré" par un "axe robuste encastré" et "la poulie" par "un disque" *(ou volant)*. C'est tout l'équipage que nous pouvons

envisager avec "un seul degré de liberté", un seul paramètre *(angle ici)* pour déterminer la position du système.
Nous avons vu *(au Nº 60)* que

$$\frac{\pi}{32} d^4 \frac{1}{I} \quad \text{donc } K \quad = \mu \frac{\pi}{32} d^4 \frac{1}{L}$$

Lorsque la torsion de l'extrémité libre, où se trouve le disque, est de θ radians, le couple élastique de torsion est donc $\mathfrak{C} = K\theta$

On peut, en général négliger I_A l'inertie de rotation de l'axe *(au même titre qu'on a négligé la masse de la poutre devant la charge M au Nº 72)*, puisque les distances *(ou bras de levier)* à l'axe géométrique des particules matérielles qui constituent l'axe physique sont très petites comparées aux distances des particules du disque au même axe géométrique des rotations.

$$I_{\text{disque}} : I_{\text{axe}}$$

Or, le moment d'inertie du volant est $I_{\text{disque}} = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{8} M d^2$ pourvu que l'épaisseur du disque soit uniforme *(voir cours de première année)*. R rayon maximum $\frac{d}{2}$

Les formules générales des rotations sont

$$I \frac{---}{\Delta t} \quad I\alpha = I \frac{\Delta^2 \alpha}{\Delta t}$$

Nous représenterons ici les rotations par θ_L au lieu de Φ pour ne pas risquer de confusion entre θ_L *(rotation du disque)* et Φ *(l'angle des hélices de l'axe tordu avec leur position primitive de génératrices de cylindre)*.

Comme il s'agit d'un couple antagoniste *(élastique)* nous l'affecterons d'un signe négatif, le mouvement de rotation étant uniformément retardé

$$-\mu \theta_L \frac{\pi}{32} d^4 \frac{1}{L} = I \ddot{\theta}_L$$

(Ces vibrations se produisent si l'on applique un couple pur et qu'on cesse subitement de l'exercer: c'est pendant la période ultérieure où l'inertie de rotation est aux prises avec l'élasticité que l'équation est applicable).

Introduisant la rigidité de torsion K *(tout comme on avait introduit f_1 dans le cas de la poutre)*, l'équation prend la forme simple

$$I\ddot{\theta} + K\theta = 0$$

Equation que nous avons déjà intégrée; la période des oscillations sera donc en posant

$$k^2 = \frac{K}{I} \quad \textit{(comme aux Nos.35 et 71)}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{1/8\ M\ d^2}{\mu \frac{\pi}{32} d^4 \frac{1}{L}}}$$

ou $$\frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi M L}{\mu}}$$

N° 74: *Vibrations forcées:* Lorsqu'une machine n'est pas parfaitement équilibrée, il y a *"par résonance" à une certaine "vitesse critique" de grandes vibrations* qui se produisent dans la poutre qui supporte la machine, vibrations dont l'amplitude peut différer notablement de la flèche prévue par l'élasticité statique. Bien des éléments entrent en ligne de compte tels que: résistance de l'air, frottements aux appuis, frottement moléculaire *(interne);* nous nous contenterons ici d'indiquer le mécanisme de la résonance sans tenir compte des résistances passives *(renvoyant encore le lecteur au magistral traité de S.TIMOSHENKO "Vibration problems in Engineering" pour une étude plus détaillée).*

(Voir fig.55): Si une masse m n'a pas été équilibrée *(unbalanced)* et que la machine tourne à une vitesse angulaire uniforme Ω , on voit que la réaction axifuge d'inertie due au déséquilibrage représente *(par sa composante verticale) une force perturbatrice alternative*

$$\updownarrow F_p = m\ b\ \Omega^2 \cos \Omega\ t$$

Vu la très grande rigidité longitudinale de la poutre, la composante horizontale n'a pas d'effet appréciable;l'ayant admis et négligeant tous les frottements, reprenons le problème tel qu'il a été posé à propos des vibrations libres du ressort à boudin *(fig.54, N° 70) en superposant l'effet de la force perturbatrice alternative envisagée.*

Cette fois, la force résultante $\boxed{M\ \ddot{x}}$ se compose *de la force de rappel* $- f_1 x$ *(voir N° 70) et de la force perturbatrice* $f_p = m\ b\ \Omega^2 \cos \Omega t$; l'équation différentielle du mouvement résultant est donc

$$M\ \ddot{x} = - f_1 x + m\ b\ \Omega^2 \cos \Omega\ t$$

ou en divisant par M les deux membres et posant pour abréger l'écriture

$$p^2 = \frac{f_1}{M} \quad \text{et} \quad \frac{m\ b\ \Omega^2}{M} = a$$

$$\ddot{x} + p^2 x = a \cos$$

Avec les machines très lentes *(qui ont précédé le moteur électrique et la turbine à vapeur),* la fréquence de la force perturbatrice était assez faible pour permettre de négliger le terme $\ddot{x}$ et l'on avait pour"déplacement statique"

$$x_{statique} = \frac{a \cos \Omega\ t}{p^2}$$

Mais, aujourd'hui, on ne peut plus négliger $\frac{\Omega}{p}$ *(en général)* et pour obtenir les déplacements "dynamiques" il faut intégrer l'équation complète si familière aux électriciens:

$$\ddot{x} + p^2 x = a \cos \Omega\ t$$

L'intégrale se compose *1e)* de la solution générale de l'équation homogène *(sans second membre):*c'est-à-dire $A \cos p\ t + B \sin p\ t$ *(ce qui correspond à l'extra-courant d'ouverture ou fermeture en électricité)*

2e) d'une solution particulière obtenue par substitution *(solution trigonométrique)* ou graphiquement à la Fresnel. Essayant $C \cos \Omega\ t = x$, on a identiquement la solution particulière *(ou "de régime" des électriciens):*

composante verticale
de la réaction
axifuge d'inertie
$m b \Omega^2 \cos \Omega t$
$m b \Omega^2$
réaction
axifuge d'inertie
m (masse non équilibrée)
de la machine
b
1
Ωt
fibre neutre
appui
simple
sens positif
des forces périodiques
verticales dues au dés-
équilibrage.

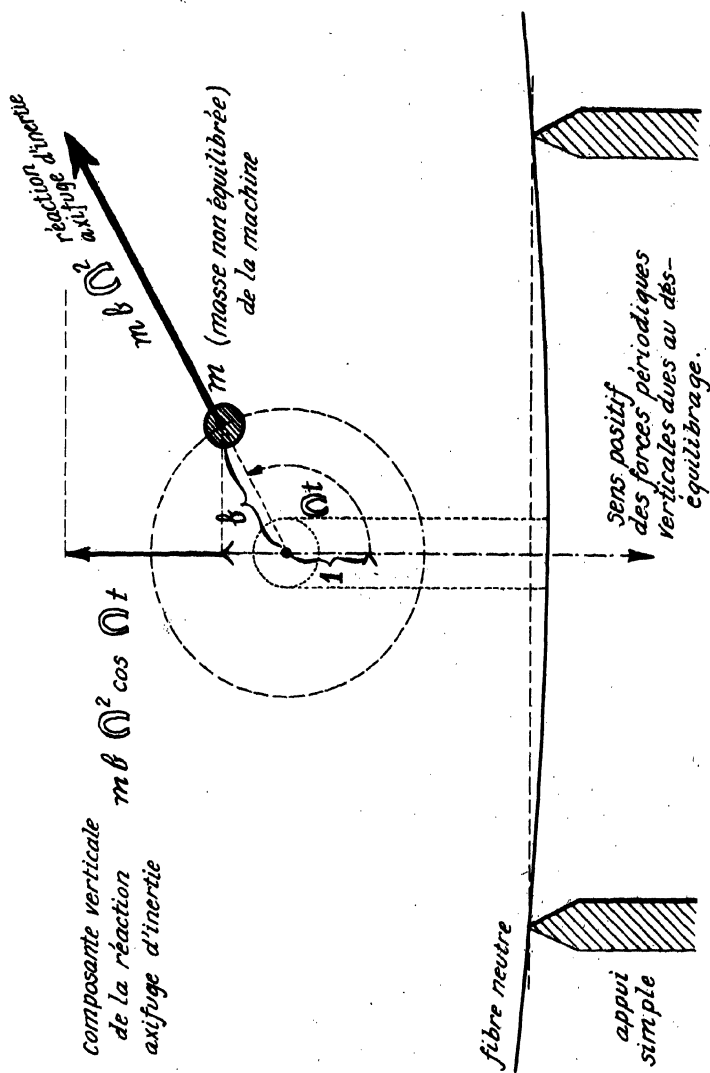



Fig. 55

$$-\Omega^2 C \cos \Omega t + p^2 C \cos \Omega t = a \cos \Omega t$$

d'où $$C = \frac{a}{p^2 - \Omega^2}$$

La solution complète a donc pour expression:

$$x = \underbrace{A \cos p t + B \sin p t}_{\text{vibrations libres}} + \underbrace{\frac{a}{p^2 - \Omega^2} \cos \Omega t}_{\text{vibrations forcées}}$$

Cette formule nous montre que lorsque Ω tend vers p, les vibrations "forcées" *(qui ont même pulsation que la force perturbatrice) croissent rapidement.*

Le quotient de l'amplitude des vibrations forcées par le déplacement statique *(des machines lentes)*

$$\beta = \frac{\frac{a}{p^2 - \Omega^2}}{\frac{a}{p^2}} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{p^2}}$$ est appelé "*facteur d'amplification*".

On l'exprime parfois en fonction des périodes $T_{(LIBRES)}$ et $T'_{(FORCÉES)}$ liées à p et Ω

par $T = \frac{2\pi}{p}$ et $T' = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{T'}\right)^2}$$ facteur d'amplification.

On dit qu'il y a *résonance* lorsque les *périodes des vibrations* libre et forcée *coïncident*, l'amplification devenant grande et la machine tournant à la fréquence "critique".

Par le N° 72 *(lorsque la masse de la machine est grande devant la masse de la poutre)* , on peut calculer la période des vibrations propres et par suite éviter la condition de résonance en évitant de faire tourner la machine au voisinage de cette période.

En réalité, les "résistances passives" empêchent le facteur d'amplification de devenir "immense" lors de la coïncidence des périodes propre *(à la poutre chargée")*et forcée *(par le déséquilibrage de la machine)*.

N°75: Méthode énergétique pour étudier les vibrations harmoniques *(se reporter à la figure 54)*.

L'énergie cinétique du système est *(négligeant la masse des spires du ressort)*

$$A_{cin} = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

L'énergie potentielle élastique changée de signe est la fonction primitive dont les variations sont le travail élastique: or la force de "rappel" étant $f_1(x + \Delta l_{stat.})$, *N°71)* pour une augmentation dx de la distance x à la position d'équilibre statique, le travail élastique est

$$\Delta A_{élastique} = \uparrow f_1(x + \Delta l_{stat.}) . \downarrow dx = - f_1(x + \Delta l_{stat.}) dx$$

$$f_1 d (x + \Delta l_{stat.})^2$$

L'énergie potentielle élastique est donc $\frac{1}{2} f_1 \overline{(x+\Delta l_{stat.}}$

A cette énergie potentielle de déformation, nous devons ajouter l'énergie potentielle de gravité, celle due à la position de la masse M dans le champ de la pesanteur.

$A_{\text{potentielle de gravité}} = M\ g\ Y$ *(Y étant l'altitude de la masse M)*

Variation totale d'énergie potentielle lorsque la masse M passe de sa position d'équilibre (x=0) à une position quelconque $x \neq 0$

$$\underbrace{\frac{1}{2} f_1 (\Delta l_{stat.} + x)^2}_{\text{Energie potentielle élastique actuelle}} - \underbrace{\frac{1}{2} f_1 (\Delta l_{stat} + \text{zéro})^2}_{\text{Energie potentielle élastique initiale}} + \underbrace{M\ g(Y-x)}_{\text{Energie potentielle de position (actuelle)}} - \underbrace{M\ g\ (Y)}_{\text{Energie potentielle de position (initiale)}}$$

$$\frac{1}{2} f_1 x^2 + f_1 x\ \Delta l_{stat.} - M\ g\ x$$

Mais $f_1 \Delta l_{stat.} = Mg$; donc *l'augmentation totale d'énergie potentielle (élastique et gravifique)* est simplement

$$\Delta\ A\ \text{potentielle} = \frac{1}{2} f_1 x^2.$$

Le principe de la conservation de l'énergie mécanique totale *(négligeant les résistances passives)* donne:

$$A_{pot.tot.} + A_{cin.} = \frac{1}{2} M\ \dot{x}^2 + \frac{1}{2} f_1 x^2 = \text{constante.}$$

La constante sera déterminée par les conditions initiales; supposons par exemple qu'initialement (t=o), $x = x_o$ et $\dot{x} = o$, l'équation énergétique sera:

$$\frac{1}{2} M\ \dot{x}^2 + \frac{1}{2} f_1 x^2 = \frac{1}{2} f_1 x_o^2$$

L'énergie cinétique sera maximum lorsque l'énergie potentielle sera minimum, c'est-à-dire nulle:

énergie cinétique $\overbrace{\text{fixe}}$ $\overbrace{\text{énergie}}$ potentielle

$$\frac{1}{2} M\ (\dot{x})_{max} \qquad \frac{1}{2} f_1 x_o^2$$

Mais (N° 71) dans le cas où $\dot{x}_o = o$, $x = x_o \cos kt$; dérivant

$\dot{x} = -k\ x_o \sin kt$; d'où pour maximum de $\dot{x}^2$:

$$(\dot{x})^2_{max} = k^2 x_o^2$$

Substituant dans $\frac{1}{2} M\ (\dot{x})^2_{max} = \frac{1}{2} f_1 x_o^2$, on trouve

$$k^2 = \frac{f_1}{M} = \frac{g}{\Delta l_{stat.}}$$, tout comme par l'intégration directe du N° 71.

La méthode énergétique est donc très simple, elle est préférée des physiciens et le lecteur qui voudrait se rendre compte qu'elle est apte à servir dans les cas les plus compliqués est renvoyé au livre de S.Timoshenko déjà cité *(p.53.54)* ou au livre de Lord Rayleigh"Theory of Sound", I, pp 111 et 287.

Problème 12: Un couple pur de 40 $\frac{\text{livre}\times\text{pieds}}{\text{radian}}$ est exercé à l'extrémité libre d'un axe d'acier de longueur 12 pieds et de diamètre 1 pouce. *(L'autre bout de l'arbre est encastré).* L'extrémité libre tourne de 2.8 degrés. Quel est le module de Coulomb *(rigidité)*de cet acier?

Réponse: $2 \times 10^9 \frac{\text{livres}}{\text{pied}^2}$

Problème 13: Un arbre de transmission de 50 pieds de long et trois pouces de diamètre, transmettant 100 HP, est soumis à un couple de 2000 $\frac{\text{livre} \times \text{pieds}}{\text{radian}}$. Le module de glissement *(de Coulomb)* étant $2 \times 10^9 \frac{\text{livres}}{\text{pied}^2}$, calculer l'angle dont une section terminale est tordue relativement à l'autre *(Le couple a été déduit indirectement par quotient de la puissance par la vitesse angulaire)*

Réponse: 0.13 radian.

Problème:14: Un disque métallique pèse 500 grammes et a 10 cms de rayon. Il est suspendu bien dans l'axe par un fil d'acier de 1 mm de diamètre et de longueur 2 mètres. Quel est le nombre d'oscillations complètes *(libres)* que fera le disque en 5 minutes *(s'il y a eu une torsion initiale imprimée évidemment)*. Le module de Coulomb du fil d'acier est de 8.3×10^{11}dynes/cm²

Réponse: 61 périodes complètes.

Problème 15: (S'aider de la figure 53 et du № 68).
Un diapason *(tuning fork)* est fait d'un acier de module d'Young

$E = 2\times10^{12}\frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}$ et de densité: $7.8 \frac{\text{grs}}{\text{cm}^3}$; la section droite des branches est un rectangle ayant pour largeur $a = 2$ cms et pour épaisseur $b = 1$ cm ; la longueur $l = 20$ cms. Quelle est la fréquence du son qu'il émet?

Réponse: $230 \frac{\text{périodes}}{\text{seconde}}$

Problème:16: Par des considérations de symétrie et l'application du théorème d'Huyghens, montrer que le moment d'inertie d'un cylindre plein homogène par rapport à un axe de rotation normal à l'axe géométrique du cylindre est*(voir fig. 56)*

$$M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} + a^2 \right)$$

Problème 17: Variation de volume d'une tige cylindrique subissant une traction p dynes/cm², si le module d'Young est E et le coefficient de Poisson σ.

Réponse: $\Delta v = v_0 p (1 - 2\sigma) \frac{1}{E}$

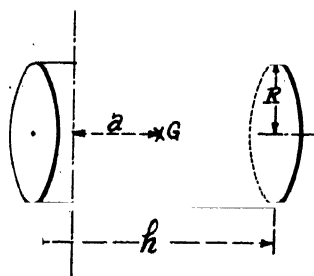



Fig. 56

Problème 18: Montrer que les plans diagonaux d'un cube *(étiré suivant une seule direction par une traction unitaire N)* tournent de N $(\frac{1+\sigma}{E})$ radians *(s'aider de la figure 57)*

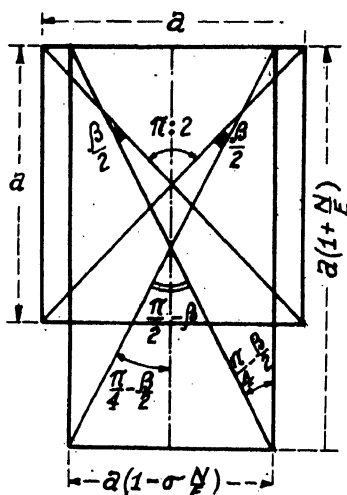



Fig. 57

Problème 19: Une poutre en porte à faux *(cantilever)* est chargée en bout d'arbre par une machine de poids Mg. Négligeant le poids de la poutre elle-même, montrer que la période des oscillations libres est

T = 2π *(voir fig.42)*

Problème 20: A combien de tours par minute N la machine du problème précédent tourne-t-elle avec la "vitesse critique" s'il y a le moindre déséquilibrage?

Réponse: N = 30 $\sqrt{3 E I}$

CHAPITRE V

Viscosité, Tension superficielle, Osmose et diffusion

SOMMAIRE: (I) *Frottements dans les fluides: Viscosité et tourbillons.* Coefficient de viscosité d'un liquide. (η êta) Formule de Poiseuille pour un liquide.- Formule de Poiseuille corrigée *(liquide)*.- Formule de Stokes.- Cas des gaz *(compressibles)*: débit.- Lévigation.- Coefficient de résistance et nombre de Reynolds.- Traînée et Portance; polaire d'une aile.- Gouvernail.- Lubrification.-

(II) *Etude élémentaire de la tension superficielle (sans les données des rayons X)*.- Pression sur une membrane courbe de tension uniforme.- Etirement d'une membrane plane.- La capillarité est un phénomène de pression *(Jurin)*.- Tubes capillaires coniques.- Compte-gouttes.- Ondes de Surface *(ripples)*.- Tension superficielle et Evaporation.- Chaleur latente de vaporisation et énergie superficielle.-

(III) *Osmose. Pression osmotique. Diffusion.* Loi de Van't Hoff sur les solutions non électrolysables et étendues.

N° 76. Il y a deux types de frottements au sein des fluides, frottements qui causent une perte d'énergie dans les conduites et les canaux. Quoique ces deux sortes de frottements *coexistent toujours*, il est bon de signaler deux cas limites où l'un d'eux est prépondérant: cas de la *viscosité* et cas des *tourbillons*.

N° 77. Frottement de Viscosité: lorsqu'un fluide s'écoule par un tube de *petite section droite* et à *paroi très lisse*, le frottement est "lamellaire" et dû en majeure partie au glissement des divers filets lamelles liquides les uns contre les autres; en ce cas, le *débit* est proportionnel à la *différence de pression* entre les extrémités terminales

le quotient des (pieds cu. de fluide / par les secondes écoulées) est proportionnel à

$$(p_{amont} - p_{aval})$$

C'est dans ce cas que l'on dit que le frottement est *de viscosité* et dû à ce que la vitesse des filets liquides n'est pas la même au centre qu'au voisinage de la paroi lisse; les filets étant disposés en lamelles d'eau qui glissent les unes sur les autres sans se mélanger *(écoulement lamellaire)*.

N° 78. Lorsque la conduite est de grande section droite *(ou un canal)*, le frottement est dû surtout à la formation de tourbillons. En ce cas, le débit est proportionnel à la *racine carrée* de la *différence des pressions terminales*

$\left(\frac{\text{le nombre de pieds cubes de fluide}}{\text{divisé par les secondes de l'écoulement}}\right)$ est proportionnel à

$$\sqrt{p_{amont} - p_{aval}}$$

Nous nous bornerons pour l'instant à cette simple indication du frottement tourbillonnaire *(eddy friction)*, mais nous étudierons la viscosité des liquides et des gaz immédiatement.

N° 79. Coefficient de viscosité *d'un liquide:* Considérons un tableau d'aire a *(d'un seul côté et non pas a/2 de chaque côté)*. Immergeons-le complètement et disposons-le parallèlement au mur d'un canal à la distance l du bord. Si pour conserver au tableau la vitesse V lorsque l'eau est tranquille *(et que le tableau a déjà acquis cette même vitesse)* il faut déployer une force **F** *(force de compensation de la viscosité)*, on remarque que cette force est *directement proportionnelle à l'aire a* du tableau comme aussi à *V* la vitesse tangentielle du tableau *(relativement au mur)* et d'autre part inversement proportionnelle à la distance l qui sépare le tableau *(mobile)* du mur *(immobile)*.

$\mathbf{F} = \eta \frac{a\ V}{l}$; si la vitesse ne croîssait pas linéairement de zéro à son maximum, on prendrait une petite région et $F = \eta\ a \frac{\Delta V}{\Delta L}$ de façon à profiter de ce que "tout est uniforme dans l'infiniment petit".

Le coefficient de proportionnalité η, qui dépend à la fois de la *nature du liquide (plus ou moins visqueux, pâteux)* et du *système d'unités utilisé* a le nom de *"coefficient de viscosité"* du liquide *(ou du fluide plus généralement)*.

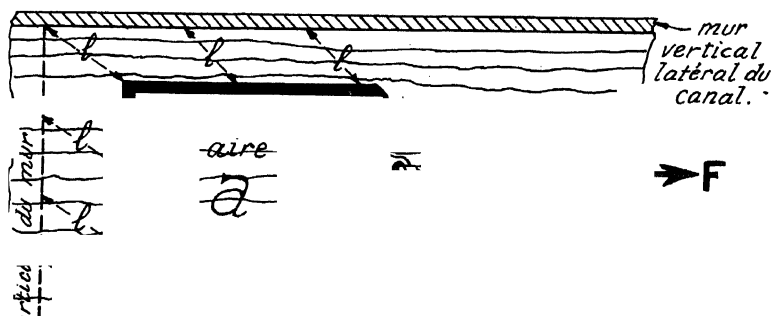



Fig. 58

N° 80. Expression du *débit* d'un fluide *incompressible (liquide)* et visqueux lorsque la *conduite horizontale est lisse et de faible section.*

Soient *(p amont)* la pression du liquide à l'entrée, *(p aval)* la pression à l'issue, Poiseuille a trouvé que le débit

$$I \frac{\text{pieds cubes de liquide}}{\text{secondes écoulées}} = \frac{\pi(\text{Rayon})^4(\text{p amont - p aval})}{8\eta\ (\text{longueur})}$$

c'est-à-dire que l'expérience indique la proportionnalité du débit à la *quatrième puissance du rayon, à la différence des pressions terminales* et à la *réciproque de la longueur*"pourvu que le liquide adhère complètement à la conduite de sorte que *la vitesse du fluide au contact immédiat de la paroi intérieure du tube soit nulle*".

Il y a un débit critique pour une conduite donnée pour lequel et au-dessus duquel il y a formation de tourbillons. Alors la formule de Poiseuille que nous allons démontrer n'est plus valable. Osborne Reynolds a montré expérimentalement que la vitesse critique dépend de la densité D du liquide, de sa viscosité η et des dimensions latérales du conduit r ; v critique = $\frac{1000}{Dr}\eta$ pour d'étroites conduites.

1) La formule de Poiseuille est homogène: le coefficient de viscosité(η) ayant les dimensions de

$\frac{(\text{force})}{(\text{aire})}\frac{(\text{longueur})}{(\text{vitesse})}$ et le débit (I) celles de $\frac{(\text{volume})}{(\text{durée})}$, vérifions l'équation de nature *(ou aux dimensions)*

$$\frac{(\text{longueur})^4 \left(\frac{\text{force}}{\text{aire}}\right)}{\frac{(\text{force})}{(\text{aire})}\frac{(\text{longueur})}{(\text{vitesse})}\cdot(\text{longueur})} = \frac{L^4 F \div L^2}{(F\ L \div L^2 V).L}$$

$$\frac{L^3}{T} = \frac{L^4 F}{L^2 F}\frac{L^2 V}{L\ L} = L^2 V = L^2\left(\frac{L}{T}\right) = \frac{L^3}{T}$$

* *2) Démonstration de la formule de Poiseuille (exigeant le calcul infinitésimal).* Admettons que le liquide transporté par la conduite soit constitué par des filets parallèles coaxiaux, que la vitesse suivant l'axe soit inférieure à la vitesse critique *(de Reynolds)* et que la vitesse soit nulle le long de la paroi *(hypothèse de Poiseuille vérifiée aujourd'hui.*

Lorsque le régime permanent est établi, la vitesse sera la même en tout point de la conduite situé à la distance r de l'axe *(pourvu que la conduite ait partout la même section, c'est une conséquence de la conservation du débit).*

Solidifions *(par la pensée)* les filets liquides coaxiaux pour la commodité du langage.

Un barreau de rayon r aurait ainsi un premier fourreau *(cylindre creux)* de rayon extérieur r + Δr; et comme la vitesse décroît de l'axe à la périphérie, si la vitesse du liquide est V, à la distance r de l'axe, elle serait V-ΔV à la distance r+Δr de l'axe, à l'extérieur du premier fourreau, pour diminuer jusqu'à zéro dans les fourreaux successifs.

Alors le premier fourreau (*entre le barreau et le reste de la conduite)* se trouve ainsi soumis à un certain frottement visqueux

$$F = \eta a \frac{\Delta V}{\Delta r} = \eta (2 \pi r \, l) \frac{\Delta V}{\Delta r}$$

et exerce lui aussi *(action et réaction)* une force *qui s'oppose au mouvement du barreau* le long de la surface intérieure du premier fourreau, donc négative si nous prenons *le sens du débit comme positif pour les forces.*

$$- F = + \eta (2 \pi r \, l) \frac{\Delta V}{\Delta r} \; ; (\frac{\Delta V}{\Delta r} \textit{ est négatif})$$

D'autre part, le barreau est soumis à la force

$$+ F' = + \pi r^2 (p_{amont} - p_{aval})$$

de par la différence des pressions terminales *(il revient en effet au même pour un cylindre de parler de transmission des forces ou de transmission des pressions)* puisque les sections droites terminales sont identiques.

S'il n'y avait que la différence des pressions terminales, le mouvement du barreau liquide serait *accéléré.*

S'il n'y avait que le frottement visqueux exercé par l'intérieur du premier fourreau liquide, le mouvement du barreau liquide serait *retardé.*

Comme le régime est stable et la vitesse inchangée à la distance r, c'est que les deux forces se *neutralisent*

$$\text{zéro} = \eta (2\pi r \, l) \frac{\Delta V}{\Delta r} (\textit{négative}) + \pi r^2 (p_{amont} - p_{aval}) (\textit{positive})$$

ou encore en divisant par πr; puis, séparant les variables

$$\eta \, 2 \, l \frac{\Delta V}{\Delta r} = -r \, (p_{amont} - p_{aval})$$

et enfin: $\left(\frac{2 \eta l}{p_{amont} - p_{aval}}\right) \Delta V = - r \, \Delta$ en intégrant

$$\frac{2 \eta l}{p_{amont} - p_{aval}} \left(V\right)_{V=0}^{V=V} = \left(- \frac{r^2}{2}\right)_{r=R}^{r=r}$$

(puisque nous savons que V=0 le long de la conduite pour r=R) soit donc *à la distance r* de l'axe une vitesse d'écoulement

$$V\text{-zéro} = \frac{p_{amont} - p_{aval})}{4 \eta l} (R^2 - r^2)$$

Exprimons maintenant le débit: I $\frac{\text{volume}}{\text{seconde}}$.

Le premier fourreau a pour section droite *(couronne):*

$$2 \pi r \Delta r$$

(inutile de passer par $\pi (r+\Delta r)^2 - \pi r^2$ comme pour une section d'aire finie car $\pi \Delta r^2$ est négligeable devant $2 \pi r \Delta r$)

Le volume de fluide qui passe à travers le premier fourreau en une seconde est *(V étant la vitesse à la distance r de l'axe)* compris entre $V \, 2\pi r \, \Delta r$ et $(V-\Delta V) \, 2\pi(r+\Delta r)\Delta r$ mais $\Delta V . \Delta r$ étant du second ordre infinitésimal, on peut le négliger et, en substituant à V sa valeur trouvée plus haut on a:

I débit du premier fourreau $\quad 2 \pi r \Delta r \left(\frac{p_{amont} - p_{aval}}{4 \eta l}\right) (R^2 - r^2)$

comme R^2 est une constante

$-2r\ \Delta r$ est la différentielle aussi bien de (R^2-r^2) que de $-r^2$

I débit du premier fourreau $= \left(\frac{P_{amont}-P_{aval}}{4\,\eta\,l}\right)\pi(R^2-r^2)(-1)(\Delta\{R^2-r^2\})$

$$= \frac{(P_{amont}-P_{aval})}{4\,\eta\,l}\pi\,\frac{\Delta\{(R^2-r^2)^2\}}{-2}$$

$$= \frac{P_{amont}-P_{aval}}{-8\,\eta\,l}\,\pi\,\Delta\{(R^2-r^2)^2\}$$

Pour avoir le débit total, il suffit de totaliser les débits de chacun des fourreaux liquides tels que celui considéré

$$I_{total} = \Sigma\,\frac{P_{amont}-P_{aval}}{-8\,\eta\,l}\,\pi\,\Delta\,(R^2-r^2)^2$$

$$= \int_{r=0}^{r=R}\frac{P_{amont}-P_{aval}}{-8\,\eta\,l}\,\pi\,d\,(R^2-r^2)^2$$

$$= \frac{P_{amont}-P_{aval}}{-8\,\eta\,l}\,\pi\left[(R^2-R^2)^2-(R^2-0)^2\right]$$

$$I_{débit\ total} = +\,\frac{P_{amont}-P_{aval}}{8\,\eta\,l}\,\pi\,R^4$$

telle est la formule qui donne le débit dans le cas d'un *liquide* c'est-à-dire d'un fluide pratiquement *incompressible.*

Nous n'avons pas tenu compte

1e) de ce qu'une partie de la différence de pression sert à communiquer de l'énergie cinétique au liquide

2e) de ce que la vitesse le long de l'axe s'accroît pendant une certaine longueur à l'entrée avant de devenir uniforme.

Les praticiens corrigent cette dernière erreur en augmentant la longueur du tube de 1.64 fois le rayon intérieur:

$$l' = l + 1.64\ R$$

Pour tenir compte du fait qu'une partie seulement de la différence des pressions doit surmonter la viscosité, puisque l'autre partie sert à accélérer le liquide *(correction d'autant plus importante que la vitesse augmente)*, appelons *P* viscosité, la fraction de différence des pressions terminales qui sert effectivement à vaincre la viscosité

La puissance $\left(\frac{\text{énergie}}{\text{seconde}}\right)$ ainsi dépensée est P viscosité, I débit.

L'énergie cinétique communiquée au liquide par seconde *(puissance)* est

$$\int_0^R \frac{1}{2}\underset{\text{densité}}{D}\,\underbrace{2\,\pi\,r\,dr\,V\,\Delta t}_{\text{volume}}.\ V^2 \frac{1}{\Delta t} = \int_0^R \pi\,D\,r\,dr\,V^3$$

Mais nous avons déjà vu que la vitesse était reliée à la différence des pressions qui maîtrisait la viscosité par la relation

$$V = \frac{P\ viscosité}{4\,\eta\,l}\,(R^2-r^2)$$

Substituant dans l'intégrale, nous aurons:

$$\int_0^R \pi\, D\, r\, dr\, \frac{P^3 vis.}{64\, \eta^3\, l^3}(R^2-r^2)^3 = \frac{\pi\, D\, P^3 vis.}{64\, \eta^3\, l^3}\int_0^R (R^2-r^2)^3 \frac{\Delta(R^2-r^2)}{-2}$$

$$= \frac{\pi\, D\, P^3 vis.}{128\, \eta^3\, l^3}\left[\frac{(R^2-r^2)^4}{-4}\right]_{r=0}^{r=R} = \left(\frac{P\ vis.\ \pi\, R^4}{8\, \eta\, l}\right)^3 \frac{D}{\pi^2 R^4}$$

Appliquant le principe de la conservation de la puissance :

$$(p\ amont - p\ aval)\, I_{débit} = P_{viscosité}\ I_{débit} + (I_{débit})^3 \frac{D}{\pi^2 R^4}$$

ainsi la pression perdue est seulement:

$$P_{viscosité} = (p_{amont} - p_{aval}) - (I_{débit})^2 \frac{D}{\pi^2 R^4}$$

La formule de Poiseuille corrigée est donc:

$$I_{débit} \quad \left[(p_{amont} - p_{aval}) - \frac{(I\ débit)^2\, D}{\pi^2\, R^4}\right] \frac{\pi \quad R^4}{8\eta\, [1+1.64\ R]}$$

C'est de cette formule qu'il faut se servir pour étalonner un viscosimètre. Le lecteur est prié de se reporter au livre de Newman and Searle "The General Properties of Matter" *(Benn)* pour voir la théorie des différents viscosimètres, la valeur des coefficients de viscosité et leur variation avec la température.

N° 81. *Formule de Stokes* pour le mouvement de petites sphères en milieu très visqueux. *(Cette formule a été le point de départ des recherches de Millikan sur l'électron par l'examen du mouvement de petites gouttes d'huile dans un champ électrostatique).*

La résistance due à la viscosité est: $F = 6\pi\, (\eta)\, R\, V$; V est *la vitesse limite* lorsque le mouvement devient *uniforme,* le poids apparent de la sphère qui tombe contrebalançant juste la viscosité *(force totale nulle):*

(poussée d'Archimède): $\frac{4\pi}{3} R^3 (D_{sphère} - D_{liquide})g = 6\pi\eta R V$ *(résistance visqueuse).*

N° 82. *Débit des fluides compressibles (gaz) à travers des tubes de petite section droite.*

Il ne peut plus être question de conservation du débit vu la compressibilité; *ce qui est constant tout le long du tube c'est la masse qui passe par seconde (et non plus le volume qui passe par seconde).*

D (densité) S *(section droite)* V (vitesse) $= c^{te}$ *(au lieu de $SV = c^{te}$ ce qui n'est pas identique à $DVS = c^{te}$ car la densité est proportionnelle à la pression pour un gaz et non indépendante de la pression comme pour un liquide incompressible).*

Appliquons la formule de Poiseuille à une longueur très petite "(Δx)", le long de laquelle a lieu une chute de pression "ΔP" *(négative si x est compté positivement dans le sens du débit:*

$$\text{I débit } \textit{(pour cette section)} = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\Delta P}{\Delta x}$$

(la raison du signe - est que $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ *est négatif).*

La densité d'un gaz étant proportionnelle à sa pression, la constance de la masse qui passe par seconde peut s'exprimer en remplacant D par kP et VS par I:

$$k(P_{pression})\ (I_{débit}) = \text{constante.}$$

Si P_o et I_o sont les pression et débit à l'entrée du tube, écrivant la constance du produit *(pression × débit)*, on obtient

$$P_o\, I_o = \left(-\frac{\pi\, R^4}{8\eta}\,\frac{\Delta P}{\Delta x}\right) P$$

$$\text{ou } P_o\, I_o\, \Delta x \quad -\frac{\pi\, R^4}{8\,\eta} P\ \Delta\ P$$

et intégrant le long du tube

$$P_o\, I_o \int_{x=0}^{x-1} dx \qquad -\frac{\pi\, R^4}{8\eta}\int_{P_o}^{P_1} P.\ d\ P$$

$$P_o\, I_o\,(1\text{-zéro}) = -\frac{\pi\, R^4}{8\,\eta}\,\frac{(P_1^2 - P_o^2)}{2}$$

$$P_o\, I_o = \frac{(P_o^2 - P_1^2)\ \pi\ R^4}{16\ \eta\ 1}$$

d'où le débit à l'entrée *(volume à la seconde aspiré)*

P_1 étant la pression à la sortie.

N° 83. *Lévigation:* La formule de Stokes fait prévoir une *vitesse limite qui est proportionnelle au carré du rayon de la sphère*

$$\frac{2}{9}\ R^2\,(D_{spc.} - D_{liq.})\ \eta\ g$$

[Aristote a ici raison: *les corps les plus volumineux tombent plus vite que les autres en milieu visqueux, alors que Galilée avait raison dans le vide où tous les corps tombent avec la même vitesse*]

Cette formule peut être employée pour calculer la grosseur des "grains" de pluie d'après la vitesse de chute;*mais il faut que les vitesses soient faibles pour que la formule de Stokes soit applicable (branche AB de la courbe de la figure 59)*

Pour classer les grains d'émeri d'après leur grosseur, on les met au sein d'un liquide *(l'eau généralement)* et en prenant les grains qui se trouvent à une certaine hauteur,on a des grains de même vitesse limite, donc de même grosseur.

Les plus gros sont au fond les premiers alors que les plus fins sont encore près de la surface: c'est cette séparation qui est appelée "lévigation".

Comme on l'a vu en première année, on peut augmenter la valeur de la différence de poids spécifique en "centrifugeant", *c'est comme si l'on pouvait multiplier la valeur de l'accélération "g";* tout comme pour l'écrémeuse, la *vitesse limite qui reste proportionnelle à* R^2 va être beaucoup plus grande et la séparation plus rapide.

N° 84. *Coefficient de résistance et nombre de Reynolds*

Au-dessus de la vitesse critique ($V_{cr} = \frac{100}{Dr}$ *pour les petites conduites)* la résistance de viscosité n'est plus proportionnelle à la vitesse mais au *carré de la vitesse* et n'est plus indépendante de la densité du fluide, mais proportionnelle à la densité du fluide

$$F_{(pour\ V>V critique)} = K\, D_{fluide} S\, V^2$$

On dit que le premier régime tourbillonnaire est atteint *(branche BD de la courbe de la figure 59)*

S *n'est plus l'aire tangentielle a* de la définition du coefficient de viscosité, mais *l'aire de la section droite* d'un cylindre dont les génératrices seraient parallèles à la vitesse, aire définissant le "contour apparent" qui brasse le fluide *(ce que les ouvriers appellent le maître-couple).*

La résistance dépend de la forme du corps, *mais pour des corps géométriquement semblables et semblablement orientés par rapport à la vitesse relative du solide et du fluide,* sa valeur *varie comme le carré des dimensions homologues.*

K dépend de la forme du corps et *2K est appelé le "coefficient de résistance du corps" (nombre pur, indépendant de tout système d'unités).*

Les praticiens font intervenir l'énergie cinétique spécifique du fluide brassé *(l'énergie par unité de volume du fluide de par son mouvement relatif par rapport au solide)*

$$\frac{1}{2}\frac{m}{v}V^2 = \frac{1}{2} D_{fluide} V^2 \text{; alors F prend la forme}$$

$$F_{régime\ tourbillonnaire} = (2K)\left(\frac{1}{2} D_{fluide} V^2\right) S$$

2 K vaut 1.2 pour une surface plane normale à la vitesse

2 K vaut 0.4 pour la sphère.

Ces valeurs sont expérimentales et approchées.

Reynolds *(Osborne)* cherchant une loi de similitude, admet encore que la formule de Stokes soit applicable pour une sphère de vitesse modérée, même lorsque le régime tourbillonnaire est atteint

$$F = 2\,K\,\left(\frac{1}{2}\, D\ fluide\ V^2\right) S = 6\,\pi\eta R\, V$$

On ne pourra satisfaire à cette condition qu'en admettant que 2 K varie avec la vitesse V , *n'étant une constante que si effectivement la force est proportionnelle au carré de la vitesse*

$$2\,K = \frac{3\eta}{DVR} = 3\left(\frac{1}{\frac{DVR}{\eta}}\right) = \frac{3}{N}$$

en posant $N = \frac{DVR}{\eta}$; c'est cette quantité que les techniciens appellent le "nombre de Reynolds". Pour des sphères différentes, dans des fluides différents et animées de vitesses différentes, ils disent que "le coefficient de résistance 2 K" est le même si le nombre de Reynolds est le même; c'est une façon de voir très utile pour standardiser les résultats.

S'il ne s'agit pas de sphères, pourvu que ce soient des corps *géométriquement semblables* et *semblablement orientés* par rapport à la vitesse relative, au lieu de faire figurer les rayons des sphères on introduit une longueur homologue par exemple les côtés des carrés (L) s'il s'agit de plans carrés de même inclinaison.-

$$N = \frac{D\ V\ L}{\eta}$$

"Pour des corps géométriquement semblables et semblablement orientés relativement à la vitesse, la valeur de 2K *(coefficient de résistance)* ne dépend que du nombre de Reynolds".

Si le solide est immobile et le fluide mobile, le mouvement relatif étant le même, la loi s'applique telle qu'elle.

On voit l'intérêt que présente cette loi de similitude pour étudier au tunnel aérodynamique de petits avions immobiles.

Dans le cas de l'écoulement dans un tube long et étroit d'un "liquide" *(au Nº 80)* nous avons indiqué pour valeur de la vitesse critique à laquelle l'écoulement cesse d'être lamellaire pour devenir tourbillonnaire

$$V_{critique} = \frac{1000}{D\ r}\eta$$

Le lecteur a vite reconnu que ce nombre $1000 = \frac{V\ crit.D\ R}{\eta}$ n'est autre que le nombre de Reynolds caractéristique de la turbulence.

Le lecteur est prié de se reporter à l'ouvrage de L.Prandtl and others "Physics of Solids and Fluids" *(Blackie)* pour voir les spectres aérodynamiques et hydrodynamiques.

Nº 85. Variation du "coefficient de résistance" 2K en fonction du nombre N d'Osborne Reynolds. *(fig.59)*.

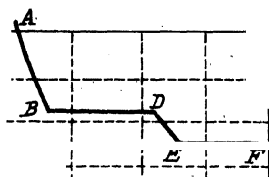
Coefficient de résistance
2K = C

N (nombre de Reynolds.)

Fig. 59

Expérimentalement, la loi de similitude est vraie pour de très grandes variations de vitesse; pour des valeurs de N variant de 10 à plusieurs centaines de mille *(certains rapports disent de 4 à 800000)*; pour toute une série d'appareils géométriquement semblables et semblablement disposés par rapport à la vitesse, on pourra donc représenter *par une seule courbe* les variations du coefficient de résistance.

Cette courbe unique présente quatre branches: 1e branche d'hyperbole équilatère AB *(vitesses faibles, régime de Stokes 2K inversement proportionnel à N, soit $2KN=c^{te}$)* 2e palier BD, régime où la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.

De même que le frottement des solides diminue avec la vitesse *(Cours de première année, page 131, Nº 86B)* il existe un autre palier de régime EF où la résistance est moindre*(les 2/5 selon Eiffel)*. Entre ces deux paliers BD et EF, Prandtl a constaté une courbe assez mal définie DE correspondant peut être ? à des états instables.

Nº 86. *Anémomètre de Robinson:* il est constitué par deux hémisphères creuses. Comme à *égalité de contour apparent S,* la résistance F *(et par suite 2K le coefficient de résistance*

$$2K = \frac{2\ F}{D_{fluide}\ \ V^2 S}\ )$$

est environ *quatre fois plus grande lorsque le vent se heurte à la face concave* que lorsqu'il souffle sur *la face convexe,* il y a mouvement continu, *toujours dans le même sens.*

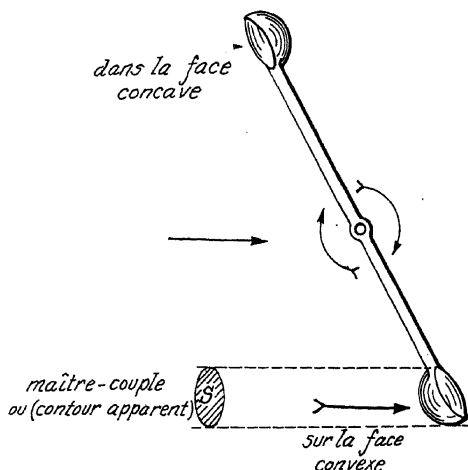



Fig. 60

On voit par ce premier exemple que la forme du "fuselage" intervient grandement dans le coefficient de résistance;c'est *l'importance des tourbillons qui se forment à l'arrière qui augmente le coefficient de résistance (les premiers temps de l'aviation, on ignorait ces tourbillons et l'on disposait en quinconce les moteurs de façon que la seconde rangée reçoive de l'air passant entre deux moteurs de la première rangée et ne soit pas "protégée par la première rangée"; aujourd'hui, on se dispense de cet enfantillage connaissant les spectres aérodynamiques qui montrent que les tourbillons lèchent l'arrière de la première rangée) à égalité de "contour apparent"*

Moulinet de Charles Renard
(frein aérodynamique)
Tous les moulinets de Renard sont géométriquement semblables et caractérisés par leur μ « module » ou distance entre chacun des repères.
ligne de foi
La longueur totale de la barre est de 24 modules
On peut se servir du moulinet sans plaques, avec petites plaques (petits plans) et avec les « grands plans »
barre (ou bras) en frêne ou chêne
μ
Loi de Renard « la puissance de deux moulinets semblables varie comme la cinquième puissance des modules ».
Palette en aluminium
S = k² μ² ; F/S = k² μ² ; C = b F ; b = k μ
C = (k μ)(k² μ²)(k² μ²) = k⁵ μ⁵
et par suite la puissance
W = C Ω = k⁵ μ⁵ Ω
F/S = V² = R² Ω
= (k μ)² Ω
prop à k² μ²
Limite de sécurité
50 CV
M
Abaques de Renard
barre avec grands plans tout au bout
barre avec petits plans tout au bout
25 CV
barre dénuée de plans
C
600
3000 R.P.M.

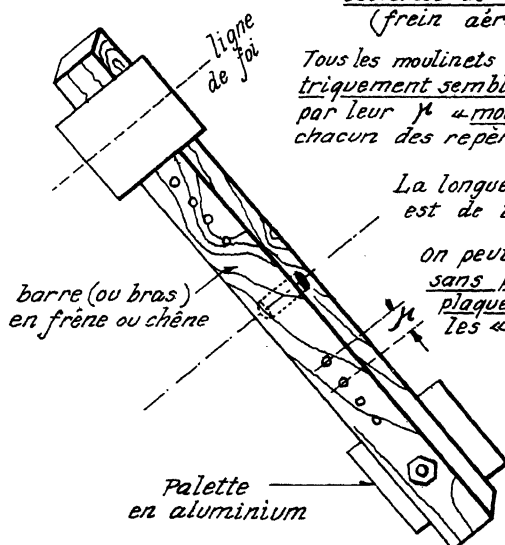
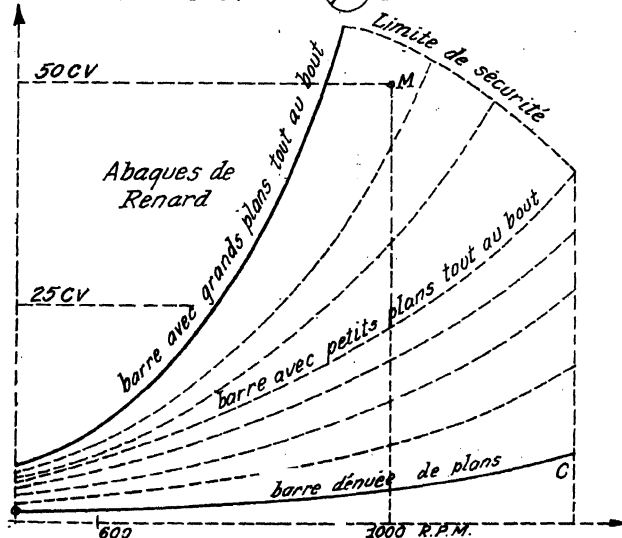



Fig. 61

S (ce que les techniciens appellent "maître couple"), prenant pour unité de coefficient de résistance celui de la sphère pleine.

1e) Le plan normal au courant d'air a un coefficient *triple* de celui d'une sphère pleine dont l'un des grands cercles a la même aire que le plan: le colonel Renard a construit des abaques indiquant la résistance que présentent deux palettes d'aluminium dont les plans passent par l'axe de rotation et cela pour diverses vitesses; les divers "moulinets" de Renard obéissant à la loi de similitude énoncée par Reynolds, mais il faut que les distances à l'axe des plaques soient aussi dans le même rapport et alors deux moulinets "semblables" ont des couples résistants qui sont entre eux comme les cinquièmes puissances des dimensions homologues à égalité de vitesse angulaire *(voir fig. 61)*.

2e) Un cylindre plein dont la section droite est normale au vent a un coefficient *deux fois et demi* celui de la sphère pleine.

3e) Si le cylindre plein est porteur d'un bec conique à l'avant, le coefficient de résistance est le même que celui de de la sphère pleine. vent

4e) Enfin, si le corps a la forme d'un poisson ou fuseau *(pisciforme)* le coefficient de résistance n'est plus que le *dixième* de celui de la sphère pleine.

Le lecteur est prié de se reporter aux spectres aérodynamiques correspondants et de noter que la forme du poisson est celle pour laquelle les tourbillons sont le plus effilés.

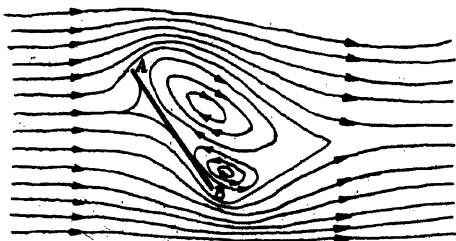
N°. 87. *Plan incliné de l'avant à l'arrière mais non pas latéralement (gouvernail de profondeur) dissémétries des tourbillons.*

Plan incliné

Fig. 62

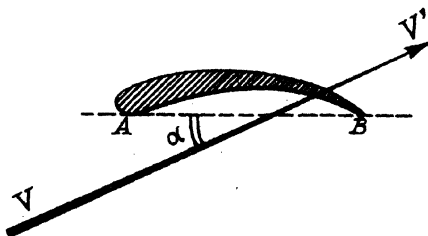
1e) La résistance F n'est plus tout à fait perpendiculaire au plan *(plan incliné par rapport au vent)* mais penchée un peu vers l'arrière.

2e) Le point d'application de la résultante F n'est plus au centre de gravité du plan *(comme ce l'était par symétrie pour le plan normal au vent); le désaxage de la résultante est vers l'avant* et cela d'autant plus que l'inclinaison est plus grande.

3e) La projection verticale P de la résistance F s'appelle la "portance" ou poussée

4e) La projection horizontale T de la résistance F s'appelle la "traînée" *(c'est cette dernière que doit vaincre le moteur)*.

5e) Le quotient de la portance par la traînée est dit"la finesse" P/T , quotient qui peut atteindre 7 pour un plan, mais qui peut atteindre 17 si on incurve la surface en forme d'aile.

N° 68. *Polaire d'une aile d'avion.*
Plan de référence: le plan tangent au sphéroïde avant et passant par la queue.

Profil d'une aile d'avion

AB plan de référence

VV' vitesse du fluide par rapport à l'avion.

α inclinaison positive dans le cas de la figure.

Fig.63

Désignons par (α) l'angle de ce plan de référence avec la vitesse.

Pour le régime BD *(de la fig. 59),* c'est-à-dire depuis la vitesse critique jusqu'à trois cents pieds à la seconde, la résistance totale **F** et ses deux composantes *(portance P et traînée T)* sont proportionnelles *au carré de la vitesse*

$$P = K_P \, D_{fluide} \, V^2 S$$

$$T = K_T \, D_{fluide} \, V^2 S$$

Les coefficients K_P et K_T ne dépendent que *de l'angle* α pour une aile donnée [*ou pour un même rapport de l'envergure (ou largeur) à la profondeur (ou longueur)*].

Plaçant un modèle réduit dans un tunnel aérodynamique, en vertu de la loi de similitude, on connaîtra $2K_P$ et $2K_T$ les coefficients de portance et de traînée pour diverses valeurs de (α) *(fig.65)* puis éliminant graphiquement α on pourra construire K_P en fonction de K_T *(c'est la courbe intéressante commercialement puisque les ordonnées représentent la charge transportable et les abscisses la dépense du moteur).*

C'est cette dernière courbe: la portance en fonction de la traînée que l'on nomme "polaire de l'aile" *(fig. 66)*

F
résistance
Portance
Traînée
A
B
plan de référence.
α
V
Vitesse du fluide
fil à plomb

Fig. 64

2K
coefficients de résistance
2Kp
Cp
2KT=CT
2 Kp=Cportance
α
-5°
0
+5°
+10°
+15° inclinaison
1
=+10°
0.5
α=0
α=5°
0.2
2KT=CTraînée.

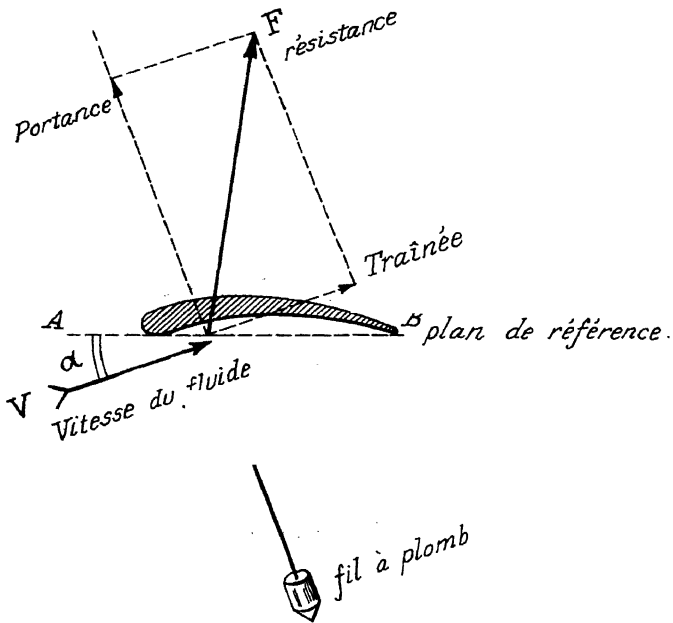
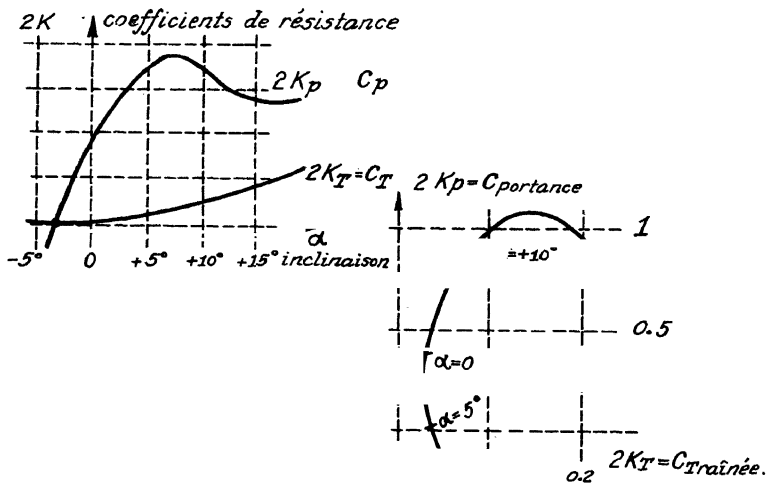



Fig. 65

N° 89. Plan incliné latéralement *(mais vertical, gouvernail de bateau, gouvernail de direction d'un avion) (fig. 66).*

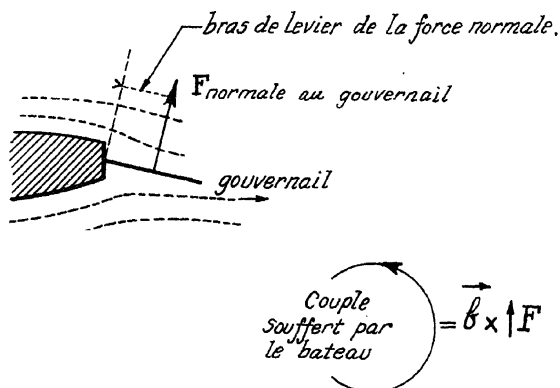



Fig. 66

Le gouvernail est d'*autant plus efficace que la vitesse est plus grande;* la composante normale de la réaction du fluide fait tourner le bateau ou l'avion dans un sens opposé à celui dont on a tourné le gouvernail.

N° 90. *Lubrification.* Le cas des films minces *(monomoléculaires)* concerne la tension superficielle et les spectres de rayons X. L'étude expérimentale de Adam et l'interprétation actuelle de Langmuir a éclairci le problème.

Nous le traiterons en troisième année.- Nous dirons un mot ici de la *lubrification visqueuse,* c'est-à-dire du cas où *l'épaisseur de lubrifiant est notable (Hardy avait suggéré en 1920 de distinguer trois cas suivant l'épaisseur de lubrifiant*
1) une épaisseur de 1 μμ ou du même ordre.
2) un "enduit" (smear) très mince mais visible.
3) une "noyade" complète lorsque les surfaces solides se meuvent dans une mare de lubrifiant).

C'est le dernier cas qui relève de ce chapitre et est le plus simple parce que l'orientation des molécules par affinité chimique n'intervient pas comme dans les films minces d'huile *(les liquides inactifs comme la glycérine, qui n'ont pas d'onctuosité, et ne valent rien pour le graissage à film mince sont aussi bons que les liquides actifs comme l'huile de ricin lorsque la couche d'huile est considérable).*

Les forces de frottement visqueux sont maxima contre les faces solides et minima au milieu de la couche d'huile, le lubrifiant étant dans un état homogène tout autour dans un même filet tangentiel et hétérogène quand on passe d'un filet à un autre en voyageant normalement aux surfaces frottantes.

Si le lubrifiant visqueux est comparé à un corps solide élastique, on dit que "le lieu des points où le lubrifiant pourra céder, perdre sa cohésion, est selon toute probabilité le filet moyen équidistant des deux solides".

Type « Nieuport » (très mince).

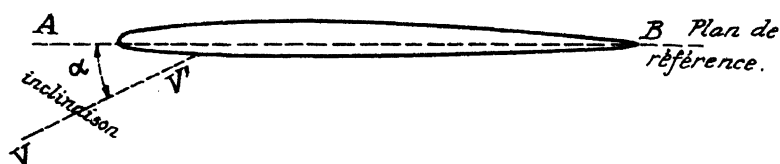
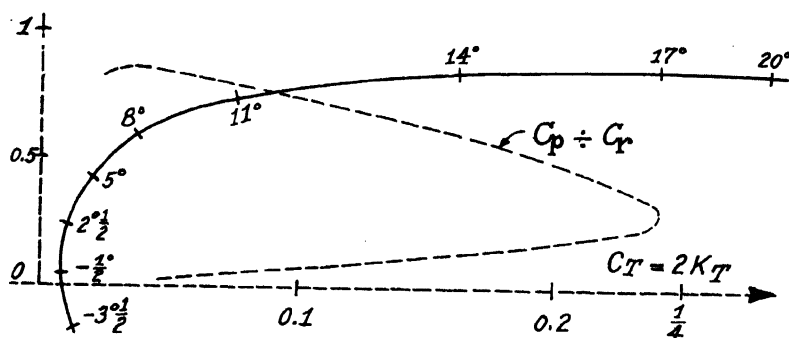



Fig. 67

Type « Bernard » (très épais).

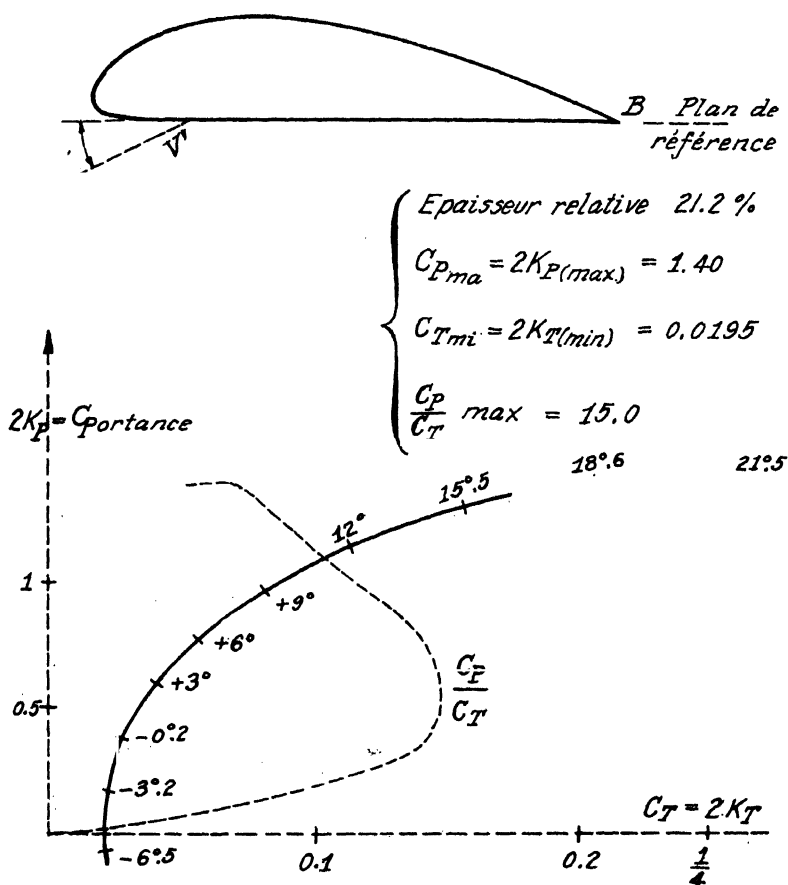



Fig.68

Pratiquement lorsque le lubrifiant est abondant *(complete flooding, flotation friction)* par opposition aux films minces de la machinerie délicate *(boundary friction)* ne pas se soucier de la réclame pour acheter des lubrifiants actifs, puisque leur supériorité ne se manifeste que dans les films minces.

N° 91. *Tension superficielle*. Une molécule de matière n'exerce d'action appréciable sur les autres molécules qui l'entourent que jusqu'à une certaine distance dite "rayon de la sphère d'activité de la molécule considérée".

Les surfaces de séparation de deux liquides, ou d'un liquide et d'un solide, ou d'un liquide et d'un gaz sont le siège de phénomènes dits de "tension superficielle" ou encore de "capillarité", car c'est par la tension superficielle qu'on explique l'ascension de l'eau dans les tubes très étroits.

Remarquer qu'il ne s'agit pas là d'une cohésion volumique comme les forces qui maintiennent les atomes en place au sein d'un cristal mais *(d'ailleurs le mot "superficiel" l'indique très justement) tout comme si une véritable membrane élastique résultait des attractions des petites molécules dont la mosaïque tapisse et compose la surface de séparation des deux milieux.*

Lorsqu'un solide fond, à mesure que les mouvements désordonnés provoqués par la chaleur rompent les attaches qui reliaient les atomes ou les ions, la tension superficielle tend comme nous le verrons à former une "boule de liquide" pour avoir le *minimum de surface extérieure (minimum d'énergie, équilibre).*

C'est pour la même raison *(minimum d'aire extérieure)* que de petites gouttes de mercure rapprochées s'agglomèrent d'elles-mêmes alors qu'il faut tapoter *(travailler)* pour séparer une grosse goutte en plusieurs et augmenter ainsi la surface extérieure de l'ensemble. C'est la capillarité qui permet d'utiliser le stylographe et chacun sait qu'il faut le secouer pour en extraire des gouttes.

Les gouttes de mercure d'autant plus qu'elles sont grosses s'éloignent de la forme sphérique parce qu'à la tension superficielle "effet de peau", se superpose l'accélération de gravité qui aplatit le sphéroïde *(effet volumique).*

Nous allons d'abord établir la relation fondamentale en capillarité, celle qui relie les courbures d'une membrane élastique à la différence des pressions *(entre l'intérieur et l'extérieur)* et à la tension superficielle S.

Nous admettrons comme hypothèse fondamentale que toute surface libre d'un liquide possède une *"énergie superficielle" proportionnelle à l'étendue de surface libre, donc une énergie par unité d'aire libre:*

$$\frac{\text{ergs}}{\text{cm}^2}$$

(Nous verrons plus tard que ce concept peut se ramener à celui de T "tension" ou dynes/cm comme le suggère l'égalité des équations aux dimensions S et de T.

$$S \qquad \frac{(\text{dynes})(\text{cm})}{(\text{cm})\ (\text{cm})} \qquad)$$

Soit un élément ABDE de membrane courbe *(portion de vessie gonflée ou partie de bulle de savon)*. En géométrie et surtout

en calcul différentiel et intégral, on montre que pour une petite portion de surface ainsi considérée existent une infinité d'arcs parmi lesquels un rayon maximum *(LOM de rayon R_2)* et l'autre de rayon minimum *(KOP de rayon r_1)*.

L'aire d'une telle surface est approximativement (LOM) (KOP) soit x y avec les notations de la fig *69*

Supposons que, en gonflant la bulle *(ou la baudruche ou la vessie)* par une surpression (p int. - p ext.), ou pression de jauge si l'extérieur est l'air atmosphérique, la portion de surface élastique considérée se déplace normalement de δz = OO' et devienne A'B'D'E' surface ayant pour nouveaux rayons de courbure principaux L'O'M' = $x + \delta x$ et K'O'P' = $y + \delta y$

L'augmentation de volume est $\delta v = x \cdot y \cdot \delta z$ *(tant que δz est assez petit pour que la pression de jauge ne varie pas sensiblement, puisque δx et δy sont des infiniment petits).*

Le travail de cette pression de jauge est *(voir p.220. première année)*

$$p_{jauge}\ \delta v = p_{jauge}\ (x \cdot y \cdot \delta z)$$

Or l'aire de la membrane a passé de

$$2\ x\ y \quad \text{à}\ 2\ (x + \delta x)\ (y + \delta y)$$

car il y a deux surfaces libres, l'intérieure comme l'extérieure en contact avec l'air.

L'énergie superficielle a donc passé de la valeur $S(2xy)$ à la valeur $S\ (2)\ (x+\delta x)\ (y+\delta y)$.

Ecrivant que l'augmentation potentielle d'énergie élastique est due au travail de la pression de jauge *(principe des travaux virtuels)*

$$p_{jauge}\ \delta v = p_{jauge}(x\ y\ \delta z) = 2S\left[x\ \delta y + y\ \delta x\right]$$

Nous reportant à la figure 69 .. les triangles curvilignes semblables $LOMC_2$ et $L'O'M'C_2$ et de même $KOPC_1$ et $K'O'P'C_1$ nous donne immédiatement:

$$\delta x = \frac{x}{R_2}\delta z \quad \text{et}\ \delta y = \frac{y}{r_1}\delta z$$

ce qui par substitution dans la relation énergétique donne:

$$p_{jauge}(x\ y\ \delta z) = 2\ S\left[x\ \frac{y}{r_1}\delta z + y\ \frac{x}{R_2}\delta z\right]$$

soit en simplifiant par le facteur commun $x\ y\ \delta z$,

$$p_{jauge} = 2\ S\ \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_2}\right]$$

Remarque I: S'il s'agissait de la surpression d'une bulle gazeuse à l'intérieur d'un liquide (1) ou d'une goutte de liquide (2), il n'y aurait plus qu'une seule surface de séparation entre liquide et air donc

$$(1)\quad p_{\substack{surpression\\ intérieure}} = 1\ S\ \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_2}\right]$$

$$(2)\quad p_{surpression} = 1\ S\ \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_2}\right]$$

P' courbure maximum 1/(r1+δy)
courbure maximum 1/(R2+δz)
B'
D'
M'
δz
1/r1
δz
arc de courbure maximum y
(petit rayon)
A'
B
P
M
arc de courbure maximum 1/R2
(grand rayon)
x
K'
O
D
90°
A
K
δz
E'
E
r1
r1
r1
R2
courbure maximum
courbure maximum (1/r1)
C1
R2
R2
NORMALE
C2
{LOM = x
{L'OM' = x + δx = ((R2 + δz)/R2) x
{KOP = y
{KOP' = y + δy = ((r1 + δz)/r1) y
{δx = x/R δz
{δy = y/r1 δz

Fig. 69

Ces relations sont souvent désignées sous le nom de formules de Laplace et deviennent 2 S (2/R) ou S (2/R) si les portions de surface libre peuvent être considérées comme sphériques.

Remarque II: La figure et la formule se rapportent au cas usuel où la surface tout en ayant deux courbures a les deux centres de courbure du même côté *(concave)* sur la normale. Le lecteur qui désirerait étudier en détail les autres cas que le physicien belge PLATEAU a réalisés avec les liquides glycériques est prié de se reporter au merveilleux livre de "Mécanique" d'Ernst Mach *(traduit par Emile Bertrand)*, pages 366 à 375.

N° 92. *Etirement d'une membrane plane:* mettant en évidence l'identité de S *"l'énergie par unité de surface libre"* et de T *"la tension par unité de longueur (du périmètre de raccordement du solide et du liquide).*
(La théorie Adam-Langmuir des films redonne de l'actualité à ce problème qui paraissait à certains une pure élégance d'équations aux dimensions).

Fig. 70

Lorsque par suite de l'application de la force F *(légèrement supérieure à la tendance de la lame à diminuer de surface)* la surface de la lame glycérique augmente passant de l'aire 2 ab à l'aire 2(a+δa)b: l'énergie superficielle augmente donc de

$$[2\ (a+\delta a)\ b]\ S - [2\ ab]\ S = 2\ b\ S\ (\delta a)$$

La force F qui a accompli ce travail a donc pour valeur

$$\frac{\text{énergie}}{\text{chemin selon la direction de la force}} = \frac{2\ b\ S\ (\delta a)}{\delta a}$$

$$F = 2\ b\ S$$

Mais *(l'épaisseur de la lame elle-même étant négligeable)* le périmètre de raccordement ABCD du solide mobile à la lame est [2b + 2 *(épaisseurs)*] $\simeq$ 2 b

C'est dire que *"la force par unité de longueur du périmètre de raccordement ou tension superficielle T"* a pour valeur $\frac{F}{2\,b}$ donc coincide en nombre et en dimensions avec l'énergie par unité de surface libre *(ce que nous faisait prévoir l'égalité des dimensions*

$$\frac{dynes}{cm} = \frac{ergs}{cm^2}\ )$$

N° 93. *La capillarité est un phénomène de pression* et la section du tube qui intervient est celle du ménisque de raccordement *(Jurin)*; notion très utile en électrocapillarité pour la mesure des très petites quantités d'électricité notamment en physiologie.

Expérience de Jurin (les dimensions transversales ont été exagérées par raison de clarté).

Ayant aspiré le liquide dans divers tubes *capillaires et de même section droite au sommet,* mais de sections bien différentes à la base, la dénivellation est la même pour tous.

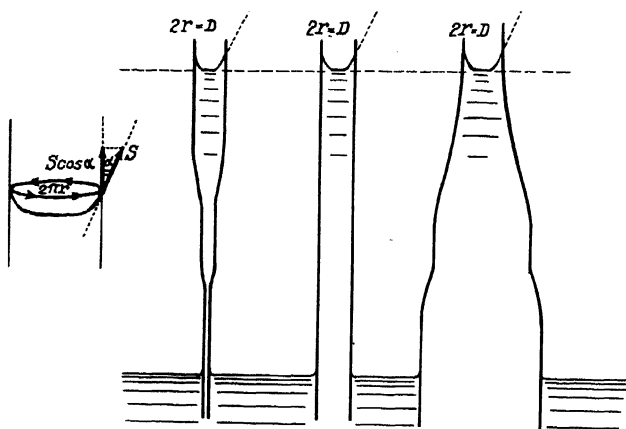



Fig. 71

Le volume de liquide maintenu soulevé en vertu de la tension superficielle ne dépend donc pas seulement de la hauteur, mais dépend aussi de la forme du vase *(alors que la pression ne dépend que de la hauteur: p. 66. tome I).*

Si nous avions affaire à un phénomène "volumique", la force S 2 π r cos α qui tire chacun des trois ménisques vers le haut ne soulèverait qu'un poids de liquide équivalent; mais *on ne peut dire cela que pour le vase cylindrique;* pour le vase de gauche, le poids de liquide est bien inférieur à la force produite par la tension capillaire (T cos α = S cos α : projection verticale de la tension) multipliée par (2 π r: le périmètre de raccordement du liquide au solide); pour le vase de droite, c'est le poids de liquide qui l'emporte sur la succion capillaire.

On peut bien *abréger les calculs*, supposer toujours le vase capillaire cylindrique avec une section partout égale à celle au droit du raccordement, mais il ne faut pas oublier que comme pour les vases communicants de Pascal, il s'agit de *transmissions de pressions et non de forces.*

Vu l'importance capitale de l'absence de paraffine pour les expériences de capillarité, nous indiquerons deux moyens rapides de nettoyage:

Note I: Pour dégraisser *le verre,* on le lave à l'acide azotique *(nitrique)* concentré, *(puis si la graisse s'en va mal à l'acide sulfurique concentré additionné de quelques gouttes d'acide nitrique concentré).* Rincez à l'eau, enlevez l'eau par de l'alcool éthylique, lavez à l'éther sulfurique et laissez sécher à l'étuve ou pompez.

Note II: Pour décrasser *le mercure,* s'il est gras, lavez-le à la benzine ou au tétrachlorure de carbone, rincez à l'éther pour enlever benzine ou tétrachlorure. Puis le faire tomber par petites gouttes *(d'un entonnoir dont on a étiré le bec)* dans une colonne d'acide azotique étendu *(1/3 d'acide et 2/3 d'eau distillée).* La colonne ayant 4 à 5 pieds et étant terminée par un tube capillaire, le mercure qui sortira par le bec capillaire sera pur au bout de trois ou quatre répétitions. Il peut arriver qu'il reste un peu d'azotate de mercure, c'est pourquoi on lave à l'eau pure ce mercure *(plusieurs fois)* en le faisant tomber goutte à goutte dans une longue colonne d'eau distillée.

Ensuite on lave à l'alcool éthylique, puis à l'éther et l'on étuve à 100° centigrade ou l'on pompe.
(C'est parce que l'azotate de mercure est très soluble dans l'eau que l'acide nitrique est préférable à tout autre pour nettoyer le mercure).

N° 94. Raccordement d'un liquide qui mouille avec un plan vertical lisse et bien propre *(Courbe capillaire):* la figure 72 représente le profil *(loin des bords de la lame qui constitue le plan vertical).*

Il est clair que le raccordement est comme une lentille cylindrique *(l'un des rayons de courbure de la surface liquide étant infini: la génératrice normale au plan de la figure étant la droite de raccordement).*

L'autre rayon de courbure *(variable de B en P puis en Q)* est celui que l'on estimerait d'après le profil en traçant deux normales voisines et en piquant la pointe du compas à leur point de rencontre pour tracer le cercle tangent *(si l'on avait une bonne photographie du profil).*

Comme il n'y a qu'une seule surface libre eau-verre, la formule du N° 91 devient:

Différence de pression des deux côtés de la membrane *(peau)* au point P: *(surpression de l'intérieur sur l'extérieur)*

$$p_P = S\left(\frac{1}{r_P} + \frac{1}{\infty}\right) = S\left(\frac{1}{r_P}\right)$$

Cette surpression de l'intérieur de la peau du liquide sur la pression extérieure *(barométrique)* est mesurée par la dénivellation hydrostatique relativement au plan horizontal du reste du liquide *(au-delà de Q).*

$$p_P = S\left(\frac{1}{r_P}\right) = y\,D\,g \quad \textit{(page 65 Tome Ier)}$$

Mais la formule du rayon de courbure est $r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$; y, y' et y" étant *les valeurs au point P.*

D'où par substitution à r de cette expression, on a l'équation différentielle de la courbe capillaire:

$$\frac{S}{(1+y} \quad y\,D\,g \qquad \text{ou}$$

$$\frac{S\,dy'}{(1+y'^2)^{3/2}} = D\,g\,y\,dx$$; soit en posant $\frac{S}{Dg} = b^2$ pour abréger l'écriture.

$$\frac{\frac{dy'}{dx}}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{y}{b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dy'}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad \frac{y\,dx}{b^2}$$

Pour avoir la différentielle de y'^2, $d(y'^2) = 2y'dy'$, il nous faut multiplier les deux membres par 2 y'

$$\frac{2\,y')dy'}{1+y'^2)^{3/2}} = \frac{y}{b^2}\,dx \quad (2\,y')$$

mais, à cause de $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'\,dx = dy$; on a donc dans le premier membre la variable y' seulement et, dans le deuxième, la variable y seulement

$$\frac{d\,(y'^2)}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{b^2}\,d\,(y^2)$$

ce qui devient par intégration membre à membre

$$\frac{-2}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y^2}{b^2} + C \quad \textit{(constante)}$$

(l'élève est prié de dériver cette dernière expression pour constater qu'elle donne bien la première).

Pour déterminer la constante C, remarquons que au point Q pour y = o y' = o

$$\frac{-2}{\sqrt{1+0^2}} = \frac{0}{b^2} + C \quad ;\ \text{d'où} \quad C = -2$$

et la relation entre y et y' devient donc

$$\frac{y^2}{b^2} = 2 - \frac{2}{\sqrt{1+y'^2}}$$; ou, explicitant y'

$$dx \quad = \quad - \overline{\quad 2b^2 - y^2}$$

En changeant de variable, posant: y = 2b sin φ, il vient en se rappelant que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}$ *(fonction de fonction),*

$$\pm\frac{dx}{b} = d\varphi\left[\frac{1}{\sin\varphi} - 2\sin\varphi\right]$$

La figure montre clairement que la pente $\frac{dy}{dx}$ est *toujours néga-*

tive, ce qui permet d'affirmer sans plus longue discussion que *le signe (-) convient seul,* et que $y < 2b$ et même $y < b\sqrt{2}$ *(réalité et valeur finie pour y')*

Courbe de raccordement capillaire d'un liquide qui mouille à une face plane verticale lisse et bien dégraissée.

(ϑ étant l'angle de raccordement limite de α pour $x = 0$; $y = \overline{CB}$)

Fig. 72

$$-\frac{dx}{b} \quad \sin\varphi^{-}\ 2\sin\varphi\ d\varphi$$

Intégrant à nouveau, il vient:
(en se rappelant que

$$\frac{d}{d\varphi}(\log tg\frac{\varphi}{2}) = \frac{d}{dx}(\log\frac{\sin\varphi/2}{\cos\varphi/2})$$

$$= \frac{(\cos\varphi/2\ \cos\varphi/2)1/2-(\sin\varphi/2)(-\sin\varphi/2)1/2}{\cos^2\varphi/2\ (\frac{\sin\varphi/2}{\cos\varphi/2})}$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sin\varphi/2\ \cos\varphi/2} = \frac{1}{\sin\varphi}\quad)$$

$$\boxed{-\frac{x}{b} = 2\cos\varphi + \log\tan\varphi/2}$$

pour $\varphi = 0$, $y = o$, $x = \infty$, c'est le raccord asymptotique en Q et pour les grandes valeurs de x au-delà aussi bien.

$\left|(\frac{dy}{dx})_B\right|$ est la tangente du complément β de l'angle de

contact ϑ $\left|(\frac{dy}{dx})_B\right| = \cot\vartheta$; tirons ϑ en substituant $|\cot\vartheta|$ à $\bar{x}'_B$ dans le résultat de la *première intégration:* il vient

$2-\frac{2}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$ ou y_B b $\sqrt{2}\sqrt{1-\sin\vartheta}$; mais on a posé $b^2=\frac{S}{gD}$,

d'où

y_B $\sqrt{1-\sin\vartheta}$

hauteur à laquelle s'élève l'eau contre la plaque — (ϑ) angle de contact

Cette relation est très utile car il est beaucoup plus facile de mesurer (y_B) que de mesurer l'angle de contact (ϑ). Deux visées au micromètre oculaire suffisent pour mesurer y_B, .

* Le lecteur qui aimerait obtenir l'équation de la courbe capillaire est prié de se reporter à la page 163 du livre de Newman and Searle "The General Properties of Matter" *(Benn)*.

Note: Si l'angle de raccord est nul [*en plongeant au préalable la lame puis en la retirant un peu par exemple, ou bien en élevant le niveau de l'eau dans le vase et (sans toucher à la lame) lassant diminuer d'un centimètre le niveau moyen*]

alors y_B $\sqrt{\frac{2}{g}\frac{S}{D}}$ puisque $\frac{dy}{dx}=\infty$ et ϑ 0.

N° 95. Forme d'une goutte de mercure *(très propre)* sur un plan horizontal de verre *(bien dégraissé) (ou d'une goutte d'eau sur un gâteau de paraffine)*.

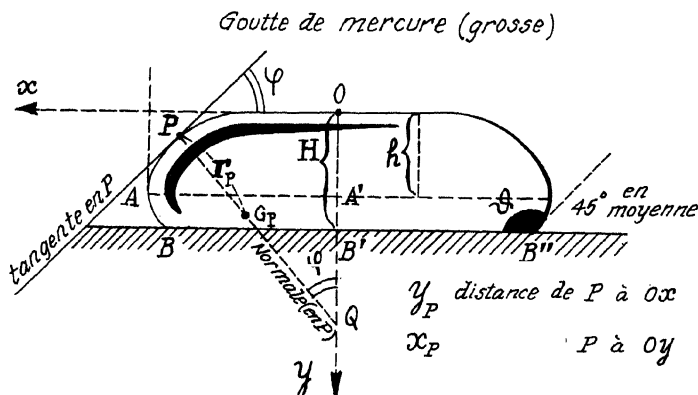
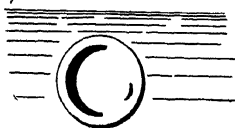
Si la goutte est assez grosse, la surface supérieure est horizontale et son diamètre équatorial est grand devant sa hauteur.

(Pour la goutte d'huile la forme sphérique est parfaite parce que la pesanteur est annulée par la poussée d'Archimède.)

Fig.73

Au point P *(contrairement au problème précédent)* la pression est supérieure à celle qui règne au centre du phénomène.

$$p_P = p_o + y_P D g$$

et $p_P - p_o = 1 S \left(\frac{1}{r_P} + \frac{1}{R_P} \right) \simeq 1 \quad S \left(\frac{1}{r_P} + \text{zéro} \right)$

$P C_P = r_P$ étant le rayon *(au point P)* du profil de la goutte *(de la tranche radiale)* ; R_P serait le rayon de courbure de l'arc qui passe par P et est perpendiculaire au plan de la fig. 73. $R_P = P Q$ ce qui par hypothèse est grand comparé à r. - *(Ne pas confondre avec x le rayon du parallèle car les rayons de courbure principaux sont sur la normale à la surface).*

Des deux équations ci-dessus *(dont la seconde est d'autant plus vraie que la goutte est plus grosse)* on tire

$$\frac{S}{r_P} = y_P D g$$

La courbure de ce profil radial $\frac{1}{r_P} = \left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_P$, où dl est un élément de la méridienne OPAB dans le voisinage du Point P.

Mais la projection dy de l'élément dl sur l'axe des y*(composante verticale de dl)* est $dy = (dl) \sin\varphi$; d'où

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dl} = \frac{d\varphi}{dy} \quad \sin \varphi$$

d'autre part, on a trouvé $\frac{1}{r_P} = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{y D g}{S}$; égalant les deux valeurs de $\frac{d\varphi}{dl}$, on a:

$\frac{d\varphi}{dy} \sin \varphi = \frac{y D g}{S}$, ou en séparant les variables

$S \sin \varphi \, d\varphi = Dg \, y \, dy$; ce qui par intégration donne:

$S(-\cos \varphi)_0^{\varphi} = \frac{Dg}{2} (y^2)_0^y$, soit en prenant la différence des valeurs de chaque primitive aux deux limites

$$S (1 - \cos \varphi) = \frac{Dg}{2} (y^2 - o)$$

Au point A, sur l'équateur de la goutte, $y = OA' = h$ et $\cos \varphi = o$ $\quad \frac{2 S}{Dg} = h^2$

Au point B, à la base de la goutte, $y = OB' = H$ et $\varphi = \vartheta \simeq 135°$

$$\frac{D g H^2}{2} = S (1 - \cos \vartheta)$$

De la connaissance de H et de h on peut donc déduire la valeur de la tension S et de l'angle de raccordement.

Pour une goutte fraîchement formée sur un verre très propre $\pi - \vartheta = 41° 5'$; cet angle augmente à la longue et atteint 52°40' *(nous avons indiqué une moyenne arrondie 45º)*, à 20°, la valeur de la tension superficielle est de 546

On peut donc prévoir h et H par le calcul et vérifier ensuite expérimentalement pour une goutte assez grosse. *La formule est d'autant moins exacte que 1/PQ est plus grand.- Pour une goutte moyenne, en tenir compte: en regardant sur la goutte, il est facile de juger si elle agit comme un miroir plan ou comme un miroir convexe dans sa partie centrale; si l'on se voit rapetissé, la théorie élaborée n'est pas valable.*

La figure 74 montre une bulle d'air sur l'eau *(telle dans un niveau à bulle)*. C'est à peu près la forme symétrique de celle de la goutte de mercure *(vue en miroir)*.

Bulle d'air sur l'eau.

Fig.74

N° 96. Mouvements capillaires dans les tubes capillaires coniques horizontaux.

Si le liquide mouille *(fig.75)* la goutte s'allonge et se dirige sans cesse vers l'extrémité la plus effilée vu que la "succion" est plus forte là où les rayons de courbure sont plus petits *(ne pas dire que la force est peut-être moindre du petit côté parce que la section droite est petite, car il s'agit d'un phénomène de pression)*.

Coin capillaire (eau)

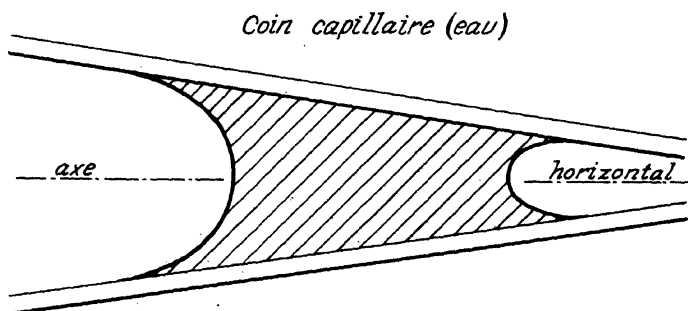



Fig. 75

Si le liquide ne mouille pas, fig.76, le ménisque se raccourcit et s'éloigne de l'extrémité effilée; le raccord n'est jamais tangentiel.

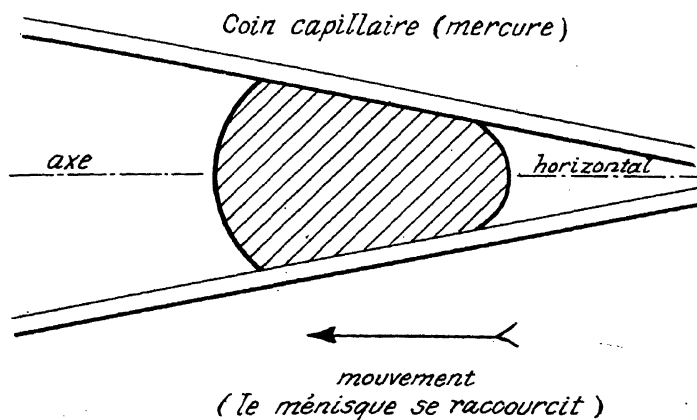



Fig.76

<u>N° 97. *Le compte-gouttes de TAIT.*</u>

Si l'on opère assez lentement pour que chaque goutte ait le temps de s'arrondir et de ne tomber que lorsque son poids est à peu près égal à la succion capillaire *(si l'opérateur est nerveux, la goutte "ayant de la vitesse" tombera avant que son poids n'égale la succion)*, on pourra déduire une relation *(voir fig.77)* entre le volume moyen d'une goutte et la tension superficielle - si par ailleurs on connaît le diamètre extérieur moyen du tube *(mesuré au microscope)* et la densité du liquide.

<u>Compte-gouttes (Tait)</u>

Vu que tout le monde a touché un compte-gouttes, nous représentons seulement l'extrémité capillaire.

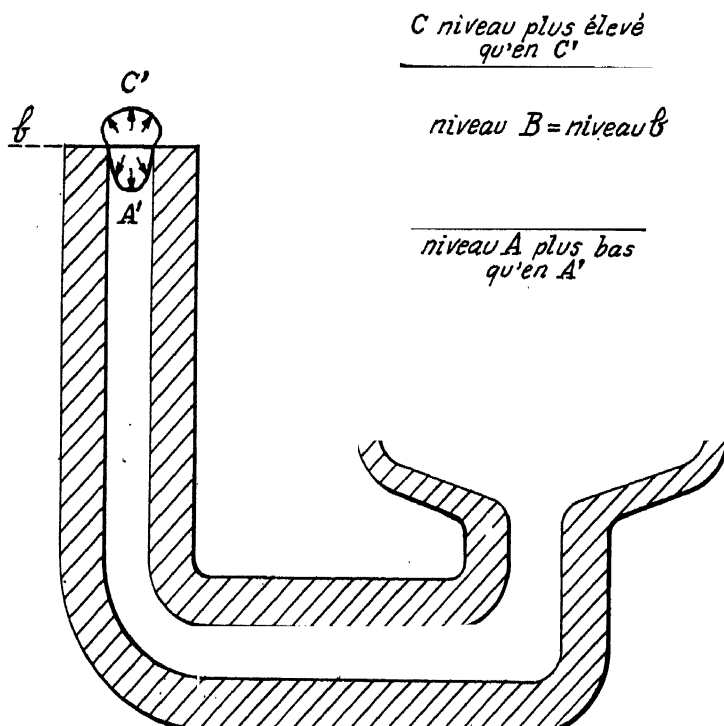
périmètre de raccordement « πd » (puisque le tube est mouillé par le liquide quand on charge le compte-gouttes, c'est le <u>diamètre extérieur</u> qui intervient et le <u>raccord est tangentiel</u>.)

↑ Force de succion capillaire $S(\pi d)$

↓ Poids de la goutte = (volume)(densité D) g

Volume d'une goutte $\dfrac{S\pi d}{Dg}$

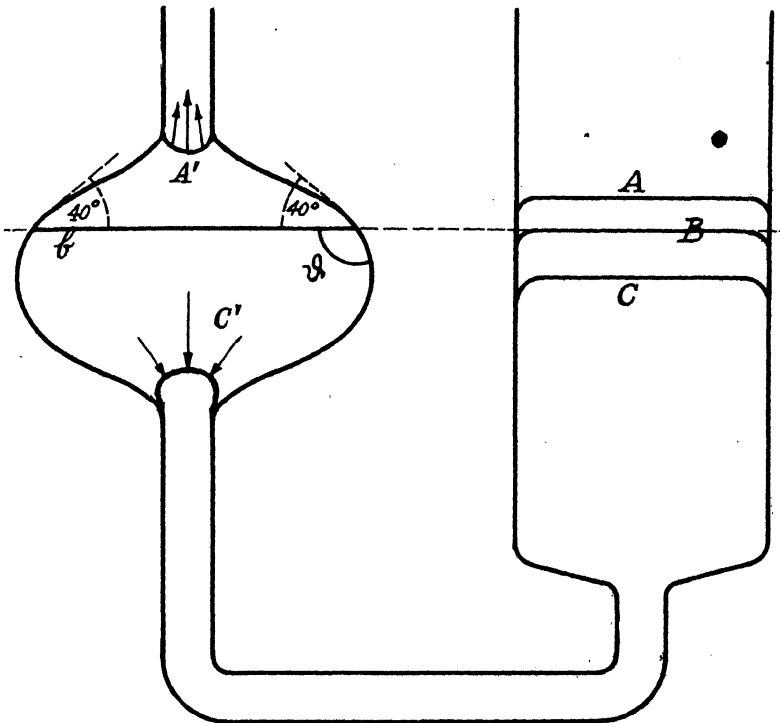
Fig. 77

(Les tubes ont été très élargis pour la clarté).

Liquide qui mouille (eau et verre bien dégraissé)

Si ascension du liquide dans le tube capillaire. (flèches indiquées A')	ménisque concave pour l'observateur dans l'air.
Si dépression du liquide dans le tube capillaire (flèches marquées C')	ménisque convexe pour l'observateur dans l'air.

et si égalité des niveaux en B et b la surface b est plane.

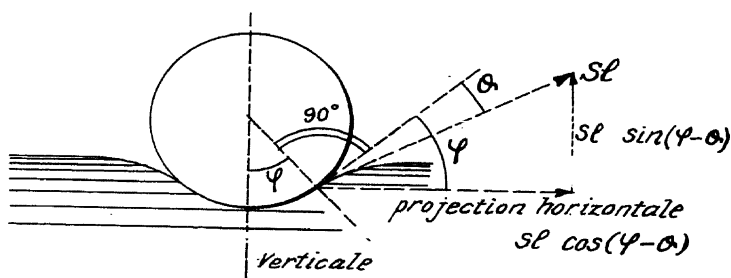
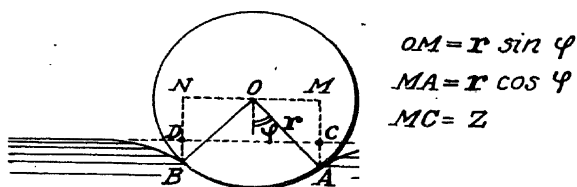
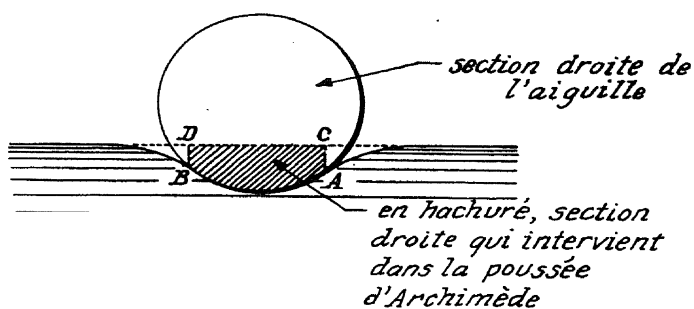
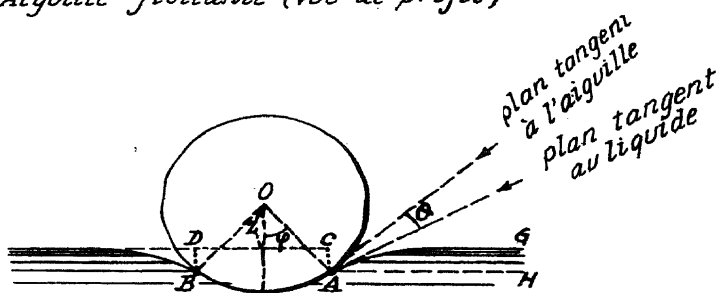
Fig. 78

(Les tubes ont été très élargis pour la clarté)

Liquide qui ne mouille pas (mercure et verre propres)

Si ascension du liquide dans le tube capillaire (flêches A')	*ménisque concave pour l'observateur dans l'air.*

si égalité des niveaux B et b, et angle du verre à cette hauteur 40° avec l'horizontale, surface libre plane en b

et si dépression du liquide dans le tube capillaire (flêches C')	*ménisque convexe pour l'observateur dans l'air.*

Fig. 79

Pour le titrage des solutions alcooliques en particulier c'est une méthode rapide et très sensible.

N° 98. Correspondance entre la forme du ménisque et le sens de la dénivellation *(expérience de Monsieur Albert Turpain)* fig.78 et 79 .- Nous laisserons parler Turpain:

"En employant un artifice particulier, on peut faire en sorte qu'un *même liquide et un même solide* donnent à volonté naissance à un ménisque *concave*, à une surface *plane* ou à un ménisque convexe.

"Si l'on met de l'eau dans le système de vases communicants de la figure 78 dans lequel le tube capillaire est coupé suivant une section plane horizontale, on constate qu'alors que le ménisque se forme suivant A' et en présentant la forme concave, le niveau du liquide dans la branche large est en A, montrant ainsi que le liquide dans le tube capillaire éprouve une ascension.

Vient-on à ajouter progressivement de l'eau dans la branche large, le ménisque A' se déforme, sa concavité diminue peu à peu et il devient bientôt plan en b, occupant alors le prolongement de la section même du tube. A ce moment on constate que le niveau est le même dans les deux tubes;les lois de la statique des liquides sont respectées. Ajoutons encore de l'eau dans la branche large, le plan se déforme à l'extrémité du tube capillaire et il s'y forme un ménisque convexe C'. Il arrive alors que le niveau du liquide dans la grande branche est en C au-dessus du ménisque convexe.

"On peut encore faire une expérience analogue avec le mercure. On verse du mercure dans le système de vases communicants de la figure 79, dont l'une des branches comprend une sphère soufflée. Lorsque le mercure commence à pénétrer dans la boule, il y forme un ménisque convexe C'. On constate alors que le niveau du mercure dans le tube large est au-dessus du plan horizontal tangent au ménisque. Si l'on ajoute du mercure dans le vase large, il arrive un moment où la surface mercurielle dans la sphère est exactement plane. C'est lorsque le plan tangent à la sphère fait un angle d'environ 40° avec le plan horizontal *(supplément de l'angle ϑ de raccordement)*. Alors les deux surfaces sont exactement dans le même plan horizontal.

"Si l'on continue à ajouter du mercure dans le vase large, le liquide monte encore dans la boule et y affecte en A' la forme d'un ménisque concave. La surface liquide dans la branche large se trouve alors au-dessous du plan horizontal tangent au ménisque",,,,

"Tout ménisque concave correspond à une ascension de liquide et tout ménisque convexe indique une dépression de liquide".

[*Le lecteur aurait tout avantage à consulter p.152 à 168, le premier livre de physique du P.C.N. de Turpain, (Vuibert éditeur), ouvrage bien indexé*] .

N° 99. Aiguille flottante *(fig.80)*.

Les forces qui entrent en jeu sont *1e)* les forces dues à la tension superficielle s'exerçant le long des génératrices du cylindre *(qu'est l'aiguille)* dont le profil est en A et B.

2e) le poids de l'aiguille qui est au milieu de l'aiguille donc en O sur le profil.

3e) la poussée de l'eau s'exerçant sur la base de l'aiguille se projetant en AFB, poussée qui est égale au poids du volume d'eau de section droite *(hachurée)* ACDBFA.

Ces forces s'équilibrent, appelons l la longueur de l'aiguille *la composante verticale des forces de tension est*

$$\uparrow 2\,l\,S\sin(\varphi-\theta)$$

et les composantes horizontales se détruisent pour ce qui concerne l'équilibre de l'aiguille.

La section droite hachurée ACDBFA est égale à:

$$\underbrace{\text{secteur CAFB}} + \underbrace{\text{tri. AMO} + \text{tri. ONB}} - \underbrace{\text{rectangle MNDC}}$$

$$\frac{1}{2}(r)(r.2\varphi) + (r\sin\varphi)(r\cos\varphi) - Z\,(2)\,r\sin\varphi$$

$$= r^2\varphi + r^2\sin\varphi\cos\varphi - 2\,Z\,r\sin\varphi$$

La poussée d'Archimède sera donc:

$$\uparrow D\,g\,l\,[r^2\varphi + r^2\sin\varphi\cos\varphi - 2\,Z\,r\sin\varphi]$$

Enfin, le poids de l'aiguille est $\downarrow mg$

Equation d'équilibre vertical *(de l'aiguille)*

$$\underbrace{\uparrow 2\,l\,S\sin(\varphi-\theta)}_{\text{poussée verticale due à la tension superficielle}} + \underbrace{\uparrow D\,g\,l\,[r^2\varphi+r^2\sin\varphi\cos\varphi-2Zr\sin\varphi]}_{\text{poussée d'Archimède}} = \underbrace{\downarrow mg}_{\text{poids}}$$

Horizontalement, puisqu'il y a équilibre, considérons

1e) la poussée horizontale sur GH *(même problème que la porte d'écluse tome I pages 68 et seq).*

de G en H la pression de jauge croît de zéro à $(r\cos\varphi - z)\,D\,g$ donc vaut en moyenne $\frac{1}{2}(r\cos\varphi - z)\,D\,g$

la section droite sur laquelle cette pression moyenne actue la poussée horizontalement est

$$(\otimes\, l)\ [\updownarrow (r\cos\varphi - z)]$$

la poussée vaut donc

$$\frac{1}{2}(r\cos\varphi - z)\,D\,g\ \ l\,(r\cos\varphi - z) = \frac{1}{2}l D\,g\,(r\cos\varphi - z)^2$$

2e) la composante horizontale de la tension superficielle le long de la génératrice de trace A est *(voir fig.80) le liquide tirant sur l'aiguille:*

$$\overrightarrow{S\,l\cos(\varphi-\theta)}$$

et puisque réaction égale action, la traction horizontale de l'aiguille sur la membrane AG est aussi

$$\overleftarrow{S\,l\cos(\varphi-\theta)}$$ *(de sens opposé à celui de l'action)*

3e) Enfin, de la même façon, au point G, puisque la membrane AG tire avec la force $\overleftarrow{S\,l}$ sur la membrane plane, la réaction de la membrane plane sur la membrane AG est $\overrightarrow{S\,l}$

L'équilibre horizontal de *la membrane de profil* $\widehat{AG}$ *et de longueur* l s'exprimera donc par:

$$\underbrace{\overleftarrow{\frac{1}{2}\, l\, D\, g\, (r \cos\varphi - z)^2}}_{\text{poussée hydrostatique}} + \underbrace{\overleftarrow{S\, l \cos(\varphi-\theta)}}_{\text{attraction horizontale due à l'aiguille (en A)}} = \underbrace{\overrightarrow{S\, l}}_{\text{traction de la membrane plane (en G)}}$$

soit en ramplaçant $[1-\cos(\varphi-\vartheta)]$ par $2 \sin^2\frac{\varphi-\vartheta}{2}$

et divisant par l

$$D\, g\, (r \cos\varphi - z)^2 = 4\, S \sin^2 \left(\frac{\varphi-\vartheta}{2}\right)$$

Eliminant z entre les équations encadrées qui définissent l'équilibre vertical de l'aiguille et l'équilibre horizontal de la membrane, on a φ *qui ne dépend plus que de* r; θ et S étant donnés par les tables.

$$mg = 2lS \sin(\varphi-\theta) + Dgl\left[r^2\varphi + r^2 \sin\varphi \cos\varphi - 2r \sin\varphi \left(r \cos\varphi - 2\sqrt{\frac{S}{Dg}} \sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)\right)\right]$$

I.P: Le but que nous nous proposons n'est pas de résoudre ces équations implicites; mais, *grâce à la mise en équation,* d'habituer le lecteur à considérer les divers facteurs qui entrent en ligne de compte en capillarité.

Le problème suivant va illustrer ce qui se passe quand l'on a affaire non plus à un liquide et un solide, mais *à deux liquides qui ne s'étendent pas l'un sur l'autre.*

N° 100. La figure 81 représente une goutte d'un tel liquide sur un autre liquide *sur lequel il ne s'étend pas.*

Appelons B l'aire de contact entre les deux liquides, A l'aire de contact entre la goutte et l'air et C l'aire de la membrane incurvée du liquide support qui est en contact avec l'air *(soit pour le liquide support, l'aire incurvée totale diminuée de B).*

Soit S_1 la tension superficielle:"liquide de la goutte – air";

S_2 la tension superficielle:"liquide support–air";

S_{12} la tension superficielle:"liquide de la goutte – liquide support"

$\theta_1, \theta_2, \theta_{12}$ étant les angles que les surfaces A,C,B, font au point P avec l'axe des x.

Supposant un déplacement virtuel tel que l'axe des z reste l'axe de symétrie et qu'un point P vienne en P', en écrivant la *conservation du volume de liquide (supposé imcompressible)* et de plus que le *travail de toutes les forces est nul (travail virtuel),* on obtient deux équations que le lecteur pourra retrouver p.159-160 et 161 et p.193 à 196 dans le livre de Newman and Searle "General Properties of Matter".- Nous nous contenterons ici de faire appel à l'intuition en considérant "le triangle de Neumann" *(Vorlesungen uber die Theorie der Kapillaritat)* ce qui est court et aussi rigoureux.

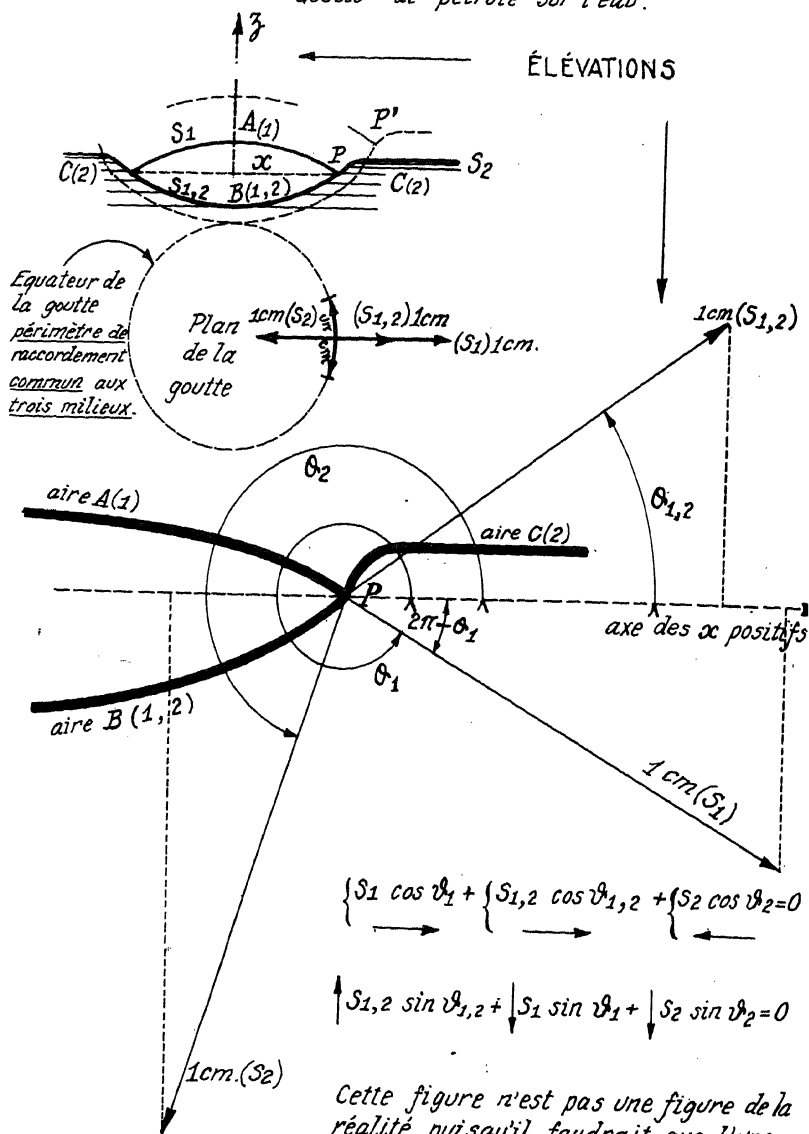
D'après les remarques de Turpain *(du N° 98)* ,"tout ménisque concave tel que B correspond à une ascension de liquide" [*donc tout se passe comme si une force* [*1 cm* (S_{12})] *tirait*

Goutte de pétrole sur l'eau.
ÉLÉVATIONS
z
A(1)
S1
P'
P
x
S2
C(2)
S1,2
B(1,2)
C(2)
Equateur de la goutte périmètre de raccordement commun aux trois milieux.
Plan de la goutte
1cm(S2)
(S1,2)1cm
(S1)1cm.
1cm(S1,2)
θ2
aire A(1)
aire C(2)
θ1,2
P
2π-θ1
axe des x positifs
θ1
aire B(1,2)
1 cm(S1)
S1 cos θ1 + S1,2 cos θ1,2 + S2 cos θ2 = 0
S1,2 sin θ1,2 + S1 sin θ1 + S2 sin θ2 = 0
1cm.(S2)
Cette figure n'est pas une figure de la réalité puisqu'il faudrait que l'une quelconque des trois tensions S1, S2, S1,2 soit directement opposée à la résultante deux autres. (résultante géométrique).

Fig. 81.

vers le haut tangentiellement sur 1 cm de cette membrane B (1,2)] et "tout ménisque convexe tel que celui de A et celui de C indique une dépression de liquide" {*donc tout se passe comme si une force [1 cm) S_1)]* et une force [1 cm (S_2) tiraient tangentiellement *vers le bas* 1 cm des membranes A (1) et B (2) respectivement }.

Ainsi donc en considérant un centimètre de l'équateur de la goutte, on peut suivre l'analogie très heureuse due à **"Neumann"** qui permet ainsi de considérer S_1, S_2 *et* $S_{1,2}$ *comme trois forces s'équilibrant,* s'exerçant toutes trois sur un centimètre de membrane commune à "air - liquide support et liquide de la goutte".

Note: Les angles de raccordement des milieux sont deux à deux

$$(1) - (2) = \vartheta_1 - \vartheta_2$$

$$(1) - (1,2) = (2\pi - \vartheta_1) + \vartheta_{1,2}$$

$$(1,2) - 2 = \vartheta_2 - \vartheta_{1,2}$$

Les trois tensions S_1; S_2; $S_{1,2}$ étant placées tangentiellement au raccord de chacune des membranes suivant le même périmètre commun équateur de la goutte comme l'indique la figure 81, il faut que "leur triangle dynamique" se ferme, donc **que** l'inégalité *scalaire* $S_2 < S_1 + S_{1,2}$ soit satisfaite.

Une goutte de liquide déposée à la surface d'un autre liquide s'étend généralement en un film très mince au lieu de rester en goutte comme la figure (81) l'indique.

S'il s'agit de liquides qui sont complètement miscibles sans les agiter, $S_{1,2}$ est presque nulle et la condition du triangle de **Neumann devient** $S_2 > S_1$ *(pour l'extension indéfinie)* alors que le liquide resterait en goutte si $S_2 < S_1$.

L'expérience montre, en effet, que de deux liquides complètement miscibles, *celui qui a la plus petite tension superficielle (1)* s'étend lorsqu'il est déposé à la surface de l'autre (2).

Premier cas: Si les liquides ne sont pas miscibles, le liquide s'étend si $S_2 > S_1 + S_{12}$ et tout ce qui renforce l'inégalité en diminuant S_{12} favorise l'étalement du liquide (1) sur le liquide (2): *(C'est ainsi que l'éther s'étend sur l'eau).*

Deuxième cas : Si S_2 *(tension du liquide porteur)*= $S_1 + S_{12}$, le système est en équilibre, il n'y aura tendance ni à l'étalement, ni à la contraction de la goutte.

Troisième cas: Si $S_2 < S_1 + S_2$ *(goutte de pétrole sur l'eau),* la goutte prend la forme d'une lentille formant un angle rentrant avec le liquide porteur.

Quatrième cas: Bien que $S_2 > S_1 + S_{12}$, l'effet de substances dissoutes peut produire $S_2' < S_1 + S_{12}$ et S_2' qui est la **tension** superficielle du liquide souillé le porte à se conduire comme dans le troisième cas.

(Ainsi la benzine ou les huiles contenant des acides gras en solution se mettent en goutte sur l'eau, alors que benzine et huiles pures s'étendent indéfiniment).

Un autre cas où un film est formé sur l'eau même lorsque $S_2 < S_1 + S_{12}$ est celui des *liquides volatils* comme le sulfure de carbone: c'est la condensation *(à la surface du liquide porteur)* du liquide qui s'est volatilisé et non pas l'extension homogène d'une fine lamelle de liquide porté comme dans les cas 1er et **4ème**.

N° 101. Méthodes dynamiques employées pour mesurer la tension superficiell[illegible] la méthode du Jet de la méthode des ondes de surface.

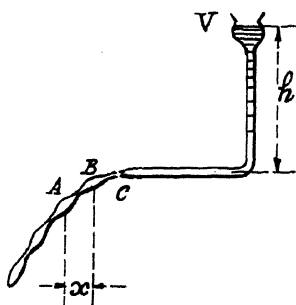



Fig. 82

Dans la méthode du jet, x désignant la distance horizontale qui sépare les deux premiers renflements sphériques de la parabole du jet, h désignant la tête d'eau, D la densité et r étant le rayon de l'orifice C, Lord Rayleigh a montré que la tension superficielle valait

$$\frac{\pi^2 g\ h\ r^3 D}{x^2}$$

$\pi = 3.14$; $g = 980$; h en cm ; r^3 en cm^3 ; D en $\frac{grammes}{cm^3}$ et x^2 en cm^2; vérifiant l'homogénéité,

[illegible] $\frac{1}{cm}$

(le lecteur trouvera dans les Proc. Roy. Soc. 29, 71, (1879) la théorie de cette méthode imaginée par Lord Rayleigh, le père).

Dans la méthode des ondes de surface *(d'assez petite longueur d'onde pour que la capillarité influe beaucoup)*, utilisant la formule de Lord Kelvin qui relie la vitesse de propagation V à la tension superficielle S, à la densité D et à la longueur d'onde

$$V = \sqrt{\frac{2\ \pi\ S}{D\ \lambda} + \frac{g\ \lambda}{2\ \pi}}$$ Rayleigh et Dorsey ont utilisé la *mesure de la longueur d'onde des ondes stationnaires* pour déduire la tension superficielle..

Un diapason de fréquence ν , entretenu électriquement porte un stylet à l'une de ses branches et cette branche en plongeant périodiquement donne des ondes stationnaires de surface *(ripples)*: voir fig. 83.

On stroboscope pour avoir un arrêt apparent et avec un micromètre oculaire on mesure la longueur d'onde Λ .

Comme la vitesse $V = \nu\Lambda$, on déduit

$$S = \frac{\nu^2 D \Lambda^3}{2\ \pi} - \frac{g\ D\ \Lambda^2}{4\ \pi^2}$$

diapason entretenu (électriquement)

(vu au stroboscope).

Fig.83

Ordre de grandeur: pour une fréquence de 100 sec^{-1}, la longueur d'onde est d'environ 3 mm ; comme Λ intervient au cube et au carré, les erreurs relatives sont grandes et la précision est médiocre.

(Voir Phil. Mag. 30, 386 (1890) et 44, 369 (1897))

N° 102. Coin vertical et lames parallèles verticales *(voir fig.84 et 84a').*

A la distance l du coin la largeur est l ε (exactement $2\, l \sin \frac{\varepsilon}{2}$) et à la distance l + δ l du coin, la largeur est $(l + \delta l^2)\varepsilon$; la projection horizontale du ménisque entre la distance l et la distance l + δ l a donc pour aire δl(lε) et si la surélévation moyenne du ménisque *(dans le cas d'un liquide qui mouille)* est **y** à la distance l du coin, le volume d'eau maintenu en suspension est donc *(entre l et l+δl)*

$$\delta l\ (l\ \varepsilon)\ y$$

et ce volume a pour masse

$$\delta l\ (l\ \varepsilon)\ y\ D$$

et pour poids

$$\downarrow \delta l\ (l\ \varepsilon)\ y\ D\ g$$

Mais le raccordement au solide du ménisque considéré est 2 δ l et la force qui le tire vers le haut si les lames ont été au préalable trempées dans l'eau *(raccord tangentiel)*

$$\uparrow F = S\ (2\ \delta\ l)$$

La condition de l'équilibre donne donc:

$$\uparrow S\ 2\ \delta l = \downarrow \delta l\ (l\ \varepsilon)\ y\ D\ g$$

soit

$$y\ l = \frac{2\ S}{\varepsilon\ D\ g} = \text{constante.}$$

C'est l'équation d'une hyperbole équilatère d'axes: E la bissectrice du coin au niveau extérieur du liquide, Y la verticale arête du coin.

N° 103. Deux lames parallèles verticales sont toujours poussées et tendent à se rapprocher que le liquide mouille *(fig. 84b)* ou non *(fig.84b').*

b) Plus bas que $G_0 D_0$ *(84b)* et plus haut que $(G_y D_y)$ les deux lames reçoivent sur chacune de leurs faces des poussées qui

s'équilibrent puisque les pressions sont identiques de part et d'autre; mais entre G_yG_o et D_yD_o, la pression entre les lames est inférieure à la pression atmosphérique qui règne à l'intérieur au même niveau E que l'extérieur; les lames subissent donc chacune une poussée vers l'intérieur égale au produit

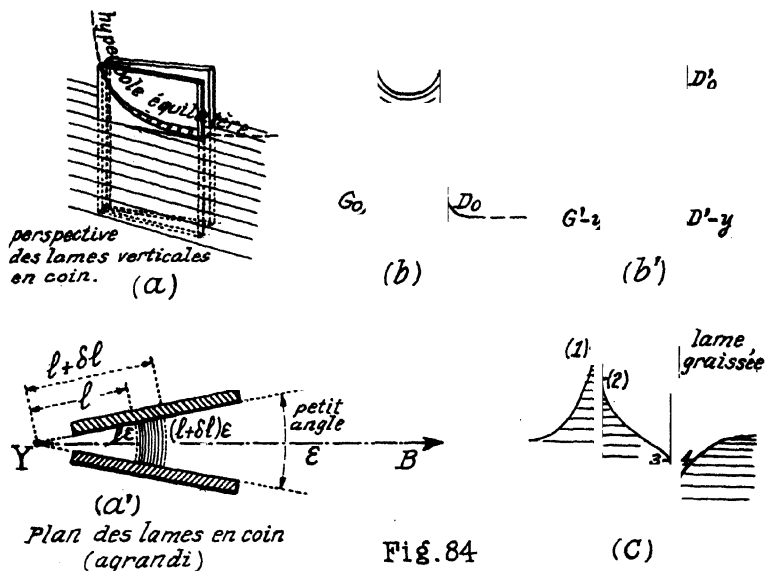



Fig.84

(*pression atm.- pression moyenne int.*)(*aire de profil* G_yG_o)

b') La pression intérieure est cette fois la pression atmosphérique, l'autre (*extérieure*) est supérieure à la pression atmosphérique et la poussée due à la pression de jauge tend encore à coller les lames l'une sur l'autre.

c) Si une lame est mouillée et l'autre (*seule graissée*) n'est pas mouillée, les lames s'éloignent l'une de l'autre entre (1) et (2) on voit bien que la pression intérieure (*atmosphérique*) surpasse la pression **extérieure**; entre (3) et (4) il en est de même.

Retenir que les ménisques à l'extérieur sont tous deux de part et d'autre des ménisques intérieurs.

Cette expérience est délicate et ne peut être répétée deux fois de suite car bien vite la graisse gagne la surface du mercure et l'autre plaque.

On explique par ces trois expériences pourquoi de petits morceaux de liège se rassemblent entre eux ou vont se coller à la paroi s'ils sont ou tous mouillés ou aucun d'eux mouillé.- Si un morceau de liège est mouillé et l'autre bien sec, ils se repoussent (*Nous empruntons ces remarques à J.Lemoine et A.Blanc, Physique I*).

<u>N° 104. *Tension superficielle et évaporation.*</u>

Lorsqu'une goutte d'un liquide s'évapore à *température constante T* il doit y avoir une source d'énergie pour fournir

"E m L_v = (4.185×10^7)(m gr) *(chaleur de vaporisation à la température T)* "

énergie nécessaire à l'écartement des molécules lors du passage de la phase liquide à la phase gazeuse.

Comme la goutte diminue d'aire extérieure, il y a d'autre part disparition d'énergie de tension superficielle

S (Δa) = *(tension superficielle)(diminution d'aire ext.)*

Il est ainsi tout naturel d'admettre qu'*une partie de la chaleur de vaporisation provient de la diminution d'aire de la "membrane élastique extérieure" de la goutte.*

C'est ainsi qu'*une goutte continuera à s'évaporer* alors qu'*une surface plane (qui ne peut diminuer l'aire de sa membrane) serait en équilibre* avec sa tension de vapeur en espace clos.

Il ne peut donc pas y avoir d'équilibre entre une goutte et une atmosphère saturée de vapeur puisque la possibilité de libération d'énergie de surface *(par contraction)* peut produire la vaporisation.

L'inverse aussi est vrai: comme l'a montré Knudsen, il faut un "germe" de condensation pour qu'une goutte se forme au sein d'une vapeur, un degré de "sursaturation" est nécessaire pour amener la condensation, degré de sursaturation qui dépend *(Wilson)* des dimensions des noyaux *(ou germes)* de condensation.

C.T.R. Wilson a montré que pour les poussières ou les particules électrisées, le degré de sursaturation requis pour amener la condensation est très faible *(et un sillage de brouillard permet de marquer les trajectoires des particules électrisées dirigées par les champs magnétique ou électrostatique)*: c'est la chambre à condensation de C.T.R. Wilson bien connue aujourd'hui.

L'électrisation d'une goutte contrarie la tension superficielle car les particules de même signe se repousssent, alors qu'à l'état neutre elles s'attireraient et produiraient cet effet de membrane élastique dit de "tension superficielle".

Nous allons analyser le phénomène *(comme l'ont fait Newman et Searle, p.189-190 de leur livre: General Properties of Matter)*.

"Pour déterminer l'*influence de la courbure du ménisque* de séparation sur l'équilibre entre la surface d'un liquide et sa vapeur, imaginons une *enceinte fermée* A ne contenant *que le liquide et sa vapeur* et supposons qu'un tube capillaire très étroit *(fait d'une substance qui ne mouille pas le liquide)* plonge dans le liquide.

"Le ménisque que l'on peut considérer comme une hémisphère se trouve plus bas que la surface de la membrane plane B, la dépression étant indiquée par h sur la figure 85.

"Soit p_0 la pression de vapeur saturante au niveau B de la membrane plane et p_1 la pression d'équilibre au-dessus de la surface courbe C de rayon moyen r.

"La différence des pressions $p_1 - p_0$ est *numériquement* égale au poids d'une colonne de *vapeur* de hauteur h et de densité δ *(D étant la densité du liquide)*

$$\boxed{p_1 - p_0 = \int (dh).\ \delta\ g}$$

(Notez que l'on ne peut écrire h.δ.g comme pour un liquide car la densité d'une vapeur varie beaucoup avec la pression).

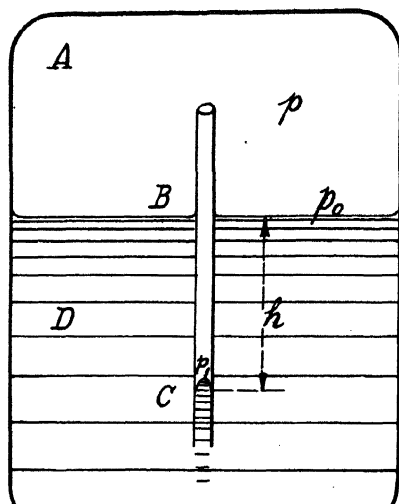



Fig. 85

La pression au niveau B est p_o, alors qu'au niveau C elle vaut $p_o + h\,D\,g$, et puisque la courbure du **ménisque** est due à un excès de pression intérieure qui arrondit la membrane, excès égal à

$$1\ S\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \text{ soit } \frac{2S}{r}$$ *(en admettant que r est le rayon moyen)*, la pression au niveau C à l'intérieur de la membrane surpasse donc la pression extérieure p_1 de 2S/r

$$(p_o + h\,D\,g) - (p_1) = \frac{2\,S}{r}$$

ou $\boxed{p_1 - p_o = h\,D\,g - \frac{2\,S}{r}}$; en égalant les deux expressions de la différence $p_1 - p_o$ on obtient

$$\int (dh).\ \delta.\ g = h.D.g - \frac{2\,S}{r}$$

et comme $h = \int dh$, on peut écrire $h\,D\,g = \int D.g.\,dh$

d'où $\frac{2\,S}{r} = \int g\ (D - \delta)\ dh$

Mais la densité absolue de vapeur $\delta = \frac{m\ gr}{v_m\ cm^3} = \frac{p\ M}{R\ T}$

où $R = 8.32 \times 10^7 \frac{ergs}{(mol)(degré)}$, puisque l'équation des gaz parfaits est $p\ v_m = \frac{m}{M} R\ T$

et par ailleurs la variation de pression $dp = g.\delta.\ dh$; d'où remplaçant la variable hauteur par la variable pression manométrique, il vient

$$2\frac{S}{} = \int g\ (D - \delta)\ \frac{dp}{g\delta} = \int \frac{D-\delta}{\delta}\ .\ dp$$

or, dans le numérateur D-δ *(loin du point critique où D et δ deviennent identiques)* on peut négliger généralement la densité de vapeur (δ) devant celle du liquide (D)

$$2\ S \quad \int \frac{D}{\delta}.\ dp$$

d'où finalement *(puisque par hypothèse l'enceinte est isother-*

$$\frac{2S}{r} : \frac{D\ R\ T}{M} \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} \quad \frac{D\ R\ T}{M} \log_e \frac{p_1}{p_0}$$

ou $\log_e \frac{p_1}{p_0} : \frac{2\ S\ M}{D\ R\ T\ r}$ ou

$$\frac{p_1}{p_0} = e^{\frac{2SM}{DRT}.\frac{1}{r}} \geqslant 1$$; le signe égal étant pour

$\frac{1}{r}=o$, les deux aires planes.

"Tel est le rapport des pressions p_1 et p_0 *(d'équilibre avec la vapeur) d'une goutte de rayon r et d'une surface plane de liquide.*

Pour un degré donné de sursaturation, i.e. pour une valeur donnée de p_1, des gouttes de rayon moindre que r vont continuer à se vaporiser puisque la pression de saturation est pour elles bien supérieure à t_1, celles de rayon r resteront identiques à elles-mêmes et celles d'un plus grand rayon que r vont grossir, puisque leur tension de vapeur est inférieure à p_1.

"Pour fixer les idées, noter que pour l'eau à 100° centigrades, le rapport de p_1 à p varie comme suit suivant la grosseur des gouttes.

Diamètre des gouttes en Angströms (10^{-8} cm)	rapport $\frac{p_1}{p_0}$
1000	1.02
100	1.26
50	1.59
20	3.20
10	10.20

"Ces considérations peuvent aussi s'appliquer au phénomène de l'ébullition: un liquide pur peut être porté à une température bien supérieure au point d'ébullition si aucun gaz dissous ne fournit les germes amorçant les bulles de vapeur. Mais *quand les bulles viennent à se former,* la croissance de chaque bulle est très rapide puisque *plus la bulle grossit, plus la tension superficielle devient insuffisante à contrebalancer l'excès de pression intérieure:* c'est alors l'ébullition tumultueuse.

"Lors de l'ébullition normale, la bulle contient du gaz et de la vapeur et est en équilibre lorsque la pression p_2 due au gaz égale l'excès de pression de l'intérieur sur l'extérieur de la bulle.

Désignant par p la pression extérieure et par p_1 la pression de vapeur au sein de la bulle,

$$p_1 + p_2 - p = \frac{2S}{r}$$

A température constante, le produit (p_2) (r^3) est une constante k *(pour le gaz, la loi de Boyle-Mariotte est valable isotherme,* $p_2 \cdot 4/3 \cdot \pi r^3 = m/M \cdot R\,T$ *; donc* $k = 3/4 \cdot m/M . R . T . 1/\pi$*)*

d'où $p_1 - p \quad \frac{2S}{r} - \frac{k}{r^3}$, et pour la position d'équilibre

$$\frac{d}{dr}(p_1 - p) = \qquad \text{soit} \; -\frac{2S}{r^2} + \frac{3k}{r^4} =$$

ce qui fixe $k = \frac{2}{3}\,S\,r^2$ et par suite $p_1 - p = \frac{4}{3}\frac{S}{r}$

Ce qui signifie que l'ébullition commence pour une bulle de rayon r quand la tension de la vapeur qu'elle renferme surpasse la pression environnante de $4/3 \cdot S/r$.

*N° 105 *Chaleur latente et énergie superficielle.*

D'après la théorie de Laplace, *la moitié de la chaleur latente interne ($\Lambda/2$) d'un liquide (la demi-mesure du travail accompli contre la pression interne)* devrait égaler l'énergie superficielle e.

Pour les molécules à *symétrie parfaite,* ceci est à peu près vrai *au voisinage de la température critique (à 0°.7 de T crit.)*

Azote (N_2)	$e = 3.84 \times 10^{14}$ ergs/mol	$\Lambda = 8.7 \times 10^{14}$ ergs/mol	$(\frac{e}{\Lambda}) = 0.514$
Oxygène (O_2)	$e = 4.5$ "	$\Lambda = 10.8$ "	" $= 0.497$
Ether éthylique	$e = 15.6$ "	$\Lambda = 36.5$ "	" $= 0.423$
Tétrachlor.de carb.	$e = 18.2 \times 10^{14}$ ergs/mol	$\Lambda = 40.2$ "	" $= 0.452$
Benzine	$e = 18.4$	$\Lambda = 41.7$ "	" $= 0.441$

Mais pour les molécules à moindre symétrie $\Lambda/2e$ est bien inférieur et voisin de 1/6.

Alcool méthylique	$e = 8.5 \times 10^{14}$	$\Lambda = 51.6 \times 10^{14}$	$(\frac{e}{\Lambda}) = 0.164$
Alcool éthylique	$e = 11.2$	$\Lambda = 59.3 \times 10^{14}$	" $= 0.186$

Une molécule en passant dans la membrane-peau d'un liquide *accomplit un travail contre la pression interne* qui est dirigée normalement à la surface vers l'intérieur et c'est l'énergie potentielle de surface qui mesure ce travail.

Laplace trouvait $\Lambda = 2e$; Hammick trouve $\Lambda = 6e$.

Tous deux considéraient le travail accompli par la molécule pour franchir *la moitié du chemin de l'intérieur vers l'extérieur* ; la différence des théories réside dans le fait qu'Hammick par un raisonnement d'équipartition pense que la molécule ne travaille que contre un seul des trois composantes de la pression interne.

Il y a évidemment grosse divergence à considérer 1/2 ou 1/6 !

Pour plusieurs substances, la théorie d'Hammick concorde avec les faits et provisoirement, faute de mieux, nous admettrons avec lui que *"le travail accompli pour faire passer toutes les molécules d'une molécule gramme (6.07×10^{23}) de liquide de l'intérieur à la surface est le sixième du travail nécessaire pour écarter ce même nombre de molécules l'une de l'autre dans la vaporisation"*.

On considère l'évaporation comme comportant deux étapes

1e) amener les molécules de l'intérieur à la "membrane" superficielle

2e) vaincre la tension superficielle et gazéifier.

Si les molécules sont *parfaitement symétriques*, ces deux étapes comporteraient des montants égaux d'énergie ($e = \Lambda - e$); mais pour les molécules *compliquées et dissymétriques, la vaporisation à la surface l'emporte beaucoup sur le passage à la surface* $\Lambda - e \gg e$

Conclusion: molécules symétriques: $\frac{\Lambda}{2e} = 1$ *(Théorie de Laplace exacte* $e/\Lambda = 1/2$*)*

molécules dissymétriques: $\frac{\Lambda}{2e} \gg 1$ *(Théorie de Hammick exacte* $e/\Lambda = 1/6$*)*

Le lecteur trouvera dans le Phil.Mag. 1919 (38,240), dans les Transactions Roy.Soc. Canada 1922 (16,83) et dans American. Chem. Soc. Journ. 1922 (44,653) des notions plus complètes dont un excellent résumé de Newman and Searle nous a permis ce paragraphe.

N° 106. *Diffusion simple (sans cloison poreuse) et osmose (avec paroi perméable).*

Si deux gaz différents ou deux liquides différents se trouvent en présence, il y a pénétration graduelle: c'est la diffusion simple qui est immense pour les gaz comparée à ce qu'elle est pour les liquides.

Mais ce mélange se produit même si les gaz ou liquides sont séparés par une membrane poreuse *(dite septum)*. Pour distinguer ce dernier phénomène du premier, on l'appelle "osmose".

N° 107. *Parois semiperméables:* L'abbé Jean Nollet découvrit "l'endosmose"; une vessie de porc remplie d'alcool et plongée dans l'eau se gonfle de plus en plus alors qu'une vessie remplie d'eau et plongée dans l'alcool se détend. On explique ce fait en disant que le courant d'eau vers l'alcool est plus considérable que celui de l'alcool vers l'eau *(vitesse de diffusion plus grande dans le sens eau→alcool)*. On a parfois comparé la membrane "semiperméable" à un tamis d'un grain tel que les petites particules passent librement alors que les plus grosses sont arrêtées: ce n'est pas très juste puisqu'il y a seulement *différence de degré* dans la diffusion de l'un des corps en l'autre et non pas absence totale de diffusion dans un sens.

N° 108. Les colloïdes sont moins facilement transmis que les substances cristalloïdes *(la distinction est aujourd'hui délicate puisque jusqu'à 4500 centigrade, les spectres de rayons X des colloïdes montrent une structure cristalline)*; Graham a appelé dialyse le procédé de séparation des colloïdes et des cristalloïdes basé sur le passage plus rapide des cristalloï-

des à travers les membranes semi-perméables telles que la vessie de porc *(film colloïdal)*.

N° 109. Une membrane semi-perméable artificielle qui est perméable à l'eau mais non au sucre a été préparée par Pfeffer et Traube de la façon suivante: prenant un vase poreux de pâte bien homogène, on l'imbibe d'une dissolution de sulfate de cuivre *(à 3%)*, puis on laisse sécher.

On met ensuite à l'intérieur du vase poreux la solution indiquée de sulfate de cuivre et on plonge le vase et son contenu dans une dissolution de ferrocyanure de potassium. A travers les pores du vase, il se forme et dépose un précipité de ferrocyanure de cuivre.

Si l'on met une solution sucrée dans le vase ainsi préparé et le vase dans un cristallisoir rempli d'eau pure, l'eau pénètre dans le vase et diminue la concentration en sucre, alors que pratiquement le sucre ne passe pas dans le cristallisoir.

C'est parce que le film de ferrocyanure de cuivre n'a pas de résistance mécanique qu'il lui faut un bâti rigide pour le supporter et cette charpente c'est le vase poreux qui en tient lieu.

N° 110. *Pression osmotique*. La transmission sélective *(dans le sens de l'eau pure vers l'eau sucrée)* produit une augmentation de volume de l'eau du vaisseau jusqu'à ce qu'une certaine différence de pression dite *"pression osmotique"* mesurée par le manomètre contrebalance la transmission sélective.

Ce mot de "pression osmotique d'une solution" est peu heureux ; *(puisqu'une pression de la solution ne pourrait que chasser le liquide extérieur au lieu de l'attirer, les mots de dépression ou "succion" osmotique de la solution seraient moins bizarres)*; mais, d'autre part, *c'est le septum (membrane semi-perméable) qui permettant l'osmose est la "cause" de "la pression osmotique"*; il ne s'agit donc nullement d'une "pression de la solution". Ne pas confondre une "pression hydrostatique" qui tend à faire varier le volume avec la "pression osmotique" qui n'agit que sur la concentratoon.

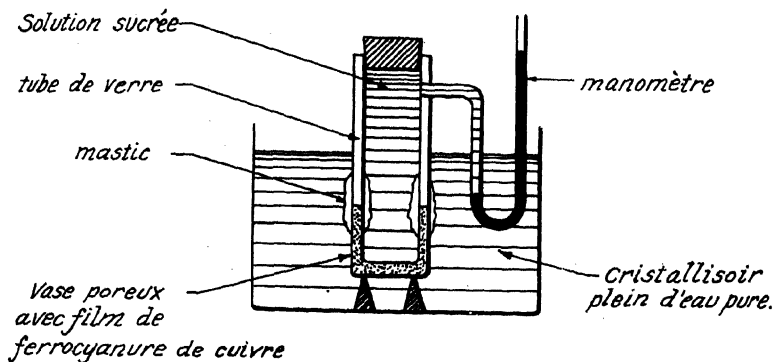



Fig. 86

N° 111. *Explication de la pression osmotique. (Nous citerons les lignes suivantes empruntées à l'ouvrage de Monsieur E. DARMOIS: "Lecons sur la Conductibilité des Electrolytes", Vuibert, 1929; merveilleuse synthèse de questions délicates et à peine envisagées jusqu'ici dans la licence d'enseignement) p.47 et 48).*

On donne généralement de la pression osmotique une explication *cinétique*. Les liquides étant composés de molécules dont le mouvement dépend de la température, ces molécules heurtent M *(la membrane semi-perméable)* de chaque côté et le nombre de molécules traversant la membrane serait le même dans chaque sens: il y aurait donc *équilibre statistique (i. e. en moyenne)*.

"Si l'on dissout du sucre dans le solvant situé à droite de la membrane, le *nombre de molécules de solvant par cm³. sera plus petit (puisque la solution a augmenté de volume aux dépens du sucre et que le solvant:eau n'a pas augmenté)*; il y aura moins de chocs à droite qu'à gauche et il s'écoulera du solvant de la gauche vers la droite. L'osmose serait identique au passage de H_2 à travers une paroi de platine *(chauffée au rouge)*; ce "passage" s'arrête quand H_2 a *la même presslon partielle* des deux côtés. L'expérience montrant qu'on peut arrêter l'osmose par pression, il faut admettre que l'effet de la pression est d'augmenter le nombre des chocs par seconde sur la paroi M.

"Certains auteurs admettent, *par analogie avec H_2*, que le passage de l'eau s'arrête quand elle a *même pression partielle* de chaque côté, ici une atmosphère. Cela revient à admettre que les molécules du corps dissous exercent une pression dans la solution ; à cette pression s'ajoute celle qui est due aux molécules d'eau *(1 atmosphère)*; la pression totale *(hydrostatique manométrique)* dans la solution est

$$P_{totale} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pression partielle du} \\ \text{solvant: eau}}}{1 \text{ atmosphère}} + \pi \text{ pression osmotique}$$

Donc $\pi = P - 1$ = pression osmotique. Dans cette conception, la dissolution d'un corps serait analogue à la vaporisation dans un espace vide: celui qu'occupe la solution; la pression osmotique serait analogue à celle d'un gaz. Celui-ci est indéfiniment expansible; il occupe tout l'espace qu'on lui offre, si grand soit-il; ici, le corps dissous, mis en contact avec une masse aussi grande qu'on le voudra de solvant pur s'y diffusera et finira par occuper tout l'espace offert. *La pression osmotique traduit donc la tendance naturelle d'un corps à diffuser dans un solvant, comme la pression d'un gaz traduit sa tendance à l'augmentation de volume"*.......

De même qu'en thermodynamique *la loi des gaz parfaits n'est qu'une loi limite* valable seulement à une température très au-dessus du point critique et pour les pressions évanouissantes, l'analogie dite "loi de VAN'T HOFF" qui permet de transposer pour les solutions les calculs des gaz parfaits n'est *valable que pour les solutions très diluées et non électrolysables.*

N° 112. Calculs numériques montrant la validité de la loi de Van't Hoff.

1) Expérience de Pfeffer *(solution de sucre dans l'eau).*

Soit 1 gr. de sucre par 100 cm³ à 0° centigrade soit 273.2 Kelvin.

Masse moléculaire gramme du sucre $C_{12}H_{22}O_{11}$ = 342 $\frac{\text{grammes}}{\text{mol}}$.

Volume occupé par la molécule gramme de sucre: 34200 cm³

La pression osmotique basée sur l'analogie de Van't Hoff va donner:

au lieu de *gaz parfait: solution étendue non électrolysable*

» » » *vide (espace offert): solvant*

» » » *pression manométrique: pression osmotique*

» » » *molécules du gaz idéal;molécules du corps dissous.*

$$(\pi_{\text{pression osmotique}})(34200\ \frac{cm^3}{mol}) = (8.32\times10^7)(273.2)$$

π pression osmotique standard = 665000 baryes ou 49.4 cms Hg.

π' pression osmotique à 15° centigrades: $(49.4)(\frac{288.2}{273.2}) = 52$ cms Hg

Ainsi le calcul nous fait prévoir 52 cms de mercure à 15° centigrades.

Et l'expérience de Pfeffer donne à cette température *53.5 cms de Hg*, soit une différence relative de 3%.

2) En mettant 4 grammes de sucre dans 100 grammes d'eau, l'expérience donne *(Pfeffer)* 208.2 cms de mercure et le calcul donnerait *(volume moléculaire gramme égalant ici 8550 cm)³* à 15° centigrades:

$$\pi = \frac{R\ T}{V_M} = \frac{8.32\times10^7\times288.2}{8550} = 2840000 \text{baryes}$$

soit 210 cms de mercure.

3) Morse *(30 ans après Pfeffer)* a opéré de façon beaucoup plus précise que Pfeffer et pour une concentration plus élevée il est vrai: 342 grs de sucre dans 1000 cms³ d'eau, à 15° centigrades, alors que le calcul fait prévoir 20.2 *atmosphères*, l'expérience donne 27 atmosphères de pression osmotique.

Donc la formule de Van't Hoff (1887) ne peut plus être admise sans restriction depuis les expériences de Morse (1901-1912).

Nous donnerons quelques problèmes sur le chapitre V après avoir vu la thermodynamique classique (VI)

CHAPITRE VI

Thermodynamique et Theorie cinétique

SOMMAIRE: Rappel des lois des gaz vues en première année.- Le premier principe.- Expérience de Joule-Thomson.- Notion de cycle.- Rendement.- Réversibilité du cycle de Carnot.- Second principe.- Températures absolues thermodynamiques.- Rendement maximum.- Identité de la température thermodynamique et de celle du gaz parfait.- L'entropie.- La fonction entropie, réversibilité et irréversibilité.- La machine réelle des points de vue de Thomson et de Clausius. - Les fluides réels, équation de Van der WAALS.- Les réduites.- Les états correspondants.- L'équation de Clapeyron.- Les potentiels thermodynamiques.- La chaleur totale est un invariant du laminage.- Equilibre des phases gazeuse et liquide.- Les principaux diagrammes industriels: de Clapeyron, de Gibbs *(entropique)*, de Mollier et celui chaleur totale × pression.- Le titre en vapeur.- La surchauffe isobare.- Le cycle de Rankine pour la machine à vapeur.- Le diagramme de Clapeyron en coordonnées logarithmiques pour la région de saturation- Le rendement à l'aide des tables, du diagramme entropique et du diagramme de Mollier.- La réfrigération mécanique par compression.- La règle des phases.- Applications des deux premiers principes de la thermodynamique.- Le troisième principe *(de Nernst)*: Problèmes.-

Le lecteur est prié de revoir au préalable le chapitre XX du livre de Physique de première année. Nous allons pourtant brièvement énoncer les lois déjà vues aux chapitres XVII et XX afin de ne pas avoir à indiquer trop de renvois au livre I.

Loi de Boyle (Mariotte): La pression d'une masse donnée d'un gaz défini varie comme la *réciproque de son volume*, si la température reste constante *(transformation isotherme)*.

Loi de Charles: La température d'une certaine masse d'un gaz donné est *proportionnelle au volume* qu'il occupe, si la pression est inchangée *(transformation isobare)*

Loi de Gay-Lussac: La température d'une certaine masse d'un gaz défini est proportionnelle à sa pression, si le volume n'a pas changé *(transformation isométrique ou équivolumique)*.

Formule des gaz parfaits synthèse des trois lois précédentes (équation caractéristique)

(press.manométr.)(vol.de la moléc.gr.)$=8.32\times10^7$*(temp. absolue Kelvin)*

$$p \cdot v_M = (R \cdot T)_{ergs}$$

S'il s'agit de la fraction $\frac{m}{M}$ de molécule gramme, on écrit

$$p \qquad \frac{m}{M} \,.\, R.\, T \text{ ergs}$$

Et s'il s'agissait de N molécules grammes *(N mols)*

$$p \;.\; v_{NM} = N\, R\, T \text{ ergs}$$

Loi d'Avogadro: Dans des conditions identiques de température et de pression, tous les gaz contiennent le même nombre de molécules par unité de volume.

A la température de la glace fondante et sous une pression manométrique de 76 cms de mercure *(pas de pression de jauge)* le nombre de molécules par centimètre cube est

$$2.7 \times 10^{19} \frac{\text{molécules}}{\text{cms}^3}$$ *(ceci est le nombre d'Avogadro par cm³).*

La Constante Moléculaire-gramme des gaz (en C.G.S.)

$$R = 8.36 \times 10^7 \frac{\text{ergs}}{(\text{molécule-gr})(\text{degré absolu Kelvin})}$$

La Constante moléculaire des gaz (en C.G.S.)

Comme une *molécule-gramme* contient 6.06×10^{23} *molécules*, la constante des gaz pour une molécule sera

$$r = \frac{\quad}{6.06 \times 10^{23}} \; 1.38 \times 10^{-16} \frac{\text{ergs}}{(\text{molécule})(\text{degré absolu Kelvin})}$$

L'équivalent mécanique de la calorie (en C.G.S.)

$$\frac{A}{Q} = E = 4.185 \times 10^7 \frac{\text{ergs}(\textit{dépensée})\text{ et non pas produits}}{\text{calorie}(\textit{produite})\text{ et non pas dépensée}}$$

N° 113. *Le premier principe de la thermodynamique.*

Si un gaz reçoit Q calories *(soit EQ ergs)* et accomplit, sur un piston ou une turbine, un travail A ergs, d'après la conservation de l'énergie, il doit "accroître son énergie interne, moléculaire, cinétique" de la différence

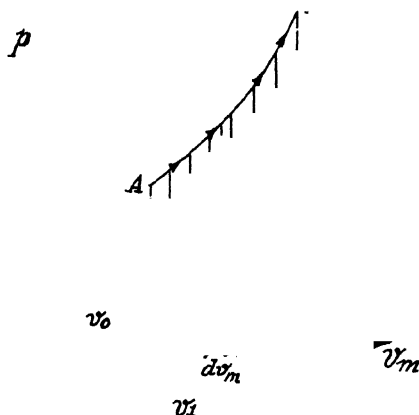



Fig.87

$$\underbrace{U_2 - U_1}_{\text{augmentation d'énergie "interne" du fluide}} = \underbrace{E\,Q}_{\text{chaleur absorbée par le fluide exprimée en unités de travail}} \quad \text{travail accompli par le fluide}$$

Comme nous l'avons déjà vu dans un cas particulier $p = c^{te}$ *(fig.125, page 254, tome I)* et plus en détail fig.110, page 216 pour une substance simple à l'état gazeux, le diagramme de Clapeyron *($p \times v_m$)* indique le travail accompli ou reçu par le fluide suivant que son volume augmente *(détente)* ou diminue *(compression)*.

Dans la fig. 87 la somme des aires $p.dv_m$ de chacun des trapèzes élémentaires, c'est-à-dire l'aire ABCD représente du travail accompli par le gaz, le sens des flèches indiquant une détente: $A = \int_{v_0}^{v'} p\ dv_m > 0$

(les pressions sont essentiellement positives et toutes les variations de volume sont également positives).

N° 114. *Principe de l'Energie Interne parfois appelé bien à tort principe de l'équivalence entre la chaleur et le travail; mais alors que du travail peut se transformer 100% en chaleur, il faut toujours un déchet calorifique pour produire du travail*

Où est donc logée la raison de parler d'équivalence? Il faudra la notion de cycle *(Nos.122 et seq.)* pour savoir le pourcentage de déchet calorifique lors de la transformation de chaleur en travailé

"Quand un système *(un fluide généralement)* passe de l'état initial A à l'état final B, le nombre qui mesure toutes les actions de l'extérieur est indépendant de la façon dont le système passe de l'état A a l'état B".

Ce nombre que l'on appelle *l'augmentation d'énergie interne:* $\Delta U_m = E\ (\Delta Q) - (\Delta A)$ *ne dépend que de l'état initial et de l'état final et non des états intermédiaires.*

Cette énergie interne associée à un corps dans un état bien défini dépend du mouvement de ses molécules et de la position de ses molécules. Rigoureusement, nous ne pouvons *mesurer que les variations d'énergie interne* et non les valeurs absolues de l'énergie interne. Il est néanmoins raisonnable de supposer *(ce qui n'a jamais été infirmé)* que l'énergie interne a une valeur bien définie dans un état complètement connu et en conséquence que sa variation lors du passage de l'état A à l'état B est indépendante des étapes intermédiaires, puisque dans les deux états initial comme final la valeur de l'énergie interne était bien fixée.

N° 115. Nous allons donner des exemples de variation d'énergie interne; nous croyons cependant devoir insister sur la raison mathématique qui a fait adopter cette notion d'énergie interne *(et qui a également fait adopter l'entropie comme nous le verrons).*

L'ingénieur étant intéressé à la *chaleur* qu'il paie et au *travail* qu'il reçoit, ce sont les quantités (ΔQ) et (ΔA) qui l'intéressent le plus. Pourquoi prendre une combinaison de ces quantités? $\Delta U = E\ (\Delta Q) - (\Delta A)$?

C'est que les calculs ne sont commodes qu'avec des "différentielles totales exactes" c'est-à-dire avec des fonctions ne dépendant que des limites extrêmes et non pas du chemin suivi.

Or d'après le diagramme de Clapeyron, *ce n'est certes*

pas le travail (ΔA) qui est indépendant de la courbe qui joint les limites puisque l'aire ABCD dépend de la forme de l'arc AB.

Et d'après le principe de l'énergie interne, si $E(\Delta Q) - (\Delta A)$ ne dépend pas de la façon dont on passe d'une limite à l'autre, si (ΔA) en dépend, $E(\Delta Q)$ et par suite (ΔQ) en dépend.

C'est par commodité de calcul qu'il faut souvent laisser les quantités immédiates et mesurables (ΔA) travail et (ΔQ) chaleur pour prendre l'abstraite "énergie interne" qui est elle une différentielle exacte et ne varie pas lors d'un cycle fermé.

N° 116. *Exemples de calculs de variation d'énergie interne.*

1) Variation d'énergie interne élastique.

Soit un ressort qui, allongé de la longueur x, exerce une traction $F = k\,x$.

Allongeons-le de (dx); nous effectuons le travail $F\,dx = (kx)\,dx$; le ressort, lui, a travaillé négativement, donc a accru son énergie interne de

$$d\,U = E\,(\textit{zéro calorie}) - (-\,k\,x\,dx) = +\,k\,x\,dx$$

Prenant *arbitrairement* $U = 0$ pour $x = 0$

$$U = k\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2}\,F\,x$$

On voit donc que si l'on avait accroché brusquement un poids $Mg = F$, l'augmentation d'énergie élastique n'aurait été que la moitié du travail accompli par le poids. Il en est ainsi chaque fois que l'effort n'est pas réversible. La moitié de l'énergie se serait dissipée sous forme calorifique, le système n'aurait atteint sa position d'équilibre qu'après une série d'oscillations.

Mais état final et initial étant les mêmes, la variation d'énergie interne est la même, que l'on charge progressivement le ressort ou brusquement.

2) Variation d'énergie interne lors des changements d'état:

a) vaporisation

b) fusion

a) A la pression normale: 1,013,000 baryes et à la température de 373.2 Kelvin, *un gramme* d'eau liquide se vaporise en absorbant 537 calories et en passant du volume 1 cm³ à 1646 cm³ et cela *sans changer de température.*

L'augmentation d'énergie interne est

$$E(\Delta Q_{1gr.}) - (\Delta A)_{1gr.} = E\,(\Delta Q_{1gr.}) - (\Delta v_{1gr.})$$

$$4.185\times10^{7}\,\frac{\text{ergs}}{\text{calorie}}\;537\text{ calories} - 1013000\,\frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}\;1645\text{ cm}^3$$

$$= 2.25\times10^{10}\text{ergs} - 1.67\times10^{9}\text{ergs}\quad 2.08\times10^{10}\text{ergs}$$

$$= 2080 \text{ joules}$$

(s'il s'agissait de la molécule gramme H_2O = 18 grs, il faudrait multiplier par 18 le résultat précédent; l'énergie interne est donc une variable extensive).

$$\Delta U_{1\,gr} \cdot 2.08\;\;10^{10}\text{ergs}$$

$$\Delta U_{1\,mol} = 37.5\times10^{10}\text{ergs}$$

b) Un gramme de glace à 273° Kelvin absorbe 80 calories environ pour fondre sans changer de température; il y a changement de volume le gramme solide occupant 1.08 cm^3 environ.

L'augmentation d'énergie interne se compose de deux termes qui s'ajoutent cette fois car la glace se contractant par fusion, ce n'est pas l'eau mais l'atmosphère qui travaille pour la contracter *(le travail d'expansion est négatif)*

$$\Delta U_{1gr} = E(\Delta \bar{Q}_{1gr}) - (p)\,(-0.08)\ cm^3$$

$$(4.185 \times 10^7)\frac{ergs}{cal}\ 80\ cal - (1.013\times10^6\ \frac{dynes}{cm^2})\,(-0.08)\,cm^3)$$

$$= 3.35\times10^9 ergs + 8.1\times10^4 ergs = 3.35\times10^9 ergs$$

N° 117. ***Expérience de Joule sur la dilatation d'un gaz dans un récipient vidé au préalable. Expérience de Joule-Thomson en intercalant une paroi poreuse.***

Deux vaisseaux l'un contenant de l'air à 20 atmosphères, l'autre vide de tout gaz sont connectés par un tube muni d'un robinet. Le tout est dans un baquet d'eau *(calorimètre)*.

Ouvrant le robinet, les pressions d'égalisent en peu de temps mais on ne constate aucun changement de température dans le bain (1845).

Concluons: *aucun travail extérieur (détente dans le vide) et aucune chaleur échangée* donc *pas de variation d'énergie interne:* $\Delta U = 0$

Comme toutes les quantités qui interviennent en thermodynamique, l'énergie interne est une fonction de deux des variables: pression, volume et température. Comme dans toutes les expériences de chimie et de calorimétrie, considérons U l'énergie interne comme fonction du *volume* et de la *température (un météorologiste utilise pression et température et un ingénieur pression et volume).*

$$U_m = \text{fonction de } (v_m) \text{ et de } (T)$$

Mais T ici n'a pas varié de façon perceptible, le volume v_m au contraire a notablement varié.

Nous devons conclure *qu'un changement de volume n'affecte pas l'énergie interne et alors l'énergie interne ne dépend que de la seule température.*

Une expérience plus fignolée (1852→1862) est la détente dans ele vide d'un gaz "à *travers une paroi poreuse*". Un léger changement de température fut décelé pour tous les gaz *(air, anhydride carbonique et hydrogène). C'est pour l'hydrogène que le changement de température fut le moindre.*

On interprète ce résultat en disant que "aux températures usuelles" c'est l'hydrogène qui est le plus au-dessus de son point de liquéfaction, c'est donc lui qui est le plus parfait des trois gaz employés.

Pratiquement, on admet qu'un *gaz idéal ou "parfait"* c'est-à-dire très au-dessus de sa température critique et à faible pression *a une énergie interne ne dépendant que de sa température* en extrapolant et admettant que dans l'expérience de Joule, aucun changement de température ne se produirait pour un gaz "parfait" idéalement.

N° 118. *Chaleurs spécifiques* relatives à un ce *(unités C.G.S.)*

Si la température de un gramme du corps évoluant passe de (t) degrés centigrades à (t+dt) degrés centigrades, grâce à une absorption de $(dQ)_{1gr}$ calories, appelons (c) la pente de la courbe du diagramme *(calories/grs × degrés centigrades)*.

$$\frac{d\ Q_{1gr}}{dt}$$

Quand les deux termes du rapport sont petits, c est appelé *"chaleur spécifique de la substance à la température t"*.

On peut définir autant de chaleurs spécifiques que l'on veut à une température donnée suivant les modalités du chauffage puisque *(voir N° 114) la quantité de chaleur* prise par une substance *dépend du chemin* décrit sur le diagramme par le point représentant à chaque instant l'état du phénomène.

En première année, nous avons déjà parlé de C_p chaleur spécifique isobare et C_v chaleur spécifique isométrique. Nous allons y revenir avec le langage des différentielles.

Puisque $E\ d\ Q_ = d\ U\ + p\ d\ v_$

ou $d\ Q \quad \frac{1}{-}\ \frac{d\ U_m}{1} + \frac{1}{E}$

l'expression générale de la chaleur spécifique exprimée en unités calorifiques serait:

$$c = \frac{d\ Q_{m=1}}{dt} = \frac{1}{E} \left(\right.$$

Si le volume est constant, la chaleur spécifique isométrique prend une forme simple

$$C_v \quad \left(\frac{d\ Q_{m=1}}{dt}\right)_v = \frac{1}{E}\ \frac{d\ U_{m=1}}{dt}$$

Puisque pour un gaz parfait l'extrapolation des résultats de l'expérience de Joule Thomson nous a donné que *l'énergie interne ne dépendait que de la température*, nous pouvons conclure que sa dérivée $d\ U_{m=1}/dt$ ne dépend elle-même que de la température *(il en est de même de l'équivalent mécanique de la calorie E)*.

Donc *"la chaleur spécifique isométrique d'un gaz parfait ne dépend que de la température"*.

Pour les gaz que l'on qualifiait de permanents avant Andrews *(parce qu'on essayait de les comprimer au-dessus de leur point critique)*, aux températures ordinaires et quand la pression n'est pas grande, C_v est *indépendant de la température (c'est ce que nous avons admis en première année en ne donnant qu'une seule valeur numérique pour C_p et C_v)*. Mais aux températures ou *élevées ou très basses* il y a une *correction de température* à faire aux valeurs du tableau page 268, tome I.

Une autre caractéristique d'un gaz *"parfait"* est donc que sa *chaleur spécifique isométrique est une constante*.

Donc pour un gaz donné "s'il est dans l'état parfait"

$\frac{d\ U_1}{dt} = E\ C_v$ = constante pour un gaz donné "parfait".

Comme on ne connaît que les variations de l'énergie interne, le zéro en est arbitraire. Si l'on convient de prendre $U_{1g}=0$ au zéro absolu $T = 0$ ou (-273.2 centigrades) alors on pourra *dans les limites où le gaz donné est parfait* écrire

$$U_{1g} = (E\ C_v)\ T\ .$$

N° 119. Résumons l'ensemble des propriétés et des formules déjà vues applicables à un gaz parfait

$$p.v_m = \left(\frac{m}{M} .R\right) T \qquad \text{où } R = 8.36\times10^7 \frac{\text{ergs}}{(\text{mol})(\text{degré K})}$$

$$U_m = (m\ .\ E\ .\ C_v)\ T \qquad \text{et } E = 4.185\times10^7 \frac{\text{ergs}}{\text{petite calorie}}$$

constante

$$\Delta U_m \quad E\ (\Delta Q_m) - p\ (\Delta v_m)$$

N° 120. Retrouvons la formule de Robert Mayer *(trouvée intuitivement pages 254 et 255, tome I).*

Dans l'équation générale

$$E\ d\ \bar{Q}_m \quad d\ U_m + p\ dv_m$$

remplaçons $d\ U_m$ par $m\ E\ C_v\ d\ T$, il vient

$$E\ d\ \bar{Q}_m = m\ E\ C_v\ d\ T + p\ dv_m \qquad *$$

Puis prenons la dérivée logarithmique de l'équation des gaz parfaits

$$p\ v_m = \frac{m}{M} R\ T$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv_m}{v_m} = \frac{d\ T}{T} \qquad O$$

Eliminons dv_m entre les équations * et O et exprimons $d\bar{Q}_m$

$$d\ \bar{Q}_m = m\ C_v d\ T + \frac{p\ v_m}{E}\left(\frac{d\ T}{T} - \frac{dp}{p}\right)$$

$$= m\ C_v d\ T + \frac{m\ R}{M\ E} d\ T - \frac{v_m}{E}\ dp$$

S'il s'agit d'une transformation isobare, $dQ_m = m\ C_p\ d\ T$

et: $m\ C_p d\ T = m\ C_v d\ T + \frac{m\ R}{M\ E} d\ T - \frac{v_m}{E}$ *(zéro)*

d'où en divisant le tout par $m\ d\ T$ en arrangeant:

$$C_p - C_v \quad = \frac{8.36\times10^7}{M\ 4.185\times10^7} \simeq \frac{2}{M}$$

Conclusion $C_p = C_v + \frac{R}{ME}$ est *donc aussi une constante pour un gaz donné dans l'état parfait* et est toujours supérieure à C_v *(mais ce n'est pas comme R une constante universelle pour tous les gaz parfaits).*

N°120. *Diverses expressions de la quantité de chaleur*

$$dQ_m = m\, C_v d\, T + \frac{p\, dv_m}{E} = m\, C_v (d\, T) + \frac{p}{E}(dv_m)$$

$$= m\, C_p\, d\, T - \frac{v_m dp}{E} = m\, C_p\, (d\, T) - \frac{v_m}{E}(dp)$$

(en remplaçant Cv par $Cp - \frac{R}{ME}$; puis $\frac{m}{M} R\,(d\,T)$ par $p\, dv_m + v_m dp$)

N° 121. *Equations de l'adiabatique (Nº 178 à 181, tome I)*

$$d\, Q_m = 0$$

$$\begin{cases} m\, Cv\, d\, T + \frac{p\, dv_m}{E} = 0 \\ m\, Cp\, d\, T - \frac{v_m dp}{E} = 0 \end{cases}$$

d'où par division membre à membre après avoir séparé les variables:

$$\frac{C_p}{C_v} = -\frac{v_m dp}{p\, dv_m} = -\frac{dp}{p} \div \frac{dv_m}{v_m}$$

En posant $\frac{C_p}{C_v} = k$ *(constante pour un gaz donné et dans l'état parfait puisque C_p et C_v sont alors deux constantes)* il vient:

$$k \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0$$

Nous avons omis ici l'indice m au volume puisque le quotient de la variation au volume est indépendant de la quantité m.

Ceci s'intègre et devient $\boxed{p\, v^k = \text{constante}}$ comme nous l'avons démontré en première année. Le lecteur est prié de se reporter page 260 et 261 du tome I pour y trouver l'adiabatique du météorologiste $p^{\frac{1-k}{k}}\, T = c^{te}$ et celle du chimiste $T\, v^{k-1} = c^{te}$; ainsi que les formes des trois courbes.

L'intégration est plus rapide que la voie suivie au tome I.

$\frac{dp}{p}$ est la différentielle de $\log_e p$

$\frac{dv}{v}$ est la différentielle de $\log_e v$

$k \frac{dv}{v}$ est la différentielle de $k \log_e v$ soit de $\log_e v^k$

$$k \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0 = d\left[\log_e v^k\right] + d\left[\log_e p\right] = d\left[\log_e (p\, v^k)\right]$$

Et dire que la différentielle est nulle signifie que la fonction est constante

$$\log_e p\, v^k = c^{te}$$

et en remontant aux nombres *(prenant les antilogarithmes)*

$$p\, v^k = \text{antilog } c^{te} = \text{une autre constante}$$

Remarque: la pente de l'adiabatique est toujours *(dans le dia-*

gramme de Clapeyron $p \times v_m$) plus petite que la pente de l'isotherme i.e. plus grande en valeur absolue.

pente de l'adiabatique des ingénieurs $\left(\frac{dp}{dv_m}\right)_{adi.} = - \frac{p\,k}{v_m}$

pente de l'isotherme $\left(\frac{dp}{dv_m}\right)_{isoth.} = - \frac{p}{v_m}$

$$\frac{\text{pente adiabatique}}{\text{pente isotherme}} = \frac{-\,p\,k \div v_m}{-\,p \div v_m} = k > 1 \; .$$

$k = 1.4$ pour un gaz diatomique, 1.67 pour un monoat. et 1.33 pour un triat.

Cette propriété est vraie pour toutes les substances simples. (*Voir tome I, p. 260, ce qu'il en est pour un gaz parfait diatomique*).

N° 122. *Notion de Cycle*. Lorsque le point figuratif de l'état d'un système décrit une courbe fermée, *le système ayant passé par une série de transformations réversibles* pour revenir à son état primitif, on dit depuis Carnot que la substance a décrit un cycle.

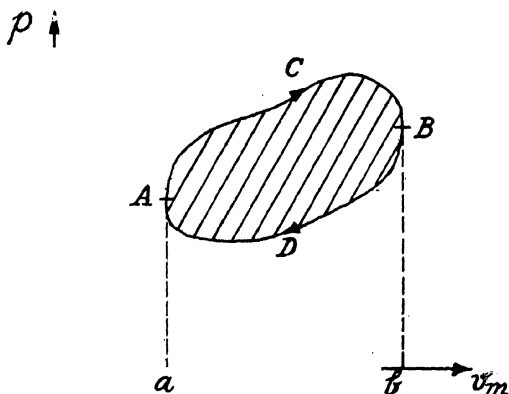
Comme le dit excellemment Monsieur Fabry "insistons bien sur ce fait que, *seuls, les états d'équilibre peuvent être représentés*. En dehors des conditions d'équilibre, la pression varie d'un point à un autre du fluide (*et aussi en général toutes les variables qui caractérisent ses propriétés*). Dans une transformation non réversible, telle que celle de l'expérience de Joule où le fluide se détend sans travail, on peut bien représenter l'état initial et l'état final, mais non les états intermédiaires".

Cycle dextrorsum où le fluide a travaillé

Fig. 88

Le travail accompli par la substance lors de sa détente ACB, *(qui est proportionnel à l'aire: a ACBba)* étant supérieur au travail reçu par la substance lors de sa compression BDA *(travail proportionnel à l'aire:bBDAab) le travail net accompli pour tout le cycle est proportionnel à l'aire hachurée* et positif lorsque le cycle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre. Le facteur de proportionnalité dépendant des deux échelles employées pour représenter les pressions et les volumes.

L'état initial et l'état final coïncidant l'*énergie interne n'a pas varié* : $\Delta U_m = 0$

Donc $E \oint d\,Q_m = \oint p\,dv_m$ ou $\oint d\,Q_m = \frac{1}{E} \oint p\,dv_m$

De sorte que l'aire du cycle est aussi proportionnelle à la chaleur absorbée par le fluide au cours du cycle.

N° 123 *Le Cycle de Carnot (modifié par Thomson).*

Les parties hachurées de la figure 89 indiquent des matériaux *(tels que l'amiante)* non conducteurs de la chaleur.

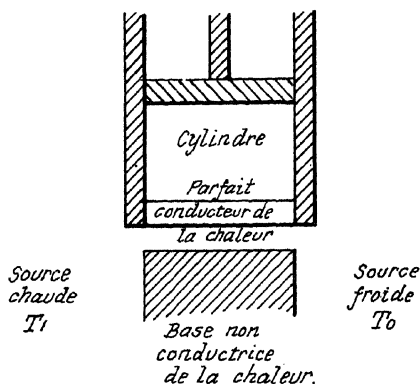



Fig. 89

Un cylindre dont la paroi est imperméable à la chaleur mais dont la base est un conducteur parfait peut être mise en contact soit avec une source chaude, soit avec une source froide ou condenseur, soit avec une base d'amiante.

Le piston et sa tige également imperméables à la chaleur sont connectés à un mécanisme qui utilisera le travail produit *(machine à vapeur et non réfrigérateur à compression).*

Premier arc AB: la base du cylindre étant fixe, on amène la source chaude T_1 en contact, le piston s'élève et prend de la chaleur *à température constante (ce qui suppose une source très grande):* l'arc AB est un *arc d'isotherme* ce qui ne veut nullement dire un arc d'hyperbole équilatère si le fluide est loin de l'état parfait: c'est une droite dans le cas de vapeur saturante *(p. 224 et 225, tome I).*

Deuxième arc BC: à la source chaude ayant substitué la

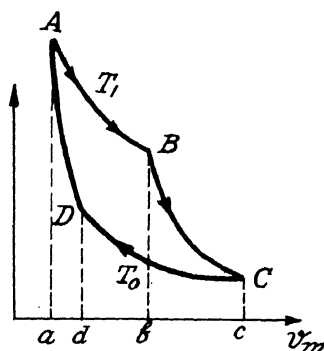



Fig. 90

base d'amiante qui empêche le fond du cylindre de rayonner, le piston continue à s'élever, sans échanger de chaleur avec l'extérieur, *il fournit du travail au mécanisme* donc se refroidit *(travaillant sans recevoir de chaleur):* détente adiabatique.

Troisième arc CD: lorsque par détente adiabatique la température T_0 de la source froide a été atteinte, enlevons la base d'amiante et amenons la source froide, par inertie du mécanisme et de son volant, le piston va être comprimé à température constante, la source froide étant là pour absorber la chaleur de la compression.

Quatrième arc DA: supposons que nous substituions à la source froide la base d'amiante au moment voulu pour que la compression se continuant *(grâce au volant)* la compression adiabatique nous ramène à l'état initial, de sorte que la température T_1 de la source chaude étant atteinte, nous puissions "sans rétablissement dans le calorique" substituer la source chaude à la base d'amiante.

Nous avons *une succession d'états d'équilibre* donc nous pouvons les représenter; d'autre part, nous ne *mettons le fluide en contact avec une source que lorsque par détente ou compression adiabatique le fluide a déjà la température de la source:* aucune machine ne peut fonctionner ainsi car son rendement a beau être supérieur, une machine infiniment lente n'est pas pratique, nous discuterons plus loin les cycles réels.

L'aire ABCD du diagramme de Clapeyron lue à l'échelle représente $\oint p\, dv_m$ = travail net fourni par cycle au mécanisme.

Puisque cycle il y a, en divisant par E ce travail, on aura aussi la chaleur absorbée par le fluide évoluant (N° 122).

Le coefficient économique ou rendement thermique *(thermal efficiency)* est

$$\rho = \frac{\text{chaleur transformée en travail}}{\text{chaleur payée}}$$

En admettant que la source froide ne coûte rien comme entretien ou pompage et que seules soient payées les calories de la source chaude, en appelant Q_1 les calories absorbées par le fluide lors du contact avec la source chaude et Q_0 les calories cédées à la source froide,

$$\rho = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = 1 - \frac{Q_0}{Q_1}$$

Comme toute saine théorie, le cycle de Carnot de suite montre un rendement plus petit que l'unité et il va s'agir de trouver comment diminuer le plus possible ce déchet $Q_0 \div Q_1$ qui empêche la transformation de chaleur en travail mécanique d'être aussi efficace que l'inverse. C'est là l'oeuvre fondamentale de Carnot.

N° 124. Le Cycle de Carnot est réversible *(nos réfrigérateurs électriques par compression sont des machines à vapeur fonctionnant à l'envers).*

Inversant le sens des flèches de la figure 90, on peut parcourir les arcs dans l'ordre 4, 3, 2, 1 chaque étape étant inversée.

Etape 4 inversée: AD: Par détente adiabatique *(la base d'amiante touchant le fond du cylindre)* la température tombe de T_1 à T_0, le fluide travaillant et ne recevant pas de calories se refroidit.

Etape 3 inversée: DC: Continuant à travailler, mais prenant des calories (Q_0) à la source froide *(refroidissant les victuailles du réfrigérateur)*, le fluide perd moins vite de sa pression dans cette détente isotherme que lors de la détente adiabatique.

La quantité Q_0 qu'il absorbe est la même que celle qu'il abandonnait au condenseur dans le cycle dextrorsum.

Etape 2 inversée CB: Le mécanisme élève la température de T_0 à T_1 par compression adiabatique.

Etape 1 inversée arc BA; retour à l'état initial, compression isotherme, abandon de chaleur Q_1 à la source chaude, *(circulation d'eau ou air de la cuisine):* le mécanisme doit évidemment fournir du travail pour cette opération qui n'est pas selon l'ordre des choses. *(Prendre des calories au corps le plus froid pour en donner au plus chaud).*

Le nombre de calories Q_1 cédé est le même que celui pris dans le cycle direct ⟳ .

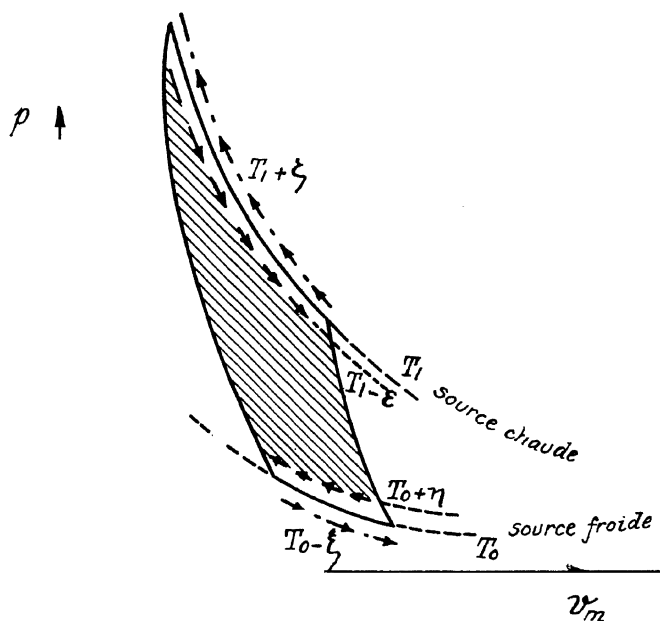
Dans ce cycle inverse ⟲ *le travail net est accompli par la machine* puisque l'aire AadcCDA du travail accompli lors des détentes est inférieure à l'aire cCBAabc du travail consommé lors des compressions. *(C'est pourquoi il y a un moteur dans les réfrigérateurs mécaniques).*

Une quantité de chaleur Q_1 est rejetée à la source chaude alors qu'une quantité moindre Q_0 est prise à la source froide. Il y a donc perte nette de chaleur et c'est le "travail de compensation" du moteur qui compense cette perte.

La réversibilité de ces cycles exige qu'ils soient accomplis très lentement de façon que la substance soit à tout instant *mécaniquement et thermiquement* en état d'équilibre avec les états voisins.

N° 125. *Différence essentielle entre le cycle ⟳ de la machine à vapeur et celui ⟲ du réfrigérateur mécanique.*

Cycle direct ⟳: Pour que de la chaleur passe de la source chaude au fluide, il faut que le fluide soit plus froid; la

différence peut être très petite si le cycle est très lent, mais il faut une différence de température pour actuer le pa sage de la chaleur: le fluide aura donc $T_1 - \varepsilon$ comme températ re de son isotherme supérieure.

Aire hachurée ; cycle du fluide dans un moteur thermique ↻ aire < aire du cycle théorique.

Aire délimitée par les traits mixtes —·—·— ↺ dans un réfrigérateur mécanique aire > aire du cycle théorique.

Fig. 91

De même pour que de la chaleur passe du fluide au condenseur, il est nécessaire que le fluide soit plus chaud, l'isotherme inférieure aura $T_0 + \eta$ comme température *(ε et η étant aussi petites que nous voudrons si le cycle est un cycle qui évolue avec "son train de sénateur" et non un cycle d'ingénieur).*

Cycle inverse ↺ : Touchons le radiateur qui domine le réfrigérateur de la "General Electric"; il est plus chaud que l'atmosphère de la cuisine, autrement il ne céderait pas de chaleur à la source chaude: l'isotherme du fluide lors du contact avec la source chaude T_1 a donc une température $T_1+\xi$.

Et comme pour refroidir les victuailles de la source froide T_0 il faut que le fluide soit plus froid, l'isotherme du fluide doit avoir une température $T_0 - \xi$.

De même pour qu'il y ait mouvement du piston *même très lent*, il faut, s'il y a détente, que la pression du gaz soit supérieure au quotient

$$\left\{\frac{\text{force de la bielle}}{\text{aire section droite du piston}}\right\}$$

autrement les frottements et l'inertie empêcheraient le mouvement.

Et lors de la compression, il faut que la pression du gaz soit inférieure au quotient $\left\{\frac{\text{force de la bielle}}{\text{section droite du piston}}\right\}$

N° 126. *Les opérations décrites dans le cycle de Carnot-Thomson sont réversibles dans les moindres détails.*

Si, par exemple, le long de l'isotherme supérieure, dans le cas du moteur thermique, nous considérons l'effet d'une petite expansion du fluide: *cette détente* cause tout d'abord un abaissement de température et la pression baisse; mais cette diminution de température active le mouvement de la chaleur de la source chaude vers le fluide ce qui provoque donc *un appel de chaleur* qui va rétablir la température à son état initial.

Inversement, pour une petite régression du fluide, cette *compression* va causer une augmentation de température, ce qui provoquerait une perte de chaleur du fluide qui donnerait des calories à sa source chaude et l'équilibre de température serait rétabli encore.

Le cycle de Carnot réalise donc une auto-régulation parfaite des températures pendant le contact avec les sources de chaleur. Rien de plus logique par conséquent que de le considérer comme *"une succession d'états d'équilibre"*.

Et entre les sources? La compression adiabatique permettant de ne mettre le fluide en contact avec la source chaude qu'après l'avoir réchauffé par compression évitant de mettre un fluide à une température différente de la source en contact avec cette source *(afin dit Carnot d'éviter tout rétablissement tumultueux dans le calorique)*.

Et ce n'est également qu'après l'avoir refroidi par détente adiabatique, lorsque le fluide aura la température de la source froide, qu'on le mettra en contact avec cette source froide.

L'idée si fructueuse d'un cycle réversible est toute dans le mémoire de Carnot. Voyons encore le long d'une adiabatique *(celle de détente motrice de moteur thermique par exemple,* comment la réversibilité est assurée: une expansion soudaine due à une trop grande différence entre la pression du gaz et le quotient

$$\left\{\frac{\text{force sur la bielle}}{\text{section droite du piston}}\right\}$$

provoquerait automatiquement une chute de pression et de température remède immédiat à l'écart d'avec la réversibilité mécanique, le gaz se calmerait comme si une valve ou soupape s'était trouvée là.

Et si une petite défaillance de la pression venait à égaliser p et $\left\{\frac{F\ \text{bielle}}{a\ \text{piston}}\right\}$ ou qui plus est rendre momentanément

la pression du fluide p inférieure à la résistance du mécanisme, il y aurait compression momentanée et rétablissement de la pression du fluide et de la température, et le fluide reprendrait sa maîtrise, son évanouissement ayant vite passé. Nous arrivons maintenant au principe de Carnot.

N° 127. *Principe d'évolution de Carnot ou Second principe de la Thermodynamique:* "*Une machine réversible* est parmi celles qui fonctionnent entre deux limites de température celle qui a le rendement maximum".

Axiome ajouté par Clausius: "Il est impossible de transporter de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud sans un moteur mécanique fournissant le travail de compensation".

C'est un fait absolument général que toutes les *causes (frottements, inertie, résistance électrique, viscosité...)qui rendent le mouvement irréversible sont une cause de gaspillage de travail mécanique:* on croit donc instinctivement au principe énoncé par Carnot; mais cela n'est que qualitatif ; quant à l'axiome de Clausius comme toute inégalité traduisant une vérité de sens commun, il exprime *que de renverser l'ordre des choses doit se payer:* on n'a jamais vu de lui-même un poids remonter tout seul ni un corps froid en réchauffer un plus chaud que lui *(réfrigérateur sans moteur).*

Nous baserons le principe de Carnot sur le postulat de Clausius beaucoup plus frappant, telle une démonstration "ab absurdo" en géométrie.

Appelons R la machine réversible et I la machine irréversible.

Supposons que R prenne Q calories à la source chaude et fournisse A ergs durant son cycle; de sorte que par cycle

$Q - \frac{A}{E}$ soit la chaleur abandonnée au condenseur.

De même, supposons que pour *accomplir le même travail A* I absorbe Q' calories et par suite restitue $Q'-\frac{A}{E}$ au condenseur.

Les "coefficients économiques" ou rendements des deux machines seraient

$$\rho_R = \frac{A}{Q}$$ pour R *(la machine réversible)*

et $$\rho_I' = \frac{A}{Q'},$$ pour I *(la machine irréversible).*

Supposons contre toute attente que le rendement de I soit supérieur à celui de R et voyons comment cette hypothèse conduit à un non-sens.

$$\rho_I > \rho_R \text{ ! entraînerait } Q > Q' .$$

Attelons maintenant R à I, I fonctionnant comme tout à l'heure et R *(puisque réversible)* pouvant fonctionner à l'envers.

Le travail A net fourni par I est absorbé par R et le travail net des deux machines est nul pour tout cycle.

I absorbe Q' de la source *(chaude)* et rend $Q'-\frac{A}{E}$ au condenseur; le récepteur de travail R absorbe du condenseur la chaleur $Q - \frac{A}{E}$ et rejette à la source chaude Q.

Le condenseur donne donc aux deux machines

$$(Q - \frac{A}{E}) - \quad Q' - \frac{A}{E} \qquad Q - Q')$$

Et la source chaude reçoit (Q-Q')

Il y aurait donc eu *sans travail fourni par l'extérieur* transport de (Q-Q') nombre positif de calories de la source froide à la source chaude, ce qui choque notre expérience commune et est contraire à l'axiome de Clausius.

Donc, *I ne peut pas avoir un plus grand rendement que R.*

C'est cette proposition démontrée ab absurdo que tout le monde appelle de Principe de Carnot-Clausius.

N° 128. Toutes les machines réversibles fonctionnant entre les mêmes limites de température ont le même rendement.

Prenons deux machines réversibles R et R'; attelons R' à R par exemple; en calquant identiquement le raisonnement sur le N° 127, on montrerait que R ne peut pas avoir un rendement supérieur à R'.

Et en attelant R à R', de la même façon, on prouverait que R' ne peut pas avoir meilleur rendement que R.

Donc R et R' ont le même rendement.

N° 129. Puisque le rendement thermique de toute machine réversible absorbant Q_1 et rejetant Q_0, c'est-à-dire $\frac{Q_1-Q_0}{Q_1} = 1-\frac{Q_0}{Q_1}$ est seulement fonction des températures extrêmes T_1 et T_0, vu que toutes les machines réversibles fonctionnant entre ces limites ont le même rendement,

le quotient Q_1/Q_0 est une fonction de T_1 et T_0 uniquement

$\frac{Q_1}{Q_0} = f\ (T_1, T_0)$ f signifiant: *fonction de et le rendement maximum d'une machine thermique* fonctionnant entre les deux sources de températures T_1 et T_0, *(c'est-à-dire le rendement d'une machine réversible) ne dépend que des températures extrêmes.*

Considérons deux de ces machines *réversibles*, la première fonctionnant comme moteur thermique absorbant Q_1 calories à la température T_1 et en restituant une partie Q_0 à la température T_0; la chaleur rejetée par la première Q_0 étant supposée absorbée par la seconde machine à cette même température T_0 *(cette seconde machine fonctionnant comme un réfrigérateur à compression dont le moteur serait mû par la première machine)*

Le radiateur du réfrigérateur rejette Q_2 calories à la température T_2.

Le rendement de la première machine $\frac{Q_1-Q_0}{Q_1} = 1-\frac{Q_0}{Q_1}$ *(étant celui d'une machine réversible)* ne dépend que de T_1 et T_0 ou encore $\frac{Q_1}{Q_0} = f\ (T_1, T_0)$ comme on l'a vu.

De même, pour la seconde machine $\frac{Q_0}{Q_2} = f\ (T_0, T_2$

Mais *le résultat global de deux machines réversibles attelées l'une à l'autre est certainement* un processus réversible lui aussi et par suite comme le résultat net est:

$\begin{cases} \text{absorption de } Q_1 \text{ calories à la température } T_1 \\ \text{et rejet de } Q_2 \text{ calories à la température } T_2 \end{cases}$

d'où puisqu'il s'agit de voie réversible,

$Q_1 \quad f\ (T_1,\ T_2$

Mais identiquement $\frac{Q_o}{Q_2}$

D'où en substituant les fonctions des températures

$$f\ (T_1,T_2) = f\ (T_1,T_o).\ f\ (T_o,T_2) \quad \text{ou encore}$$

$$f\ (T_1,T_o) = \frac{f\ (T_1,T_2)}{f\ (T_o,T_2)}$$

Rien ne nous empêche de prendre T_2 comme température constante standard par exemple celle d'une circulation d'eau courante, alors que T_1 température de la chaudière et T_o température commune aux deux machines étant variables *(le condenseur de la première étant la chambre froide de la seconde)*.

Alors T_2 = constante, disparaît des fonctions tout *comme 1 avait disparu (au lieu de* $1 - \frac{Q_o}{Q_1}$ *on avait pris simplement* $\frac{Q_o}{Q_1}$*)* et $f\ (T_1,T_o \quad \frac{T_1,\ \text{constante})}{T_o,\ \text{constante}}$

$$f\ (T_1,T_o) \quad \frac{T_1}{T_o}$$

Et finalement

N° 130. *Températures absolues Kelvin:* pour un gaz parfait, vu que le *coefficient de dilatation sous pression constante et le coefficient d'accroissement de pression à volume constant* sont pratiquement égaux, *(leur valeur commune étant voisine de 1/273)*, par des considérations élémentaires nous avons *(page 252, tome I)* familiarisé le lecteur avec les températures absolues et en particulier celles de l'échelle centigrade, températures dites "températures absolues de l'échelle centigrade" ou plus brièvement "températures KELVIN". C'est ce qu'on appelle aussi les températures du thermomètre à gaz parfait *(ou à hydrogène)*.

Voyons comment Lord Kelvin *(alors Sir William Thomson: 1848)* a été amené à la notion de température absolue à propos du rendement des machines réversibles de

Carnot et *a identifié les températures du thermomètre à gaz parfait et les températures thermodynamiques absolues*.

Devant la formule: rendement $\rho_R = 1 - \frac{Q_o}{Q_1}$, donc ne dépendant que de: $\frac{Q_1}{Q_o}$; et la formule déduite ci-dessus

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_o} = \frac{\varphi\ (T_1)}{\varphi\ (T_o)}}$$

Kelvin a clairement entrevu l'utilité de cette propriété des machines réversibles pour comparer deux températures; l'échelle des températures à adopter dépendant de la forme de la fonction φ choisie.

De plus, comme dans le mémoire de Carnot, Kelvin cherche à rendre cette échelle "absolue" i;e *indépendante de la nature du fluide évoluant.*

Finalement, Kelvin s'arrête à la forme la plus simple des fonctions φ, réduisant φ (T) à être proportionnelle à T ,de sorte que

$$\frac{Q_1}{Q_0} \quad \frac{T_1}{T_0}$$

"The absolute values of two temperatures are to one another in *the proportion of the heat taken in to the heat rejected* in a perfect thermodynamic engine working with a source and refrigerator at the higher and lower of the two temperatures respectively". *(The dynamical theory of hèat).*

Un thermomètre thermodynamique consisterait donc en une cascade de machines *réversibles,* toutes accomplissant A le même travail par cycle: la première prenant Q_1 calories à la température T_1, et rejetant Q_0 calories à la température T_0, la deuxième prendrait Q_0 calories à la température T_0 *(calories rejetées précisément par la première machine)*; à son tour, la deuxième machine abandonnerait Q_2 calories à la température T_2 et une tierce machine avalerait ces Q_2 calories à la température T_2 .... et ainsi de suite.

L'égalité des travaux accomplis, impose l'égalité des calories transformées:

$$\frac{A}{E} \quad Q_1 - Q_0 = Q_0 - Q_2 = Q_2 - Q_3 :$$

D'après le choix de l'échelle Q_1

en changeant les moyens de place, on peut écrire

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_0}{T_0} = k$$

et substituant aux chaleurs les températures

$$\frac{A}{E} = k\ (T_1 - T_0) = k\ (T_0 - T_2) = k\ (T_2 - T_3) = \ldots\ldots$$

c'est-à-dire $T_1 - T_0 = T_0 - T_2 = T_2 - T_3 = \ldots\ldots$

De cette façon, des *intervalles égaux de température sont définis sur l'échelle "absolue".*

Les quantités de chaleur qui entrent en jeu Q_1, Q_0, Q_2, Q_3 ..... cédées par la machine qui précède à la suivante diminuent proportionnellement aux chutes de température envisagées et, à la limite, quand le zéro des températures est atteint, il n'y a plus de chaleur à passer à une machine réversible suivante $Q_n = 0$, la substance évoluant ayant atteint la limite de température la plus basse qui soit possible.

N° 131. Rendement maximum en fonction des températures "absolues".

Toute machine a pour rendement $\left(\frac{Q_1 - Q_0}{Q_1}\right)$

Le rendement de la machine réversible peut s'exprimer en fonction des températures absolues puisque

$$\frac{Q_1}{} = \frac{Q_0}{}$$

$$= \frac{T_1 - T_0}{}$$

Voilà qui explique pourquoi on *"surchauffe" (pour augmenter T_1)* et pourquoi dans les machines fixes on fait passer un cours d'eau dans le condenseur *(pour diminuer T_0)*.

Pour une machine ordinaire, le rendement sera inférieur à celui de la réversible, mais on sait quoi faire pour tendre toujours plus vers un meilleur rendement. L'ingénieur ne peut prendre de source plus froide que les eaux courantes du pays, mais il peut augmenter T_1 et c'est pourquoi, après avoir été vaporisée dans la bouilloire, la vapeur passe dans des tubes surchauffeurs léchés par l'extrémité supérieure des flammes *(la plus chaude)*.

N° 132. Il nous reste maintenant à prouver que la température thermodynamique absolue et celle du thermomètre à gaz parfait sont identiques. Pour cela, étudions le *cycle de Carnot pour un gaz parfait.*

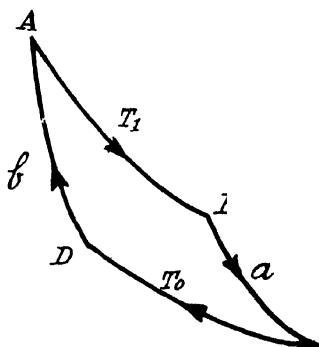



Fig. 92

Les arcs d'isothermes $\overrightarrow{AB}$ et $\overleftarrow{DC}$ seront *(puisque gaz parfait)* d'équations

$$\frac{p\ v_m}{T_1} = \frac{m}{M} R \quad \text{et} \quad \frac{p\ v_m}{T_0} = \frac{m}{M} R$$

Et à leur tour les arcs d'adiabatiques $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DA}$ auront pour équations:

$$p\ v_m^k = a\ \textit{(constante)} \quad \text{et} \quad p\ v_m^k = b\ \textit{(autre constante)}$$

(k étant le rapport $\frac{C_p}{C_v}$ qui ne dépend que de l'atomicité du gaz)

D'après le principe de l'énergie interne $d\,U_m = E\,d\,Q_m - p\,dv_m$ puisque nous avons vu que l'énergie interne ne dépend que de la température, cette énergie interne ne varie pas *le long d'une isotherme*

$$d\,U_m = 0 \;; \quad \text{donc} \quad d\,Q_m = \frac{1}{E}\,(\,p\,dv_m)$$

La chaleur absorbée par le gaz lorsque le point du diagramme décrit l'arc AB est donc

$$Q_1 = \frac{1}{E}\int_{v_A}^{v_B} p\;dv_m = \frac{mRT_1}{ME}\log_e\left(\frac{v_B}{m} \div \frac{v_A}{m}\right)$$

[*en effet* $p = T_1\,\frac{m}{M}\,\frac{R}{v_m}$; $\frac{1}{E}\,p\;dv_m = \frac{m\;R\;T_1}{M\;E}\;\frac{dv_m}{v_m}$

et $\frac{dv_m}{v_m} = d\,(\,\log_e v_m)$.]

De la même manière on trouverait que la chaleur restituée à la source froide (Q_0) vaut:

$$Q_0 = \frac{m}{M}\,\frac{R}{E}\,T_0\log_e\left(\frac{\frac{V_C}{m}}{\frac{V_D}{m}}\right)$$

Pour déterminer les constantes a et b des arcs d'adiabatique, écrivons qu'au point A les arcs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA}$ se raccordent et de même au point B les arcs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

$$\begin{cases} p\;V_{mA} = \frac{m}{M}\,R\,T_1 \\ p\;V_{mA}^{k} = b \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} p\;V_{mB} = \frac{m}{M}\,R\,T_1 \\ p\;V_{mB}^{k} = a \end{cases}$$

d'où $V_{mA}^{k-1} = \frac{M\;b}{m\;R\;T_1}$ d'où $V_{mB}^{k-1} = \frac{M\;a}{m\;R\;T_1}$

divisant ces deux résultats l'un par l'autre et extrayant la racine $(k-1)$ième, il vient;

$\frac{V_{mA}}{V_{mB}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{k-1}}$; on trouverait de même $\frac{V_{mD}}{V_{mC}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{k-1}}$

d'où l'on voit la proportionnalité des volumes:

$$\frac{V_{mB}}{V_{mA}} = \frac{V_{mC}}{V_{mD}}$$

(on pourrait ici enlever l'indice m puisqu'il s'agit de quotients)

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Mais on a trouvé $Q_1 = \frac{m\;R\;T_1}{M\;E}\log_e\left(\frac{V_{mB}}{V_{mA}}\right)$

et $Q_0 = \frac{m\;R\;T_0}{M\;E}\log_e\left(\frac{V_{mC}}{V_{mD}}\right)$

On tire donc $\boxed{\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{T_1}{T_0}}$ par division membre à membre.

Ceci confirme que le *rapport (et seulement le rapport)* de deux températures absolues de l'échelle absolue ou thermodynamique et de l'échelle du thermomètre à gaz parfait est le même.

L'hydrogène et les gaz "permanents" peuvent donc nous renseigner sur le *rapport* de deux températures absolues.

Le lecteur retrouvera dans le livre de première année comment calculer les températures absolues Kelvin, Fahrenheit et Réaumur *(p.231)* et c'est parce que les températures absolues ne sont fixées *que* par leur *rapport* qu'il y en a autant que de thermomètres usuels, deux nombres n'étant définis que par leur rapport x/y, pour toute valeur de x - y, il y a deux solutions.

Entre les points repères glace fondante x et eau bouillante y en centigrades il y a 100 échelons: $y-x = (100-0)$

en Fahrenheit il y a 180 échelons: $y'-x' = (212-32)$

en Réaumur il y a 80 échelons: $(y''-x'') = (80-0)$

Et $\frac{y}{x}$ $\frac{y'}{x'}$ $\frac{y''}{x''}$ 1.366 .... *(voir p.232, tome I)*

N° 133. *L'entropie.- (L'évolution en thermodynamique, comment prévoir la probabilité d'une réaction et sa violence?)*

Pour arriver à l'entropie, il nous faut d'abord *rendre algébrique* la relation $Q_1/Q_0 = T_1 / T_0$ qui elle est arithmétique.

(Q_1 désigne les calories cédées par la source chaude et Q_0 les calories cédées à la source froide).

A l'aide de l'algèbre, nous aurons une notation entièrement symétrique en écrivant que $-Q_0$ sont les calories cédées *par* la source froide. *Il ne s'agira plus désormais que de calories cédées par les sources (positivement par les sources chaudes, négativement par les froides)*

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{-Q_0}{T_0} \text{ ou encore } \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_0}{T_0} = 0$$

Ceci est pour la transformation réversible; pour la transformation irréversible nous aurons une inégalité.

En effet *(au N° 127)* nous avons vu qu'*une machine irréversible avait un rendement moindre qu'une réversible* et *(au N° 131)* que le rendement de toute machine réversible était $1 - T_0/T_1$.

Pour une machine irréversible, on peut donc écrire

$$\rho_I < \rho_R$$

$$1 - \frac{Q_0}{Q_1} < 1 - \frac{T_0}{T_1}$$

ou

$$\frac{Q_0}{T_0} > \frac{Q_1}{T_1}$$

ici Q_0 et Q_1 sont arithmétiques encore comme aux numéros précédents.

Rendons algébriques les quantités de chaleur pour avoir plus de symétrie: *n'écrivons que des chaleurs cédées par les sources:*

$$\frac{-Q_0}{T_0} > \frac{+Q_1}{T_1}$$

ou

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_0}{T_0} < 0$$

Conclusion: Après un cycle, si un système emprunte *(algébriquement)* de la chaleur à deux sources *isothermes,* la somme des quotients.

n parties du cycle réversible :
1e partie
Q_1 absorbée
T_1
2e partie
Q_2 absorbée
T_2
3e partie
Q_3 absorbée
T_3
nième partie
Q_n absorbée
T_n
(n-1) machines réversibles
T_1 q_1 T_2
T_2 q_2 T_3
T_3 q_3 T_4
T_{n-1} q_{n-1} T_n
$Q_2 + q_2$
$Q_3 + q_3$
$Q_4 + q_4$
$Q_n + q_n$

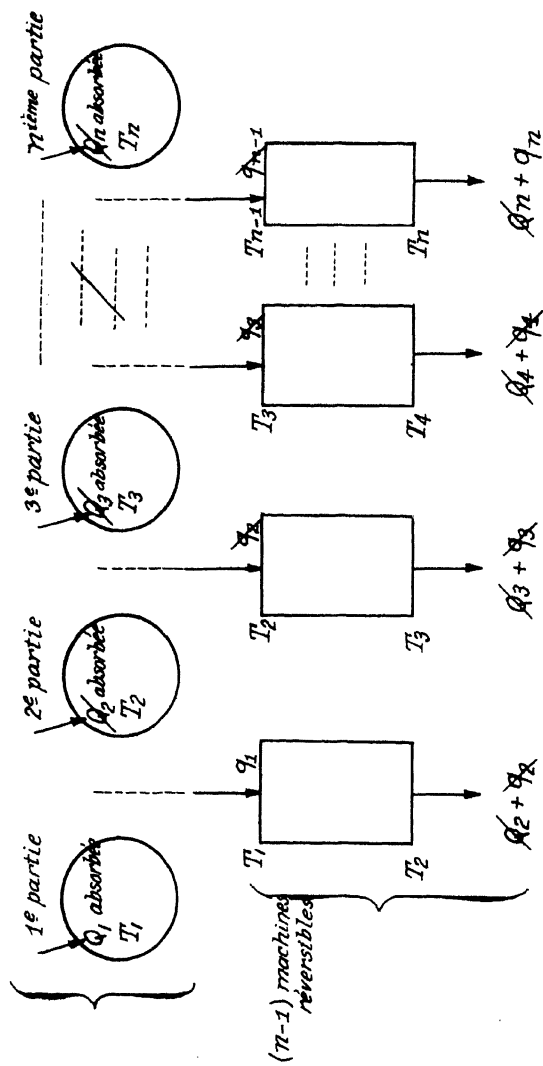



Fig. 93

$\frac{\text{chaleur empruntée}}{\text{température de la source}}$ n'est *jamais positive*

a) si la transformation est réversible $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_0}{T_0} = 0$

b) si elle est irréversible $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_0}{T_0} < 0$

Notes:

I) T_1 et T_0 sont les températures des sources isothermes et non celles du système évoluant s'il s'agit de transformations irréversibles.

Pour une transformation réversible à un infiniment petit près ce sont aussi les températures du système.

II) Q_1 et Q_0 sont comptées comme *positives* si effectivement la source a *fourni des calories*, négativement s'il s'agit d'un condenseur.

N° 134. *Extension à un nombre quelconque de sources.*

(Nous empruntons à Birtwistle une preuve très satisfaisante dont il attribue les grandes lignes à Lord Kelvin lui-même; généralement la preuve est escamotée ou ramenée à une machine monotherme).

"Considérons un système accomplissant un cycle réversible d'opérations.

"Divisons le cycle en un grand nombre (n) de parties dans chacune desquelles la chaleur Q_1 est absorbée à la température T_1; la chaleur Q_2 à la température T_2 et ainsi de suite respectivement *(les indices se correspondant).*

"Considérons de plus (n-1) machines réversibles dont la première absorbe la chaleur q_1 à la température T_1 et restitue la chaleur $(Q_2 + q_2)$ à la température T_2 ; la seconde absorbe la chaleur q_2 à la température T_2 et restitue la chaleur $(Q_3 + q_3)$ à la température T_3, et ainsi de suite, comme le diagramme suivant l'indique.

"Ces (n-1) machines comme effet global *absorbent* q_1 à la température T_1 et rejettent Q_2 à T_2, Q_3 à T_3, Q_4 à T_4,....Q_{n-1} à T_{n-1} et $(Q_n + q_n)$ à T_n.

"Le système considéré absorbe, lui, Q_1 à T_1, Q_2 à T_2 .... et Q_n à T_n.

"Les (n-1) machines et les (n) parties du cycle forment ensemble un système complexe qui est réversible; et pour ce système complexe, la balance des entrées de chaleur est $Q_1 + q_1$ à la température T_1 et la balance des sorties de chaleur est q_n à la température T_n.

Pour le tout, donc *(puisque réversibilité)*

$$\frac{Q_1 + q_1}{T_1}$$

(relation arithmétique Q_1 et q_1 sont fournies par la source alors que q_n est donnée à la source)

"Mais pour chacune des (n-1) machines considérées séparément, *(puisqu'elles sont individuellement réversibles),* on a:

$$\frac{Q_2 + q_2}{T_2} = \frac{q_1}{T_1}$$

$$\frac{Q_3 + q_3}{T_3} = \frac{q_2}{T_2}$$

$$\frac{Q_n + q_n}{T_n} = \frac{q_{n-1}}{T_{n-1}}$$

toutes relations *arithmétiques aussi*, les numérateurs de gauche étant fournis *à* la source et ceux de droite fournis par la source.

"Ajoutant membre à membre toutes ces équations des (n-1) machines considéréres une à une et du système complexe [*cycle total + (n-1) machines*] il vient:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_n}{T_n} + \frac{q_n}{T_n} = \frac{q_n}{T_n} + \frac{q_1}{T_1} + \frac{q_2}{T_2} + \dots + \frac{q_{n-1}}{T_{n-1}}$$

soit $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_n}{T_n} = 0$

"ou pour des variations infiniment petites où dQ serait la chaleur absorbée à la température absolue T,

$$\Sigma \frac{dQ}{T} \quad 0 \text{ pour un cycle réversible.}$$

Note: Bien que Q soit une variable extensive, nous n'avons pas mis "m" en indice partout pour ne pas charger l'écriture.
Ne pas prendre dQ (pas plus que dA) pour des différentielles exactes.

Passons maintenant au cycle irréversible: puisque nous le savons avoir un rendement moindre que le réversible, si Q_1 est absorbée à T_1 et Q_2 rejetée à T_2

$$\underbrace{\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}}_{\rho_I} < \underbrace{\frac{T_1 - T_2}{T_1}}_{\rho_R}$$

ou encore $Q_2 T_1 > Q_1 T_2$ *(on change le sens d'une inégalité en changeant les signes des deux membres)*
ou finalement pour un seul cycle:

$\frac{Q_2}{T_2} > \frac{Q_1}{T_1}$ *(ce que nous avons traduit algébriquement par $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$ au Nº 133 où les deux chaleurs étaient alors des chaleurs absorbées).*

"Considérons maintenant un système décrivant un cycle d'opérations irréversibles.
"Adjoignons-lui (n-1) machines *réversibles* comme tout à l'heure.
"Puisque le *complexe total* cycle irréversible + (n-1) machines réversibles est *irréversible*, nous aurons:

$\frac{Q_1 + q_1}{T_1} < \frac{q_n}{T_n}$ arithmétiquement alors que pour

les (n-1) individuellement réversibles, comme ci-dessus

$$\dots\dots \frac{Q_n + q_n}{T_n} = \frac{q_{n-1}}{T_{n-1}}$$

Ajoutons, membre à membre, nous obtenons

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \ldots\ldots + \frac{Q_{n-1}}{T_{n-1}} + \frac{Q_n}{T_n} < 0$$

ou $\Sigma \frac{dQ}{T} < 0$ pour un cycle irréversible avec un nombre quelconque de sources.

N° 135. *La fonction "entropie" de Clausius (1855)*

Lorsqu'à la température *(absolue)* T une substance absorbe dQ_m calories, le quotient $dS_m = \frac{dQ_m}{T}$ est appelé l'accroissement de l'entropie S_m de la substance.

Note: (Lorsque la quantité de chaleur est en calories, l'entropie est désignée par le symbole $S_m \frac{calories}{degré\ Kelvin}$*; et lorsque la quantité de chaleur est en ergs, l'entropie est désignée gnée par le symbole*

$$\mathcal{S}_m = \frac{ergs}{degré\ Kelvin} = E\ S_m.)$$

L'importance de cette fonction *(tout comme de celle de l'énergie interne est qu'elle est une différentielle exacte, que sa variation est nulle pour tout un cycle réversible).*

Nous l'avons démontré au N° 134 avec les (n-1) machines réversibles et les (n) sources; vérifions sur le cycle réversible dans les moindres détails, le cycle de Carnot, que la variation d'entropie est bien nulle: ce sera un cas particulier intéressant.

$\int_A^B \frac{dQ_m}{T_1}$ le long de l'arc d'isotherme supérieure peut s'écrire en mettant la constante $1/T_1$ en facteur:

$$\frac{1}{T_1} \int_A^B dQ_m = \frac{Q_{1m}}{T_1} > 0$$

Le long de l'arc d'adiabatique BC, la variation d'entropie est nulle puisque dQ_m est identiquement nulle et que le dénominateur est toujours grand *(300 et au-delà).*

Le lecteur voit maintenant pourquoi une "adiabatique " s'appelle aussi une "isentropique"

$$dQ_m = 0 \text{ entraînant } \frac{dQ_m}{T} = 0$$

Le long de l'arc d'isotherme CD, la variation d'entropie

$$\int_C^D \frac{dQ_m}{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_C^D dQ_m = \frac{+Q_{0m}}{T_0} < 0$$

les chaleurs étant ici algébriques, toutes chaleurs *absorbées* et le long de l'adiabatique DA, pas de variation d'entropie.

Pour tout le cycle de Carnot ↻ l'intégrale curviligne de la fonction entropie est donc nulle:

$$\oint \frac{dQ_m}{T} = \frac{Q_{1m}}{T_1} + \frac{Q_{0m}}{T_0} = 0 \text{ (zéro)}$$

Comme l'énergie interne, l'entropie n'est connue que par ses variations.

Désignons par S_0 sa valeur constante le long de l'arc DA d'adiabatique-isentropique, de A en B le long de l'isotherme elle a augmenté de Q_1/T_1 et est devenue $S_1 = S_0 + Q_1/T_1$.

Conservant cette valeur tout le long de l'adiabatique isentropique BC, lors de l'arc d'isotherme CD, elle devient

$$S_1 + \frac{Q_0}{T_0} = S_0 + \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_0}{T_0} = S_0$$

puisque $$\frac{Q_0}{T_0} = -\frac{Q_1}{T_1}$$

Pour des raisons que le lecteur devinera aux numéros suivants, certains auteurs appellent "dégénération thermodynamique" le quotient Q_0/T_0 *(lors de la conversion de travail en chaleur)* et " régénération thermodynamique le quotient Q_1/T_1 *(lors de la conversion de chaleur en travail).*

Ce qui est immédiat avec le cycle de Carnot, c'est que la variation d'entropie ne dépend pas du chemin suivi *(propriété des différentielles exactes).*

Ainsi de A en C ($\overrightarrow{AB} + \downarrow BC$) la *variation* d'entropie est Q_1/T_1 + zéro > 0 en passant par B.

Et de A en C en passant par D la variation d'entropie serait zéro + Q_0/T_0 > 0 *(dans le sens parcouru).*

Mais ceci est *vrai pour tout cycle réversible.*

N° 136. Lord Kelvin avait remarqué que dans les processus naturels la *tendance était au gaspillage de l'énergie mécanique* "there is at present in the material world a tendency to the dissipation of mechanical energy". Plus tard, Maxwell *(pour mieux faire ressortir que le principe de Carnot n'est vrai que statistiquement et non pour l'individuelle molécule)* imaginera de "petits démons" qui, eux, pourraient renverser l'ordre des choses *tel qu'il nous apparaît à notre échelle où des multitudes de molécules évoluant nous ne voyons que le jeu des grands nombres* et non les échanges moléculaires individuels.

En philosophie, on dirait que l'*accident* peut être vu par les êtres moléculaires mais que l'*essence* synthèse de nos perceptions macroscopiques des choses néglige les écarts très rares de l'échelle microscopique.

Et pour dire que le principe de Carnot est "vrai" il faut, comme Boileau, dire que "le vraisemblable est plus vrai que le véritable" entendez: *le probable (en moyenne) doit plus compter que l'extraordinaire.*

Les tendances nettement classiques et même scolastiques du grand siècle étaient dues à ce sentiment statistique.

Tout ceci pour ne pas que le lecteur croie que le principe de Carnot a une plus grande valeur que celle d'une forte probabilité *(comme nous le montrera BOLTZMANN).*

N° 137. *Accroissement "macroscopique" de l'entropie dans les processus naturels*, c'est-à-dire "irréversibles statistiquement."

La variation d'entropie est facile à calculer lorsque n'interviennent que des modifications thermiques et mecaniques.

Et pour calculer cette variation d'entropie, il ne sert de rien de s'occuper de ce qui se passe réellement pendant la transformation elle-même conduisant de l'état initial à l'état final.

Il faut "imaginer une transformation réversible" allant du premier au dernier état et "calculer ce qui se passerait" si la voie était réversible ;comme la variation d'une différentielle exacte est indépendante du chemin, nous avons le choix des voies réversibles.

L'accroissement d'entropie en chimie est parfois calcul risqué, car on a "parfois de la peine à imaginer la transformation réversible" notamment pour une explosion!

Nous allons donc numériquement calculer la variation d'entropie *lorsque l'état initial et l'état final peuvent être considérés comme des états d'équilibre:* il suffira alors de supposer la transformation très lente pour être dans le cas de la "réversibilité".

Premier exemple: Expérience de Joule: Gaz sous pression dans un cylindre de volume v_A qui pénètre dans un autre cylindre de volume v_B qui était vide de tout gaz auparavant.

Etat initial du gaz: volume v_A , température T_0.

Supposons avoir affaire à un gaz parfait, la température sera inchangée *(voir Nº 117).*

Etat final du gaz *(et c'est le même gaz, il n'y a pas eu contraction ni dissociation pour changer le nombre de molécules)* volume $v_A + v_B$, température T_c .

Processus réversible "imaginable": Supposons que le volume v_A augmente lentement de façon à pousser un piston dans le vase cylindrique B, piston réglé de sorte qu'à tout instant la pression extérieure soit tout juste inférieure d'un infiniment petit à celle du gaz. Supposons de plus cette détente avec travail extérieur refroidissant le gaz, que de la chaleur puisse pénétrer par les parois des cylindres de manière à conserver constante la température *(thermostat).*

C'est un moyen réversible d'atteindre l'état final à partir de l'état initial et *"l'accroissement d'entropie dans le processus irréversible est l'intégrale de l'entropie $\int dQ/T$ pour le processus réversible* que nous venons de décrire, soit donc $1/T_0 \Sigma dQ_m$ puisque la température est constante et cette variation d'entropie égalera Q_m/T_0 si l'on appelle Q_m la chaleur absorbée par le gaz.

Mais l'énergie interne est un invariant du processus réversible décrit puisque la température initiale est conservée jusqu'à la fin, puisque l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température *(Nº 117).*

$$U_m = c^{te} ; \quad E\, d\,Q_m - p\, dv_m = \Delta U_m = 0$$

$$\text{donc } \int dQ_m = \int \frac{p\, dv_m}{E} \quad \text{ou} \quad Q_m = \frac{A}{E}$$

et l'accroissement d'entropie à température constante

$$\Delta S_m = \int \frac{dQ_m}{T} = \frac{1}{T_0} \int dQ_m = \frac{Q_m}{T_0} = \frac{A}{ET}$$

Mais ce travail A accompli par le gaz lors d'une expansion réversible, nous le savons calculer en utilisant

$$p\, v_m = \frac{m}{M} R\, T$$

$$\int^{V_A+V_B} p\ dv_m \quad \int^{V_A+V_B} \frac{m}{M} R\ T_0 \frac{dv_m}{v_m} = \frac{m}{M} R\ T_0 \log_e \frac{V_A + V_B}{V_A}$$

d'où $$\Delta S_m = \frac{m}{M} \frac{R}{E} \log_e \frac{V_A + V_B}{V_A} = m(C_p - C_v) \log_e \frac{V_A}{}$$

Bien remarquer que bien qu'aucune chaleur extérieure n'ait été absorbée dans le processus *irréversible*, il n'y a néanmoins accroissement d'entropie.

Remarque d'intérêt historique: Ce que Thomson *(William)* appellerait "dissipation d'énergie" dans cette expérience est T_0 fois plus grand que la variation d'entropie en unités énergétiques

$$T_0 \Delta \Phi_m = T_0 F \Delta S_m = T_0 F m (C_p - C_v) \log_e \frac{V_A + V_B}{V_A}$$

C'est des idées de Kelvin qu'est venue l'habitude de considérer la chaleur comme de l'énergie dégradée ou dissipée [*par frottement; par conduction thermique; perte en ligne par conduction électrique (effet Joule) et dans les réactions irréversibles...*]

Deuxième Exemple: Ligne de conduction thermique:

Si une quantité de chaleur Q est transportée d'une source chaude à température T_1 à un réservoir de chaleur où la température est T_0 *(évidemment $T_1 > T_0$)*

la source chaude perd l'entropie Q/T_1

la réserve plus froide gagne l'entropie Q/T_0

Même si la conduite est bien calorifugée et qu'il n'y ait pas de perte en ligne *en régime permanent* c'est-à-dire même si Q tirée de la source chaude est intégralement transportée au réservoir de chaleur une fois la conduite chaude, le système gagne de l'entropie:

$$\text{gain } (Q/T_0) - \text{perte } (Q/T_1) > 0$$

C'est en remarquant que: *dans tous les processus qui se font tout seuls (et ce d'autant plus qu'ils sont plus violents à se produire): l'entropie croît* que Clausius a énoncé: "l'entropie de l'univers tend vers un maximum".

Il est curieux que l'idée de Thomson *"perte" continuelle d'énergie "mécanique"* et le point de vue de Clausius *"gain" continuel d'entropie"* expriment le même ordre des choses, la dégradation de l'énergie, l'uniformisation des niveaux *(potentiels et températures)*.

Troisième exemple: La diffusion de deux gaz l'un dans l'autre: Voilà encore quelque chose d'irréversible sur la terre *(par opposition à la stratosphère)*. On ne peut même *plus séparer les deux gaz physiquement (comme on le fait pour les liquides)* en les laissant longtemps se placer par ordre de densité ou en centrifugeant; et cette *diffusion est spontanée* même pour deux gaz sans affinité chimique *(mélange et non combinaison)*.

Nous supposerons ces deux gaz "parfaits" et comme lemme préliminaire nous allons voir l'importance de la question: calculer "l'entropie d'une molécule-gramme de gaz parfait".

Lemme: L'entropie d'un gaz parfait: Soit une molécule-gramme de gaz parfait représentée par le point A; pour cal-

culer le changement d'entropie lorsque le gaz passe à l'état représenté par le point B, nous avons simplement à lui faire décrire *un processus réversible quelconque* le faisant passer de l'état initial A à l'état final B et déduire la variation d'entropie des échanges de chaleur requis.

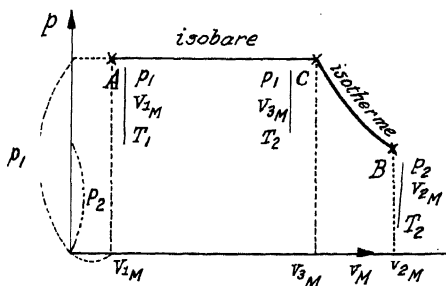



Fig. 94

Par exemple, chauffons le gaz sous pression constante, jusqu'à ce qu'il atteigne l'état représenté par le point C *(lequel point appartient à l'isotherme qui passe par B.*

$$(\Delta S)_A^C = \int_{T_1}^{T_2} \frac{M\,C_p \cdot d\,T}{T} = \int_{T_1}^{T_2} M\,C_p\, d(\log_e T) = M\,C_p \log_e \frac{T_2}{T_1}$$

Durant la détente isotherme qui suit, le travail d'expansion est:

$$\int_{V_{3(M)}}^{V_{2(M)}} p \cdot dv_M = R\ T_2 \int_{V_{3(M)}}^{V_{2(M)}} \frac{dv}{v} = R\ T_2 \log_e \frac{V_{2(M)}}{V_{3(M)}} = R\ T_2 \log_e \frac{V_2}{V_3}$$

La loi de Boyle-Mariotte donne pour cette isotherme ,

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{p_1}{p_2}$$

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépendant que de sa température, nous pourrons déduire la chaleur absorbée par le gaz du travail fourni puisqu'isothermisme

$$\text{zéro} = \Delta\ U_M = E\ \Delta\ Q_M - \int p \cdot dv_M$$

$$\Delta\ Q_M = \frac{1}{E} \int p \cdot dv_M = \frac{R\ T_2}{E} \log_e \frac{V_2}{V_3} = \frac{R\ T_2}{E} \log_e \frac{p_1}{p_2}$$

$$(\Delta\ S_M)_C^B = \frac{(\Delta\ Q_M)_C^B}{T_2} = \frac{R}{E} \log_e \frac{p_1}{p_2}$$

La variation totale d'entropie ne dépendant pas du chemin suivi puisque l'entropie a une différentielle exacte tout comme l'énergie interne,

$$(\Delta S_M)_A^B = (\Delta S_M)_A^C + (\Delta S_M)_C^B = M\,C_p \log_e \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{E} \log_e \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

Et pour l'entropie d'un gaz de masse M *(une mol)*, à la température T et sous la pression p

$$S_M = M\, C_p \log_e(T) - \frac{R}{E} \log_e(p) + a_M$$

Comme on ne connaît que les variations d'entropie ou d'énergie, la constante "a" est *arbitraire*.

Nous pouvons maintenant traiter le troisième exemple: si nous avons par exemple deux gaz parfaits sous la même pression p et *à la même température T* occupant l'un le volume $v_{1(nM)}$ et l'autre le volume $v_{2(n'M')}$, les volumes étant différents si le nombre de molécules est différent si p = cte.

Mettons-les en communication, ils vont se diffuser l'un dans l'autre, la *pression totale ne va pas changer*, le nombre de molécules par cm³ non plus et le volume total non plus, donc la température restera la même T.

A priori, les conditions de pression et de température étant les mêmes avant, pendant et après, on pourrait se demander pourquoi il y a diffusion? Grâce au fait que l'entropie augmente on peut prévoir que la diffusion se fera d'elle-même.

Soit n_1 le nombre de mols du 1er gaz *(mols = mol.grammes.)*

$$p\, v_{1(nM)} = n\, R\, T \qquad \text{d'où} \quad n_1 \quad \frac{v_{1(nM)}}{n \quad 1}$$

Et de même n'_2 le nombre de mols du 2ème gaz

$$p\, v_{2(n'M')} = n'_2\, R\, T \qquad \text{d'où} \quad n'_2$$

L'entropie du premier gaz avant la diffusion est donnée par la formule du lemme précédent:

$$S_{n_1 M} \quad n_1 \left\{ M_1 C_{p_1} \log_e T - \frac{R}{E} \log_e(p) + a_{M_1} \right\}$$

Et l'entropie de l'autre avant la diffusion par:

$$S_{n'_2 M'} = n'_2 \left\{ M' C_{p_2} \log_e T - \frac{R}{E} \log_e(p) + a_{M'} \right\}$$

L'entropie du mélange diffusé est:

$$S_{n_1 M + n'_2 M'} \quad (n_1 M_1 C_{p_1} + n'_2 M' C_{p_2}) \log_e T + n_1 a_{M_1} + n'_2 a_{M'} -$$

$$- \frac{R}{E}\, n_1 \log_e \frac{n_1}{n_1 + n_2}\, p \; -$$

$$- \frac{R}{E}\, n'_2 \log_e \frac{n'_2}{n_1 + n'_2}\, p$$

où $\frac{n_1}{n_1 + n'_2} p$ est la pression partielle du premier gaz dans le mélange et de même $\frac{n'_2}{n_1 + n'_2}$ la pression partielle du second *(voir loi de Dalton, tome I, page 234)*.

Puisque la diffusion se fait toute seule, sans brasser, même si le plus lourd est plus bas que le plus léger, il doit y avoir augmentation d'entropie

$$S_{n_1 M + n'_2 M'} > S_{n_1 M} + S_{n'_2 M'} ,$$ ou donc en écrivant f_1 et f_2 à la place des concentrations proportionnelles *(pour rappeler que ce sont des fractions)*

$f_1 =$

$$\Delta S_{n_1 M + n_2' M'} = -\frac{R}{E}\left\{n_1[\log_e f_1 p - \log_e p] + n_2'[\log_e f_2 p - \log_e p]\right\}$$

$$= -\frac{R}{E}\left\{n_1 \log_e (f_1) + n_2' \log_e (f_2)\right\}$$

Mais les *logarithmes* de deux *fractions* sont tous deux *négatifs*; donc la *variation d'entropie est positive*

$$-\frac{R}{E}\ \{-\}\ = +$$

Quatrième Exemple: L'égalisation des températures dans le calorimètre de Berthelot (adiabatisme statique) se produit seule, voyons qu'il y a augmentation d'entropie sur un exemple simple:

Mélangeons 10 grammes d'eau à 50 degrés centigrades et 10 grammes d'eau à 30 degrés centigrades. De suite, on connaît le résultat: 20 grammes à 40 degrés centigrades grâce au nivellement des températures.

Les 10 grammes d'eau qui se sont refroidis *(C_ℓ = 1 pour l'eau)* ont augmenté d'entropie de la quantité

$$\int_{273.2+50}^{273.2+40} \frac{(10(1)dT}{T} = 10 \log_e \frac{313 \cdot 2}{323.2} < 0$$

Et les 10 grammes d'eau qui se sont réchauffés ont augmenté leur entropie de:

$$\int_{273.2+30}^{273.2+40} \frac{(10)(1)\ dT}{T} = 10 \log_e \frac{313.2}{303.2} > 0$$

Il y a eu augmentation d'entropie car

$$10 \left\{\log_e \frac{313.2}{303.2} + \log_e \frac{313.2}{323.2}\right\} = 10 \log_e \frac{(313.2)^2}{(303.2)(323.2)}$$

Et le numérateur est supérieur au dénominateur, le dénominateur est le produit de deux facteurs à somme constante

$$(303.2) + (323.2) = 2\ (313.2)$$

et l'on sait que le produit de deux facteurs à somme constante passe par un maximum quand les facteurs sont égaux

$$(313.2)^2 > (303.2)\ (323.2)$$

$$\Delta S_{20gr.}\quad 10 \log \text{(expression fractionnaire)} > 0$$

On pourrait multiplier à l'infini les exemples: l'égalisation des potentiels pour deux condensateurs mis en contact, l'égalisation des niveaux dans deux vases mis en communication par leur base.... etc....nous croyons avoir convaincu le lecteur que l'*entropie est quelque chose qui caractérise la possibilité de production spontanée d'un phénomène,* ce qu'a démontré Boltzmann en 1877 "l'entropie d'*un état donné* d'un ensemble de molécules est proportionnel au logarithme de la *probabilité de l'évènement"*. Nous reviendrons en troisième année sur ce point de physique statistique qui jette une singulière clarté sur la mystérieuse thermodynamique classique

N° 138. *La machine physique (réelle et irréversible par conséquent)* travaillant entre deux limites de température.

I: *Point de vue de Kelvin:* Si $\bar{Q}_1$ est la chaleur puisée à la source chaude T_1 et Q_o la chaleur jetée à la source froide T_o, le rendement $Q_1 - Q_o / Q_1$ étant moindre que celui d'une machine réversible $T_1 - T_o / T_1$ il s'ensuit que

$$\frac{\bar{Q}_o}{\bar{Q}_1} > \frac{T_o}{T_1} \quad \text{ou} \quad \frac{Q_o}{T_o} > \frac{Q_1}{T_1}$$

Algébriquement la machine reçoit
Q_1 à la température T_1
et $-Q_o$ à la température T_o
et elle accomplit le travail $A = E\ (Q_1 - Q_o)$

Si la température la plus basse possible est T_2 *(température d'un cours d'eau), l'énergie qui serait disponible comme travail mécanique* puisque provenant de la chaudière et du condenseur et *qui se trouve consommée inutilement par la machine du fait de son irréversibilité et de la trop haute température de la source froide est la différence* entre le travail équivalent à la chaleur avant la transformation et la travail effectivement fourni.

Cette dissipation, ce coulage d'énergie dû à l'irréversibilité et au manque d'utilisation du cours d'eau pour rafraîchir le condenseur est:

(C'est ce qui a lieu notamment pour les locomotives où le condenseur est l'air)

$$\underbrace{E\ Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)} \qquad - \qquad E\ Q_o \left(1 - \frac{T_2}{T_o} \right) \qquad \qquad A$$

$E\ Q_1 (1 - \frac{T_2}{T_1})$	$- E\ Q_o (1 - \frac{T_2}{T_o})$	A
travail mécanique maximum en puissance qui correspond à la chaleur empruntée à la source chaude: si machine réversible et: si l'on prend le condenseur le plus froid possible	travail mécanique maximum en puissance qui correspond à ce qu'on pourrait obtenir avec la chaleur que l'on jette à la source tiède: si machine réversible et: si l'on prend le condenseur le plus froid possible	travail effectif

Puisque $A = E\ (Q_1 - Q_o)$

La perte que l'on subit de par l'irréversibilité et l'absence de dérivation du cours d'eau (pour une machine fixe) est donc

$$E\ T_2 \left(\frac{Q_o}{T_o} - \frac{Q_1}{T_1} \right) > 0$$

Comme à la fin du cycle la machine irréversible repasse par le même état, cette *disparition pure et simple de l'énergie utilisable* avant la transformation a donc été mangée par conduction. frottements de rugosité et d'écrasement, vibrations, tourbillons et "étranglements" ou laminage. Pour une machine réversible la *dissipation d'énergie est nulle.*

II. *Point de vue de Clausius:* la source perd l'entropie $\frac{Q_1}{T_1}$ et

le condenseur gagne l'entropie $\frac{Q_o}{T_o}$

Les deux sources ensemble gagnent l'entropie $\frac{Q_0}{T_0} - \frac{Q_1}{T_1}$

La *machine* ayant accompli *un cycle fermé* est dans le même état et son entropie n'a pas changé *(différentielle exacte)*.
Le système complexe: source *(chaude)*, condenseur et machine a donc gagné l'entropie $Q_0/T_0 - Q_1/T_1 > 0$

Note: Comme au premier exemple du N° 137, remarquons que la "dissipation de l'énergie mécanique maximum utilisable" est $E\ T_2$ fois "l'augmentation d'entropie".

N° 139. *Le cycle irréversible.* La source chaude et le condenseur perdent l'entropie $\Sigma \frac{dQ_m}{T}$ *(intégrale curviligne le long du cycle)*, comme la machine est dans les mêmes conditions à la fin du cycle fermé, son entropie n'a pas changé: *le gain d'entropie* est donc - perte = $- \Sigma\ dQ_m/T$ ce qui est essentiellement positif *(N° 134)*.
Et l'énergie dissipée par la machine du fait de son irréversibilité est

$$\Sigma E\ d\ Q_m \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) - A$$

$$= \Sigma E\ d\ Q_m \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) - \Sigma E\ d\ Q_m = -E\ T_0 \Sigma \frac{dQ}{T}$$

soit donc encore "dissipation d'énergie de kelvin" = $E\ T_0$ "augmentation d'entropie de Clausius".

N° 140. *Des fluides réels: Le principe des correspondances d'états entre les fluides réels est un guide sûr pour la recherche et permet d'utiliser judicieusement les recueils de constantes physiques.*
Les solides considérés comme réfractaires et les gaz réputés jadis permanents ont perdu de leur singularité par l'avance de la technique. Le carbone lui-même fondu dans l'arc électrique voit sa vaporisation retardée par surpression tout comme l'eau bout à température plus élevée dans l'autoclave.
Cette analogie qualitative acquerrait bien plus d'importance si, établissant une comparaison entre les nombres: *température, pression et volume d'une masse déterminée* de carbone liquéfié se vaporisant et les données analogues de l'eau bouillante, nous remarquions une *correspondance quantitative*, une *similitude fonctionnelle* qui nous permette *moyennant un choix judicieux des échelles* de déduire *numériquement* les caractéristiques du fluide "carbone bouillant" des caractéristiques de "l'eau bouillante": c'est le but de notre étude.
Au lieu d'une vague ressemblance de propriétés, le principe des états correspondants permet non seulement de voir se correspondre deux fluides en des états semblables, mais d'*universaliser les propriétés de l'un quelconque des fluides en coordonnées "réduites"* qui *s'appliqueront* désormais *indistinctement à tous les fluides* et permettront de prévoir des ordres de grandeur concernant les fluides les moins connus.
La technique des hautes températures et celle des basses températures ont besoin, pour être progressives, *de principes*

directeurs qui permettent d'unifier toute la matière; le principe dont nous allons parler contribue pour beaucoup à leur développement.

Il n'est pas besoin de rappeler ici l'importance de la conception intellectuelle et des généralisations que l'abstraction nous permet pour guider l'expérience: c'est un lieu commun de dire que *l'on ne trouve que ce que l'on avait d'abord conçu* et que pour interpréter une expérience nouvelle il faut ou la rattacher à quelque théorie ancienne, ou créer une théorie explicative, si l'on veut que cette expérience devienne féconde.

L'expérience seule ne serait qu'un catalogue de faits isolés et tant que des lois ne relient pas des groupes de faits, rien n'avance.

Nous n'irons pas avec Descartes sacrifier l'expérience à la spéculation comme le témoignent ces lignes qu'il écrit a propos du choc:

"Les démonstrations de tout ceci sont si certaines, qu'encore que l'expérience nous semblerait faire voir le contraire, nous serions néanmoins obligés d'ajouter plus de foi à notre raison qu'à nos sens."

Jamais un Pascal, un Laplace, un Ampère ou un Faraday n'eussent souscrit à pareille insurrection contre l'autorité de l'empirisme, et Laplace juge Descartes comme il le mérite quand il dit de lui: "ce philosophe, substituant à de vieilles erreurs, des erreurs plus séduisantes, détruisit l'empire d'Aristote qu'une philosophie plus sage eût difficilement ébranlé. Mais, en posant en principe qu'il fallait commencer par douter de tout, il nous a lui-même avertis de soumettre ses opinions à un examen sévère auquel son système n'a pas résisté longtemps.

Nous nous permettrons de douter, à notre tour, de l'opinion de Descartes: *les faits expérimentaux* sont *bien les seuls arbitres* admis aujourd'hui pour décider de la *légitimité des hypothèses* et de la *véracité des lois*.

Cependant, vu le développement des sciences, ce *serait folie que de vouloir soi-même se rendre compte expérimentalement de ce que tous les autres ont fait";* notre vie ne pourra tout au plus se consacrer qu'à l'étude soignée d'un *petit nombre de faits";* un ingénieur ayant de multiples fonctions est même bien rarement un de ces privilégiés qui peuvent se livrer à la recherche expérimentale; aussi aura-t-il plus souvent l'occasion d'*appliquer les expériences des autres que le plaisir de les faire lui-même*.

Que d'inventions sont dues à ce que l'ingénieur a vu l'application qu'il pouvait faire d'un principe ou d'un fait signalé par un chercheur, !

C'est pour aider l'étudiant à déchiffrer les travaux des savants que nous écrivons aujourd'hui. Avant d'entamer l'étude des fluides réels, nous croyons devoir citer Lavoisier*(comme nous le ferons plus tard pour Faraday)* afin de montrer combien les savants voient juste par avance et de quelle aide sont *leurs travaux* et même *leurs opinions* comme principes directeurs de la technique.

Lavoisier (1743-1794) s'exprime en effet tel un prophète lorsqu'il écrit dans son *Traité élémentaire de Chimie* à une époque où les gaz les plus liquéfiables n'ont pas même été convertis en brouillards.

"Considérons un moment ce qui arriverait aux différentes substances qui composent le globe, si la température en était brusquement changée. Supposons, par exemple, que la terre se trouvât transportée tout à coup dans une région beaucoup plus chaude du système solaire, dans la région de Mercure, par exemple, où la chaleur habituelle est probablement fort supérieure à celle de l'eau bouillante: bientôt l'eau, tous les liquides susceptibles de se vaporiser à des degrés voisins de l'eau bouillante, et le mercure lui-même entreraient en expansion; ils se transformeraient en fluides aériformes ou gaz, qui deviendraient partie de l'atmosphère.

"Par un effet contraire, si la terre se trouvait tout à coup placée dans des régions très froides, l'eau qui forme aujourd'hui nos fleuves et nos mers, et probablement le plus grand nombre de fluides que nous connaissons, se transformeraient en montagnes solides, en rochers très durs, d'abord diaphanes, homogènes et blancs comme le cristal de roche, mais qui, avec le temps, se mêlant avec des substances de différente nature, deviendraient des pierres opaques diversement colorées.

"L'air, dans cette supposition, ou au moins une partie des substances aériformes qui le composent, *cesseraient sans doute d'exister dans l'état de vapeurs élastiques, faute d'un degré de chaleur suffisant; elles deviendraient donc à l'état de liquidité, et il en résulterait de nouveaux liquides dont nous n'avons aucune idée.*

"Ces deux suppositions extrêmes font voir clairement que:

"1° *Solidité, liquidité, élasticité sont trois états différents de la même matière, trois modifications particulières, par lesquelles presque toutes les substances peuvent successivement passer et qui dépendent uniquement du degré de chaleur auquel elles sont exposées.*

2° *Qu'il est très probable que l'air est un fluide naturellement en vapeur, ou, pour mieux dire, que notre atmosphère est un composé - (mélange dirions-nous aujourd'hui) - de tous les fluides susceptibles d'exister dans un état de vapeur et d'élasticité constante, au degré habituel de chaleur et de pression que nous éprouvons".*

Plus heureux que Lavoisier, nous avons la certitude de ce qu'il prévoyait être très probable, et pour tous les corps non *décomposables par la chaleur* nous connaissons aujourd'hui la continuité des trois états: solide, liquide et gazeux *(élastique disait Lavoisier dans sa langue savoureuse marquant bien qu'un gaz est dans l'état le plus élastique des trois).*

La correspondance d'états dont nous allons parler visait d'abord à représenter les états fluides *(liquide et gazeux)* de tous les corps par une seule formule.

Aujourd'hui, moins ambitieux et plus pragmatiques, nous utiliserons la correspondance d'états pour calculer à priori l'ordre de grandeur d'un phénomène concernant un fluide à partir des données expérimentales d'un autre fluide mieux connu.

Nous verrons jusqu'à quel point ce principe de correspondance est vrai, une vérité scientifique n'étant toujours vraie qu'à un tant pour cent près, renonçons au strictement vrai ou au radicalement faux, puisque nous ne sommes pas dans les secrets des dieux!

Tout notre soin sera porté à l'exposition de petits problèmes typiques montrant le mode d'emploi du principe de correspondance afin d'encourager futurs ingénieurs et chimistes à se servir de cette clef d'or pour ouvrir les précieux coffres que sont les recueils de constantes physiques et profiter des trésors accumulés par des savants de la trempe de Clapeyron, Van der Waals, Clausius, Amagat, Kamerlingh' Onnes, Mathias, Sacerdote et Leduc, pour ne citer que ceux qui ont le plus contribué à l'ébauche du principe dont nous poursuivrons l'étude ici.

Convaincu que l'intelligence profite davantage à *regarder les exemples plus longuement que les préceptes*, nous croyons que c'est le meilleur moyen de montrer et le degré d'exactitude et l'utilité d'un principe dont on ne parle plus guère dans la littérature même scientifique du jour. peut-être parce que même les principes ne sont plus de mode lorsqu'ils ont atteint la maturité et que, mieux connus, ils perdent de leur généralité et de la précision, qu'on leur prêtait au temps de leur jeunesse?

Citons quelques faits de la pratique courante du laboratoire et de l'industrie afin de nous rendre compte de la répercussion que peut avoir une connaissance synthétique de la chaleur à la lumière d'un principe unificateur.

A pression constante, si actif le foyer soit-il, il est impossible de modifier la température de la vapeur d'un liquide qui bout. Un feu plus puissant ne servira qu'à vaporiser plus de liquide, sans augmenter la température *(les légumes cuisent mal à une altitude élevée où l'eau bout à température réduite)*.

Lorsque les substances se décomposent à une température inférieure au point d'ébullition sous la pression atmosphérique, on doit faire bouillir sous pression réduite donc à basse température *(distillation sous basse pression)*.

Lorsqu'au contraire, on désire porter un liquide à une température supérieure à son point d'ébullition sous la pression normale, on aura recours à la surpression *(autoclave,, stérilisateur)*. En vase clos, cette surpression se produira d'elle-même vu que l'énergie calorifique fournie ne pourra se dissiper ni en chaleur de vaporisation *(évaporation à l'air libre)*, ni en travail d'expansion *(piston de machine à vapeur)*.

S'agit-il encore de refroidir un liquide ou un gaz bien au-dessous de la température des eaux courantes, puisqu'on *ne peut faire passer de la chaleur que d'un corps chaud à un corps plus froid* que lui, et *que d'autre part le frottement mécanique ne développe que de la chaleur*, il faut s'ingénier et faire perdre des calories par l'un des trois procédés suivants souvent combinés deux à deux.

1° On fait bouillir à la température ordinaire sous pression réduite, les calories de vaporisation étant empruntées au liquide, si les vapeurs émises sont enlevées à fur et mesure de leur production, les calories partent avec elles et bientôt le liquide se congèle *(Carré)*.

2° On comprime un gaz puis on le détend alternativement: petit jeu n'avancerait pas à grand'chose si l'on ne profitait du fait que comprimé le gaz est échauffé et alors seulement se trouvant au-dessus de la température des eaux courantes peut céder des calories à une circulation d'eau.

Détendu après avoir cédé de ses calories, il se trouve plus froid qu'avant d'avoir été comprimé et il se réchauffe en refroidissant la saumure qui l'entoure et qui ira à son tour capter les calories de la glacière et la refroidir.

3° On peut enfin faire travailler un gaz pour abaisser sa température comme le principe de "l'équivalence de la chaleur au travail" comme on l'appelle souvent, permet de s'en rendre compte: il y a perte d'une calorie *(gain de 4.2 frigories)* quand le travail du gaz est de 4 joules .2 *(procédé Claude). (On appelle frigorie ou thermie négative, la perte de chaleur équivalente à un joule).*

Voilà quelques exemples empruntés à la cuisine, à la chimie, à l'industrie frigorifique et à l'industrie des gaz liquéfiés qui nous montrent l'intérêt qu'il y a à bien connaître les points d'ébullition et de solidification des liquides aux diverses pressions, les chaleurs latentes de leurs changements d'état *(vaporisation et solidification)* et les chaleurs spécifiques de chacun des trois états.

Le problème de la liquéfaction des gaz étudié au N° 143 nous montrera l'importance des coordonnées "critiques" dont les coordonnées "réduites" se déduisent.

Sans plus tarder, précisons les notions d'états et rappelons comment jauger un récipient et connaître son volume aux diverses températures.

N° 141. *Précisions concernant les divers états de la matière et la mesure des volumes des fluides.*

Un solide se distingue nettement d'un fluide en ce que le solide a une forme propre et transmet directement les forces, tandis que le fluide épouse la forme du contenant et transmet dans tous les sens la pression *(force par unité de surface).* Certains corps ont un état pâteux intermédiaire entre l'état solide et l'état fluide.

La forme solide est la forme stable de la matière, celle où ses molécules sont le plus en équilibre; aussi, chaque fois qu'un corps liquéfié peut se reposer à température assez basse, il se cristallise.

Parmi les états fluides, il y a lieu de distinguer les liquides et les gaz les premiers se plaçant par ordre de densité, prenant la forme du contenant, mais offrant à l'état de repos des surfaces de séparation horizontales; les seconds se mêlant intimement même sans affinité chimique et se compénétrant même au *repos, même lorsqu'on les a disposés les plus lourds à la base,* tout comme le feraient des liquides en agitation entretenue par un mécanisme.

Il est impossible de séparer les gaz en centrifugeant. *(Cet état de choses est dû au remue-ménage terrestre, car dans la stratosphère les gaz sont placés par ordre de densité comme les liquides au repos sur la terre).*

De plus, les gaz occupent, sur la terre, tout l'espace qui leur est offert et chacun des composants a la part de pression qu'il aurait s'il était seul *(Dalton).*

Pour traiter expérimentalement des fluides, puisqu'à l'inverse des solides ils prennent exactement la forme des vases qui les contiennent *(liquides)* ou même remplissent toute l'éprouvette *(gaz),* il faut apprendre à jauger ces enveloppes solides puis à calculer les variations de volume de ces récipients à toute température; autrement, l'expé-

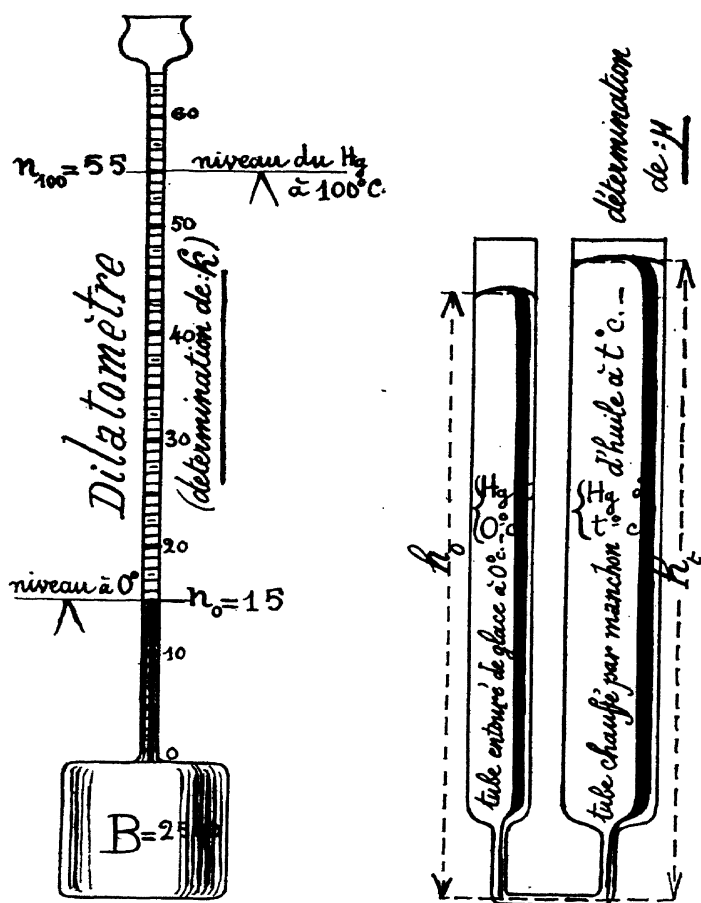



Fig. 95

Calcul du coefficient de l'enveloppe et du coefficient de dilatation absolu du liquide.

rience serait imprécise et l'opérateur commettrait systématiquement une erreur évitable à bon marché.

Nous allons calculer d'abord le *coefficient de dilatation de l'enveloppe*, ce qui suffit en général, le mercure ayant son coefficient de dilatation absolue bien connu; nous indiquerons cependant comment calculer le coefficient de dilatation absolue du mercure, au cas où le lecteur désirerait étudier un liquide moins bien connu que le mercure.

Calcul du coefficient k de dilatation de l'enveloppe:

1° Vérification de l'égalité des divisions successives (*on promène un index de mercure et l'on s'assure qu'il emplit un même nombre de divisions).*

2° On remplit le réservoir V avec une masse de mercure connue M. le dilatomètre étant plongé dans un thermostat à zéro centigrade *(eau et glace)*. Le quotient $V_0 = \frac{M}{13.59}$, détermine la contenance à zéro degré de ce réservoir.

3° On ajoute m grammes de mercure qui remplissent n_0 divisions. Le volume d'une division sera à zéro degré:

$$a_0 = \frac{m}{n_0 \times 13.59} \text{ centimètres cubes.}$$

Le rapport du volume du réservoir à celui d'une division est déterminé par le rapport des masses de mercure qu'ils contiennent respectivement.

$$N = \frac{V_0}{a_0} = \frac{M}{m : n_0}$$

4° Supposant connu le coefficient de dilatation absolue du mercure $\mu = \frac{1}{5550}$, portons le dilatomètre à t = 100°, le mercure monte par exemple jusqu'à la division $n_{100} = 55$; *(lorsque $n_0 = 15$ et $N = 2500$).*

Si l'enveloppe ne s'était pas dilatée, le mercure serait à une division plus élevée que la 55ème. Egalons les volumes RÉELS du mercure et de l'enveloppe pour calculer le *coefficient de dilatation k de l'enveloppe;* une division à t degrés valant: $a_t = a_0\ (1+ kt)$ les divisions occupées à t degrés vaudront:

$$(2500 + 55)\ (1+100k) = (2500+15)\ (1+\frac{1}{5550}\ 100).$$

le second membre étant le produit du volume à zéro par le binôme de dilatation absolue du mercure.

Ce qui donne k = 0.000021 pour ce dilatomètre. -(k *étant (en cm³) l'augmentation de volume de 1cm³ par degré centigrade)*

Ce ne serait que reculer la difficulté s'il fallait s'adresser au dilatomètre pour connaître le coefficient de dilatation absolue du mercure μ.

Il y a bien depuis quelques années des aciers au nickel "invar" que Guillaume a montré être de dilatation négligeable et on pourrait évaluer μ en prenant comme vase un tube d'invar supposé absolument invariable (k=o); mais pour les usages du laboratoire, l'invar a l'inconvénient de ne pas être transparent. Mieux vaudrait prendre le quartz ou silice fondue ou encore le verre dit PYREX. Avec un tube de verre, il faut déterminer k et pour cela calculer μ

Aussi, selon la méthode de Dulong et Petit, pour connaître le coefficient de dilatation du mercure, nous ferons appel au principe des vases communicants, comme les pressions seules y interviennent nous n'aurons pas à nous inquiéter des dilatations de l'enveloppe *(les sections du tube n'influençant pas le résultat)*. Il faudra tenir compte de la dilatation de la réglette qui sert à mesurer les hauteurs du mercure, mais on n'aura pas à s'inquiéter de la dilatation du verre.

Deux larges tubes de verre communiquent à leur partie inférieure par un tube de 1mm de diamètre bien horizontal.

Les deux branches de ce tube en U contiennent du mercure; l'une est entourée d'un manchon de glace fondante, l'autre enveloppée d'un cylindre d'huile chauffée *(par une résistance électrique par exemple)*.

L'égalité des pressions donne en appelant h_t et h_o les différences de niveau *(à t et o degré)* entre les surfaces libres et le tube horizontal de communication; d_t et d_o étant les densités du mercure à t^o et à 0^o.

$$\left\{\begin{matrix}\text{pression barométrique}\\ \text{en baryes (ou } \frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}\text{)}\end{matrix}\right\} + h_t \times d_t \times g = H + h_o \times d_o \times g$$

$$\text{d'où } \frac{h_t}{h_o} = \frac{d_o}{d_t}$$

Mais la masse des corps *(aux vitesses faibles)* étant un invariant le produit du volume par la densité est constant à toute température *(à pression constante)*.

$$M = V_o \times d_o = V_t \times d_t$$

En combinant les deux équations précédentes on a:

$$\frac{h_t}{h_o} = \frac{d_o}{d_t} = \frac{V_t}{V_o} = \frac{V_o(1+\mu t)}{V_o} \quad 1+\mu t$$; ce qui donne μ.

Sachant maintenant jauger à la température zéro centigrade et évaluer le volume du contenant à toute température

$$(N + n_t)\ a_o\ (1 + kt) ,$$

nous pourrons parler de volume réel occupé par un gaz à température donnée.

Reste encore à préciser ce que l'on entend par vapeur saturée et par tension de vapeur.

Si l'on veut dissoudre une masse d'un solide dans un volume de liquide donné, et à température déterminée, le liquide prend ce que son volume et sa température lui permettent de dissoudre; si le solide projeté est de masse considérable, le liquide ne pourra tout se l'incorporer, il restera un excès de solide, témoin que la solution est saturée.

On dit de même qu'une vapeur est saturée lorsque la présence de buée, de rosée ou d'une nappe de liquide témoigne d'un excès de liquide dans le volume occupé par le gaz à la température de l'occupation.

Une vapeur saturée, *quelle que soit la quantité de liquide en excès* a une tension déterminée et fixe pour une température donnée. *C'est la tension maximum de la vapeur à cette température.*

Cette tension de la vapeur saturée à température bien définie est une constante physique caractérisant le corps au même titre que sa densité ou sa tension superficielle. C'est de cette tension maximum de la vapeur *(saturée)* dont il s'agit quand on parle sans plus spécifier de la tension de vapeur à telle température.

Si l'on diminue le volume, la vapeur étant saturée, il y aura condensation et abandon de calories: si l'on augmente le volume évaporation et absorption de calories; si ces calories sont absorbées ou fournies par l'ambiance, la pression ne changera pas plus que la température, quel que soit le volume de vapeur saturée. Le travail de compression libère des calories; lorsque le gaz se détend au contraire, comme c'est lui-même qui travaille, il absorbe des calories.

Lorsque la vapeur n'est pas saturée, il n'y a plus ni brouillard ni gouttelettes, on l'appelle gaz et alors sa pression n'est plus indépendante du volume, et est toujours inférieure à celle de la vapeur saturée qui occuperait le même volume à la même température *(puisque la vapeur saturée a plus de molécules dont les chocs produisent la pression)*; mais alors la pression varie suivant une loi plus complexe dépendant, comme nous l'allons voir, non plus seulement de la température, mais du volume occupé par une même masse gazeuse.

<u>N° 142: *Premières étapes de la représentation des évolutions des fluides non décomposables par la chaleur*.</u>

Systématiquement, ne faisons varier que deux des trois paramètres volume, pression et température pour une masse donnée de gaz.

Boyle *(puis Mariotte)* opérant à température constante ont remarqué que *les produits de la pression par le volume d'une même masse gazeuse* étaient sensiblement constants *(ce que l'on a cru jusqu'à Oerstedt et Swendsen qui ont remarqué que l'anhydride sulfureux est plus compressible que l'air)*.

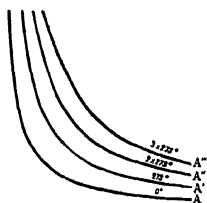



Fig.96A

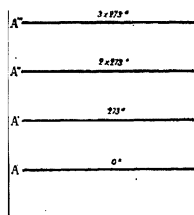



Fig. 96B

Nous savons déjà *(voir N° 141)* que cette loi est fausse lorsque la vapeur est saturée puisqu'alors, à température constante, comme c'est ici le cas, la pression est indépendante du volume occupé par une masse donnée de gaz, et que sous cette même pression, le volume diminuera jusqu'à la liquéfaction totale.

La nature ne connaît pas de ces discontinuités brusques. *(tout au moins quand il s'agit d'une loi thermodynamique, d'une moyenne de tout un groupe de phénomènes élémentaires)* et il serait puéril de croire la loi de Mariotte vraie jusqu'à la saturation puis subitement fausse dès que toute buée a cessé.

Ce que par sentiment de continuité nous aurions pu ressentir, l'expérience soignée nous l'indique : la loi de Mariotte est d'autant moins applicable que les gaz *(ou vapeurs non saturées)* sont plus près de l'état de saturation.

La loi de Boyle-Mariotte qui n'est qu'une première approximation voudrait que la réduction de volume aille comme l'augmentation de pression: de fait le volume se réduit beaucoup plus vite que la pression n'augmente et ce n'est que bien loin de la saturation que le gaz est d'un état plus parfait, on entend par là qu'aux pressions évanouissantes le produit $p\ v_m$ tend vers une limite constante.

Pratiquement, on se permet d'appliquer la loi de Mariotte pour de faibles variations de pression et lorsque l'on est loin de la liquéfaction *(nous dirons plus loin au-dessus de la température critique)*.

En thermodynamique, la préférence est donnée au réseau isothermique $p = f(v)$, hyperboles équilatères, cela tient à ce que l'aire $\int p\, dv_m$ représente le travail et le diagramme donne directement le travail d'expansion du gaz relevé à l'indicateur de WATT.

Lorsque l'on veut simplement juger des écarts à la loi de Mariotte, on représente parfois le réseau isothermique par $pv_m = f(p)$ et l'on a une série d'horizontales étagées comme les hyperboles de la première représentation selon la température qu'elles représentent, mais l'ingénieur ne peut utiliser ce diagramme.

Si nous maintenons le volume constant *(et nous avons rappelé comment connaître exactement ce volume)* nous trouverons comme Charles que la pression augmente linéairement avec la température: $p_t = p_0 (1 + \beta t)$

Le coefficient d'augmentation de pression à volume constant (β) étant indépendant de la température, de la pression initiale et même de la nature du gaz sur lequel on opère.

$$\beta = 0.0036618 \quad \frac{1}{273.09}$$

Enfin avec Gay-Lussac opérant à pression constante, on trouverait que le coefficient de dilatation sous pression constante α *(toujours en tenant compte de la dilatation de l'enveloppe)* est indépendant de la température, du volume initial et de la nature du gaz.

$$\alpha = 0.0036618 \quad \frac{}{273.09}$$

Remarquant que $\alpha = \beta$, *lorsque la loi de Boyle-Mariotte est applicable:* nous pourrons faire la synthèse des lois de Mariotte, Charles et Gay-Lussac dans l'équation dite *des gaz parfaits* qui englobe les trois variables étudiées jusqu'ici deux à deux.

$$p_t\, v_{t_m} = p_0\, v_{0_m} (1 + \alpha t) = p_0\, v_{0_m}\, \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t\right)$$

Pour une molécule-gramme, on représente usuellement le produit $p_0 v_0 \alpha$ par R et par T la somme

$$\left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = (273 + t)$$ qui est dite la

température absolue ou échelle Kelvin, c'est une échelle centigrade dont le repère zéro est abaissé de 273 degrés, à ce que l'on appelle le zéro absolu *(température dont Kamerlingh'Onnes s'est approché à 1 degré près et qui jouit par extrapolations de propriétés remarquables: les conducteurs y devenant parfaits, perdant toute résistivité, la chaleur spécifique s'annulant .... etc.)*

On écrit alors simplement $p\, v_M = R\, T$

Si la masse de gaz en jeu est la masse moléculaire M du gaz, R représente la constante universelle d'Avogadro-Ampère dont la valeur numérique en C.G.S. est à peu près le double de l'équivalent mécanique de la calorie exprimée dans le même système *(en ergs)*. Pour éviter toute confusion dans l'esprit des débutants, il serait bon de réserver la lettre R pour la constante des gaz parfaits lorsque l'on opère avec une molécule gramme; je proposerais d'employer le symbole $r = R/M$ quand il s'agit de un gramme de fluide et $mr = mR/M$ quand il s'agit de m grammes. La thermodynamique est déjà assez aride pour les étudiants sans les dérouter en représentant par la même lettre la constante des gaz parfaits, sans crier gare, quelle que soit la masse en jeu.

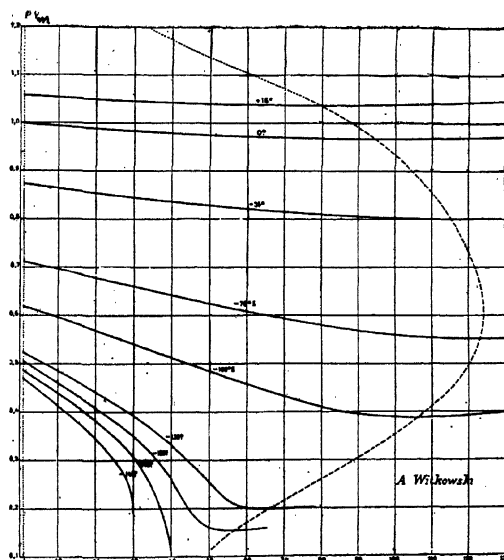



Fig. 97

Réseau de l'air (la parabole en pointillé est le lieu des minima des produits p v)

Calculons avec l'oxygène la constante universelle R des gaz parfaits *(réservant au lecteur le soin d'opérer avec différents gaz et muni d'un recueil de constantes physiques de vérifier que R est bien constant)*. Le congrès de Chimie a admis pour cette constante en joules la valeur 8.3156 *(à Rome 1906)*.

O^2 = 32 grammes
d_δ = 1.1053 *(densité de l'oxygène biatomique, par rapport à l'air)*
d_{air} = 1 gr.2928 *(par litre)* dans les conditions normales 76cm
et T = 273

$$R = p_0 \, v_{0_M} \, \alpha = \left(\frac{76\times 13.59\times 981)\text{baryes}}{273 \text{ degrés absolus}}\right)\left(\frac{32}{0.0012928\times 1.1053}\right)\text{cm}^3$$

$$= 8.31\times 10^7 \frac{\text{baryes}\times\text{cm}^3}{\text{degrés absolus}} = 8.31\times 10^7 \frac{\text{ergs}}{\text{degré absolu}}$$

= 8.31 joules par degré absolu = 2 Equiv. méc. de la calorie.

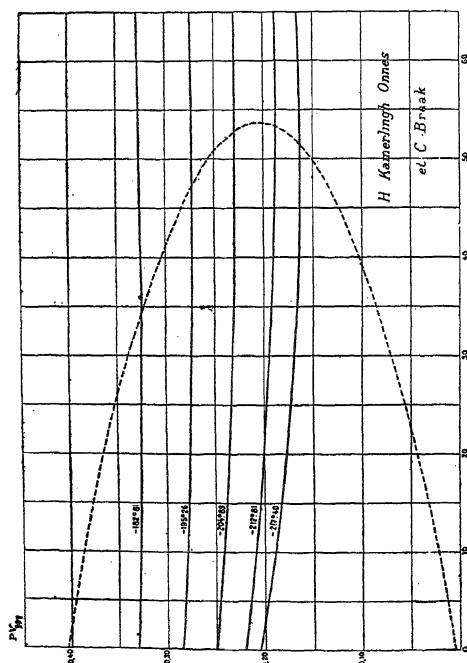



Fig. 98

Réseau de l'hydrogène (la parabole en pointillé est le lieu des minima des produits p v)

L'oxygène étant diatomique *(2 atomes gramme par molécule gramme)* on pourrait énoncer ce résultat en disant "qu'un atome-gramme de gaz parfait a une variation d'énergie interne équivalente à une calorie par degré absolu ou en d'autres termes que sa capacité calorifique est d'un gramme d'eau liquide".

Après avoir étudié les fluides réels nous verrons comment il y a trente ans *Clausius et Leduc* ont précisé cette loi qui est pour les gaz ce que la loi de Dulong et Petit est pour les solides.

Depuis lee travaux de *Witkowski* sur la compressibilité de l'air et les publications magnifiques du laboratoire établi à Leyde par Kamerlingh'Onnes concernant l'azote, l'hydrogène et l'hélium liquides, nous devons rayer du vocabulaire scientifique le nom de gaz permanents puisque ces prétendus permanents sont non seulement liquéfiables mais solidifiables comme l'avait prévu Lavoisier.

Le simple examen des isothermes à très basse température montrera au lecteur que pour les gaz les plus parfaits aux températures ordinaires, il y a les paliers de tension saturante tout comme pour les gaz facilement liquéfiables.

Il n'y a donc pas un seul gaz qui soit parfait dans toute l'échelle des températures: un gaz n'est parfait qu'au-dessus d'une certaine température, variable d'un gaz à l'autre d'ailleurs, c'est de cette température "critique" qui limite l'usage de l'équation des gaz parfaits dont nous allons nous occuper.

N° 143: *Le problème de la liquéfaction, le point critique.*

Un corps gazeux naturellement à la température ambiante est un corps dit très volatil, dont la pression élastique est alors de une atmosphère. La tension maximum *(ou de saturation)* est par conséquent de plus d'une atmosphère à cette même température pour ce corps.

Refroidissons-le, la tension maximum de sa vapeur diminuant continuellement avec la température, comme la pression du gaz en jeu est toujours d'une atmosphère, *sans surpression aucune* il devient de plus en plus saturé à fur et mesure que s'abaisse la température. Lorsque le refroidissement est suffisant pour que *la température du gaz soit celle à laquelle la tension maximum de sa vapeur est d'une atmosphère* il devient de la vapeur saturée et, continue-t-on à refroidir, il y aura bientôt condensation partielle. Si l'on enlève les calories de condensation par une circulation froide extérieure la liquéfaction se continuera.

C'est le procédé de *Monge-Clouet* qui envoyant de l'anhydride sulfureux dans un tube en U refroidi à - 10°C. par de la glace mêlée à du sel marin ont liquéfié pour la première fois un corps gazeux aux températures habituelles.

La tension maximum de la vapeur de SO^2 étant à -10° de 0.9 atmosphère, SO^2 ne pouvant alors opposer une pression suffisante à la pression atmosphérique se trouve surpressé par elle et se condense.

Si nous plaçons SO^2 ainsi liquéfié dans un vase largement ouvert sa température va se porter rapidement à - 8° *(celle pour laquelle sa tension de vapeur est de une atmosphère, quelle que soit la température ambiante). -8º Centigrade = 17º8 Fahrenheit).*

Si la salle est à température plus élevée, elle cédera au liquide qui bout des calories pour le vaporiser: si la salle est plus froide, elle prendra des calories et les vapeurs de SO^2 vont se condenser pour fournir ces calories à la salle: mais tant que le liquide bouillira à la même pression la température du liquide sera invariable (-8°). Nous aurons réalisé là un thermostat *(invariance de la température tant que deux des trois phases coexistent: ici phase vapeur + phase liquide).*

Le principe de l'énergie semble en défaut à la seule inspection du thermomètre. En réalité, la transformation moléculaire qui assure le passage de la phase liquide à la phase vapeur absorbe des calories *(le passage inverse en restituant un nombre égal).* Ces échanges de chaleur *à température constante par gramme* de substance qui change de phase sont appelés parfois chaleur latente *(ou de changement d'état).*

Plus tard *Guyton de Morveau* liquéfia l'*ammoniaque* sous la pression atmosphérique également, mais à -33°5 Centigrade [-28°3 Fahrenheit] température à laquelle se réduit à une atmosphère la tension de saturation de l'ammoniaque. Le réfrigérant employé était le mélange glace chlorure de calcium *(-50C = -58ºF).*

Nous venons de voir comment par simple refroidissement les gaz deviennent vapeurs saturées puis se condensent. La difficulté d'avoir toute une cascade de réfrigérants pour abaisser suffisamment la tension de saturation des corps très volatils a engagé les physiciens dans une toute autre voie où ils se sont égarés longtemps:

En comprimant un gaz et lui enlevant les calories de la compression par circulation d'eau, on peut en effet réduire le volume d'une masse gazeuse et *lorsque la pression élastique de ce gaz comprimé devient égale à la tension de sa vapeur saturée correspondant à la température de la circulation d'eau (puisque le gaz a sensiblement cette température) le gaz doit devenir une vapeur saturée puis se liquéfier si la compression isothermique continue.*

Mais, la *tension de saturation* de certains gaz à la *température ordinaire des eaux courantes est infinie* et la simple compression devait être longtemps un échec de la physique pour liquéfier l'air, l'hydrogène, etc *(les permanents).*

Van Marum en 1792 a liquéfié l'ammoniaque par simple *compression* en voulant vérifier l'exactitude de la loi de Mariotte. Pour l'ammoniaque en effet à 15°C. *(59ºF)* la tension de saturation n'est que de 7.2 atmosphères. [*L'industrie frigorifique utilise ce gaz qu'elle comprime afin d'élever sa température et de pouvoir lui voler des calories par l'eau de circulation. Pour se vaporiser à nouveau lors de la détente, l'ammoniaque ayant perdu des calories lors de la compression, doit recourir au voisin et refroidit ce qui avoisine la conduite qu'il parcourt*].

La compression suivie de détente ne *refroidirait pas* si l'on opérait la compression adiabatiquement *(sans échange de chaleur)* car les calories de condensation lors de la compression serviraient à vaporiser lors de la détente.

Faraday en 1823 liquéfie toujours, par simple compression, le chlore, l'hydrogène sulfuré *(17 atmosphères à + 10º)*, l'anhydride sulfureux *(3 atmosphères à + 7º5)*, le protoxyde d'a-

zote *(50 atm.)* le cyanogène 3.7 atm. et l'anhydride carbonique *(36 atm)*.

Avec *Faraday, le refroidissement et la surpression* s'allaient enfin liguer au lieu d'agir séparément, pour supprimer *(à quelques gaz tout au moins)* le privilège de permanence. Avec deux cascades de pompes portant la pression de une à vingt puis à cinquante atmosphères, et un refroidissement énergique allant jusqu'à - 110°C (- 166°F.), Faraday a liquéfié l'acide chlorhydrique, l'acide iodhydrique, l'acide bromhydrique, le fluorure de silicium, l'arséniure et le phosphure d'hydrogène. Il a même congelé l'acide sulfhydrique, le protoxyde d'azote, l'acide hypochloreux.

Faraday échoue devant l'hydrogène, l'azote, l'oxygène, l'oxyde de carbone, le méthane qui résistent à 50 atmosphères et - 110°C.

L'air n'avait-il pas déjoué les efforts de *Colladon (400 atmosphères et - 30ºC)* ?

L'oxygène et l'hydrogène ne devaient-ils pas désespérer *Aimé* qui les comprime à 220 atm. sans voir la moindre buée?

Berthelot opérant à 780 atmpsphères et à - 79° *(tube refroidi par de la neige carbonique)* ne réussit pas mieux.

C'est en vain aussi que *Natterer* soumit à 2800 atm. les cinq gaz récalcitrants: ils diminuent de volume sans se condenser malgré le formidable de l'étreinte.

C'est alors, il y a trois quarts de siècle, que désespérant à jamais de les liquéfier, on rendit hommage à leur résistance en les qualifiant *(pour un temps)* de "permanents". (1854).

Avec le fluor découvert par *Moissan* (1886) et les derniers venus l'hélium, le néon, l'argon, le krypton, le xénon, cela portait à onze le nombre des inliquéfiés, conservateurs irréductibles de l'état gazeux.

Pendant que des physiciens se livraient à la course aux hautes pressions pour abattre le privilège des permanents, d'autres physiciens remarquaient des anomalies dans la conduite des divers gaz au voisinage d'une certaine température variable d'ailleurs avec le gaz traité.

Cagniard de la Tour avait noté qu'à telle température un liquide chauffé dans un vase clos se *gazéifiait brusquement bien que le volume restât constant.*

Faraday en apprenant ces faits avait de suite pressenti l'existence d'un *minimum de température* comme *condition première de la liquéfaction.*

"A cette température, écrit-il, il est vraisemblable qu'aucune augmentation de pression, à moins qu'elle ne soit énorme, puisse liquéfier le gaz formé. Or la température de -110° est probablement pour l'hydrogène, l'azote et l'oxygène, *au-dessus de ce degré,* et alors il ne faudrait pas s'attendre à ce *qu'aucune pression excepté celle qu'accompagnerait un froid plus intense encore que tout ce qu'on a pu produire, puisse leur faire quitter leur état gazeux*".

Drion, en 1859, en chauffant des gaz liquéfiés remarqua *(comme Cagniard pour les liquides usuels)* le passage insensible de l'état liquide à l'état gazeux *la dilatabilité des liquides augmente rapidement quand on les chauffe sous pression et devient comparable à celle des gaz quand on arrive dans ces parages étranges où le fluide passe brusquement de l'état liquide à l'état gazeux.*

Mendéléjeff en 1861 constate que la *chaleur de vaporisation du liquide diminue progressivement pour s'annuler sensiblement à la température de gazéification brusque* qu'il appelle *"point d'ébullition absolu"*.

Nouvelle confirmation de la réversibilité parfaite des phases liquide et gazeuse autour de ce que nous appelons le "point critique" que les travaux d'Andrews (1863) vont mettre en relief et expliquer plus complètement.

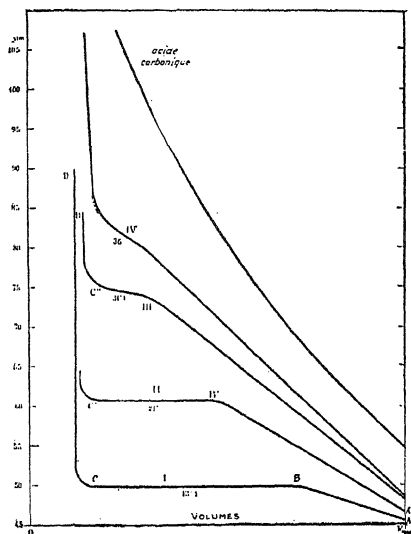



Fig. 99

Réseau de l'anhydride carbonique d'Andrews.

Andrews a le premier songé à étudier systématiquement les gaz déjà liquéfiés en vue d'éclaircir le mystère des gaz permanents. Lors de ses expériences sur le gaz carbonique, gaz déjà liquéfié et même solidifié avant lui, en opérant à des températures de plus en plus élevées, Andrews constata qu'au-dessus de 31.°3 Centigrade (88.3F.) l'anhydride carbonique résistait à des pressions formidables sans être liquéfié.

Il nomma critique cette température au-dessus de laquelle un gaz est absolument inliquéfiable quelle que formidable que soit la pression exercée

L'examen d'un réseau isothermique de CO^2 nous montre que très au-dessus du point critique, lorsque le gaz est à une température supérieure à celle à laquelle il peut devenir vapeur saturante, son isotherme se rapproche de la forme envisagée au numéro 142 à propos des gaz parfaits.

Au-dessous du point critique, les isothermes présentent le palier de saturation $p = c_{te}$ et l'isotherme dite critique est celle où le palier *(horizontal dans le plan $p \times v_m$ vertical dans le plan $pv_m \times p$,)* se réduit à un point *"pour une masse donnée de*

fluide" où l'isotherme présente une inflexion horizontale à pente maximum *(nulle)*.

A mesure que l'on s'élève au-dessus de la température critique, les isothermes se ressentent de moins en moins du palier de saturation pour arriver à l'allure des gaz parfaits *(hyperboles équilatères)*.

En 1873, van der Waals représenta l'isotherme réelle par une équation à *trois paramètres* de façon à retoucher l'équation des gaz parfaits et à la rendre conforme à l'expérience même au-dessous de la température critique.

(Nous nous abstiendrons de dire point critique car cette dénomination éveille l'idée de trois coordonnées pression critique, température critique et volume critique parfaitement déterminées pour un gaz; alors que le volume critique dépend de la masse du fluide en question tandis que pression et température critiques en sont indépendantes) .

Les tables donnent d'ailleurs la *densité critique* et non le volume critique pour ne pas avoir à indiquer la masse en jeu.

$$\text{Soit} \quad \left[p + \frac{a}{v^2}\right] (v - b) = RT \text{ , où } v = v_M$$

l'équation relative à une *molécule gramme* d'un fluide déterminé.

(p) étant la pression *manométrique*, force que le fluide exerce sur chaque centimètre carré de la paroi qui le contient.

(a/v^2) étant la *pression interne* due à l'attraction des molécules entre elles, d'autant plus faible A EGALITE DE MASSE GAZEUSE que le volume est plus grand, qu'elles sont par suite plus éloignées; mais cette attraction si faible soit-elle empêche néanmoins les molécules d'aller rencontrer la paroi avec toute la vitesse qu'elles auraient si elles ne s'attiraient pas l'une l'autre *(aux pressions évanouissantes où la loi de Mariotte est applicable v étant très grand (a/v^2) est négligeable devant p et b est négligeable devant v; on retombe sur les gaz parfaits)*.

Le premier facteur ($p + a/v^2$) est la pression totale *(pression manométrique augmentée de la pression interne)*. Pour les gaz parfaits, la pression interne est nulle, *(on appelle encore pression de cohésion ou pression capillaire la pression interne)*.

(b) est la *covolume* ou un multiple défini du volume occupé par les molécules lorsqu'elles se touchent sous pression infinie. Seule interviendrait dans le second facteur l'expansion *(volume actuel diminué d'un multiple du volume propre des molécules:)* 4 fois ce volume d'après van der Waals.

Une difficulté que ne signale aucun manuel, à notre connaissance, et qui jette le trouble dans l'esprit de plus d'un étudiant est celle-ci:

Qu'advient-il des constantes a, b, R lorsque l'on opère avec une masse différente de la molécule-gramme du même gaz ?

Logiquement, le volume occupé par les molécules lorsqu'elles sont en essaim, côte à côte sous pression infinie, le "covolume" comme l'a baptisé *Hirn*, doit être proportionnel à la masse.

Pour m grammes, si nous affectons d'un accent les constantes relatives à cette quantité de fluide *(pour les dis-*

tinguer des constantes moléculaires), nous aurons pour le covolume

$$b' = b \times \frac{m}{M}$$

De même, dans un volume donné, *plus les molécules seront concentrées*, plus elles agiront l'une sur l'autre et comme l'action est proportionnelle au produit des masses, en admettant la loi de Newton, nous devrons admettre logiquement que

$$a' = a \times \left(\frac{m}{M}\right)^2$$

quant à la constante des gaz nous avons déjà précisé que nous aurions pour m grammes

$$R' = R \times \frac{m}{M}$$

L'équation de van der Waals devient alors pour m grammes au lieu de M *(masse de la molécule gramme)*

$$\left[p + \frac{a'}{\left(\frac{m}{M}v\right)^2}\right]\left[\frac{m}{M}(v) - b'\right] \qquad R'T$$

ce qui est évident si l'on représente par v le volume occupé par la molécule gramme lequel est $\frac{M}{m}$ fois supérieur à celui occupé par m grammes dans les mêmes conditions de température et de pression.

Vérifions d'ailleurs que la substitution à a', b', et R' des valeurs que nous prévoyions logiquement nous redonne l'équation de van der Waals relative à la molécule gramme:

$$\left|p + \frac{a\frac{m^2}{M^2}}{\frac{m^2}{M^2}v^2}\right|\left(\frac{m}{M}v - \frac{m}{M}b\right) \qquad \frac{m}{M}R\,T$$

se simplifie et donne bien en effet

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R\,T$$

Dans le chapitre suivant, nous démontrerons mathématiquement cette induction.

Signalons seulement que Clausius a proposé une formule à 4 paramètres pour tenir compte de la température dans l'expression de la pression interne

$$p + \left[\frac{a''}{T\,(v + c'')^2}\right](v - b'') = R\,T$$

on pourrait évidemment, en multipliant le nombre des paramètres réussir à avoir une formule plus satisfaisante; mais celle de van der Waals a la supériorité d'être *très maniable* et tout aussi vraie que celle de Clausius. *(La comparaison des graphiques des réduites de van der Waals, Clausius et Amagat montrera au lecteur la vérité de notre assertion .)*

Nous nous bornerons donc à discuter l'équation de van der Waals: équation qui *à toute température* représente une courbe

du troisième degré ne présentant pas le palier expérimental *(p = constante)* relatif à la région de saturation; mais représentant fort bien les isothermes du liquide et de la vapeur non saturée.

L'état instable connu sous le nom de *retard à la liquéfaction (arcs marqués rl sur la figure 100) (qui se produit faute de germes de condensation, ions électriques ou poussières --, voir à ce sujet les théories de KNUDSEN)* et de même l'autre état instable dit *retard à l'ébullition (qui a lieu faute de bulles gazeuses lorsque l'on fait bouillir un liquide qu'une première ébullition antérieure a débarrassé des gaz dissous, arcs marqués re sur la figure 100 , sont très bien représentés par la cubique de van der Waals et justifient la prolongation des isothermes du liquide et de la vapeur non saturée qu'indique l'équation).*

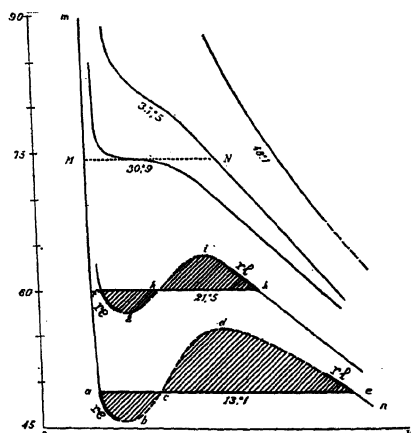



Fig. 100

La boucle de James Thomson (l'isotherme expérimentale et la cubique de Van der Waals).

Mais le raccordement parfait que voudrait l'équation mathématique *est bien difficile à imaginer physiquement (la pression et le volume augmenteraient en même temps à température constante: arcs pointillés g h i et b c d de la figure 100).*

James Thomson en appliquant le principe de Carnot au cycle fictif formé par la boucle déterminée par la courbe de van der Waals et le palier expérimental relatif à la même température en a conclu l'*égalité des aires de la boucle;* ces deux aires représentant des travaux de signes contraires, le travail total de ce cycle isotherme serait nul conformément au principe de Carnot.

Théoriquement donc, en s'imposant l'égalité de ces aires, on pourrait avec un planimètre placer la droite de liquéfaction ;mais *tant que l'expérience n'aura pas montré l'existence de la partie de l'isotherme qui raccorderait entièrement les deux branches de la cubique, ce sera pure spéculation*

mathématique et non réalité physique que cette interprétation élégante de James Thomson.

N° 144: *L'idée d'une forme unique pour tous les fluides.*

Deux voies y conduisent et se complètent: *analytiquement* en remarquant qu'au point critique la cubique présente une inflexion horizontale; la cubique de van der Waals n'ayant que trois paramètres, on peut éliminer ces trois paramètres; *graphiquement*, par superposition des courbes isothermes expérimentales *(Amagat)*, superposition des transformées logarithmiques *(Raveau)*, superposition des courbes de pressions maxima des vapeurs *(van der Waals)* ou enfin superposition des courbes de densité *(Sydney Young)*, on arrivera à représenter moyennant trois échelles convenables tous les fluides et cela, quelle que soit la masse envisagée de chacun d'eux.

1º) voie analytique;

Supposons connues avec exactitude les coordonnées critiques de la molécule gramme d'un fluide *(M grammes)*

pression critique	volume critique moléculaire	température critique

(pour une masse de m grammes, les coordonnées critiques seraient)

$$\pi' \qquad \frac{m}{M} = \gamma' ; \ \tau'$$

Explicitant la *pression manométrique* dans la formule de van der Waals, et écrivant qu'il y a inflexion horizontale pour l'isotherme critique *(quelle que soit la masse évoluant)* nous aurons, en nous plaçant dans le cas de la molécule gramme:

$$\begin{cases} p = -\dfrac{a}{v^2} + \dfrac{RT}{v-b} \\ 0 = \dfrac{\delta p}{\delta v} = +\dfrac{2a}{v^3} - \dfrac{RT}{(v-b)^2} \text{ (pente horizontale)} \\ 0 = \dfrac{\delta^2 p}{\delta v^2} = -\dfrac{6a}{v^4} + \dfrac{2RT}{(v-b)^3} \text{ (inflexion)} \end{cases}$$

$$\frac{\delta^3 p}{\delta v^3} < 0$$ vu que la pente est maximum lorsqu'elle est nulle.

Des trois premières relations, on peut déterminer les coordonnées critiques *(du point critique de la molécule gramme)* si nous connaissons a, b, R; ou inversement de déduire des coordonnées critiques relatives à la molécule gramme quelles sont les constantes a, b, R, de l'équation de van der Waals relatives à la molécule gramme du gaz considéré.

Si l'on connaît a, b, R, on a:

$$\pi = a:27b^2 ; \ \gamma = 3b \ ; \ \tau \quad \frac{8a}{27bR}$$

ou, si l'on connaît les données critiques de la masse moléculaire du fluide sur lequel on opère:

$$a = 3\pi\gamma^2 \ ; \ b = \gamma:3 \ ; \ R = \frac{8}{3}\ \frac{\pi\gamma}{\tau}$$

Si la masse en jeu était de m grammes *(du même gaz)*, on aurait, vu que seul le volume critique change avec la masse, la température et la pression critiques étant indépendantes de la masse du fluide donné,

$$\gamma' = \frac{m}{M}\gamma \qquad\qquad \frac{m}{M} b$$

$$\pi' = \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{m}{M}\right)^2$$

$$\tau' = \qquad\qquad R' = \frac{m}{M} R$$

Le lecteur vérifiera la quatrième relation $\frac{\delta^3 p}{\delta v^3}$.

Note: Certains lecteurs n'ont peut-être pas connaissance de la théorie de l'inflexion des courbes; nous allons indiquer une méthode tout aussi élégante pour arriver algébriquement *(sans dérivations)* au même résultat:

L'isotherme critique est en somme celle parmi les isothermes qui est coupée par la droite $p = \pi$ *en trois points confondus*, tandis que pour les isothermes des températures plus élevées il n'y a qu'un point ordinaire d'intersection et que pour celles des températures plus basses il y a trois points distincts d'intersection à savoir l'intersection du palier de saturation avec les branches du gaz et du liquide et le noeud de la boucle de J. Thomson.

Mais alors, si l'isotherme critique admet trois fois la même racine en $v = \gamma$, en coupant par $p = \pi$ la dite courbe, nous aurons une équation en v qui sera le cube parfait du binôme $(v-\gamma)$ à un facteur constant près:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) - RT \equiv K(v-\gamma)^3 \qquad \text{ou}$$

$$\left(v^2 + \frac{a}{p}\right)(v-b) - \frac{RTv^2}{p} \equiv (v-\gamma)^3 \ ; \qquad \text{soit}$$

$$(v-\gamma)^3 = v^3 - 3v^2\gamma + 3v\gamma^2 - \gamma^3 \equiv v^3 - \left(b + \frac{RT}{p}\right)v^2 + \frac{a}{p}v - \frac{ab}{p}$$

ce qui exige par identification des mêmes puissances de v.

$$3\gamma = b + \frac{RT}{p}$$

$$3\gamma^2 = \frac{a}{p}$$

$$\gamma^3 = \frac{ab}{p}$$

relations dans lesquelles il faut évidement faire $p = \pi$ et $T = \tau$ puisqu'il s'agit des coordonnées critiques.

$$3\gamma = b + \frac{R\tau}{\pi} \ ; \ 3\gamma^2 = \frac{a}{\pi} \ ; \ \gamma^3 = \frac{ab}{\pi}$$

relations qui donnent

$$3b \ ; \ \pi \quad \frac{}{27b^2}, \quad = (3\gamma - b)\frac{\pi}{R} = \frac{8b\ a}{27b^2 R} = \frac{8\ a}{27bR}$$

tout comme la considération de l'inflexion horizontale.

De là, van der Waals passe à ce qu'il appelle les *coordonnées réduites;* il prend comme unités d'échelles pour le gaz en question:

La pression critique pour les pressions, la **température** critique pour les températures et le volume critique *de la masse de fluide en question pour les volumes.*

Les nouvelles pressions manométriques, volumes de la masse donnée et températures seront alors:

$$P_r, V_r \text{ et } T_r \qquad \text{avec}$$

$$P_r = \frac{p}{\pi}, V_r = \frac{v}{\gamma}; T_r = \frac{T}{\tau}$$

L'équation réduite de van der Waals a une forme où ne figurent plus ni les caractéristiques individualisant le fluide, ni même la masse du fluide évoluant.

Ainsi donc en prenant trois échelles convenables pour une masse déterminés d'un fluide donné, on aboutit à une équation universelle.

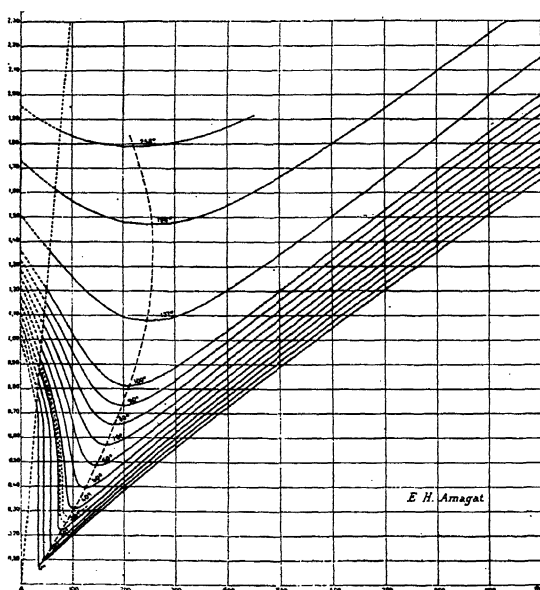



Fig. 101

Réseau de l'anhydride carbonique (de 1 à 1000 atmosphères) le pointillé indique les minima de p x v.

TOUS LES CORPS REPRESENTES PAR UN MEME POINT DE LA "RÉDUITE" SONT DITS DANS DES ETATS CORRESPONDANTS.

Nous allons démontrer analytiquement ce que nous avons énoncé plus haut *(et que les voies graphiques confirment)* à savoir *que quelle que soit la masse en jeu la réduite est la même* ; la colonne de gauche est relative à la molécule gramme; celle de droite à la fraction m/M de molécule gramme.

$(p + \frac{a}{v^2})\ (v-b) = RT$ | $(p\ \ \frac{a'}{v^2})\ (v-b'$

$\gamma:3$ | $b'\ \ \frac{m}{M}\ (\frac{\gamma}{3})\ \ \ b\ \frac{m}{M}$

$3\ \pi\ \gamma^2$ | $a' = 3\ \pi\ (\gamma\ \frac{m}{M})^2 = a\ (\frac{m}{M})$

$\frac{8\ \pi\ \gamma}{3\ \tau}$ | $R' = \frac{8}{3}\frac{\pi}{\tau}\ (\gamma\ \frac{m}{M}) = R\ (\frac{m}{M})$

$(p + \frac{3\ \pi\ \gamma^2}{v^2})\ (v-\frac{\gamma}{3}) = \frac{8\pi\ \gamma\ T}{3\ \ \tau}$

$= \frac{8}{3}\frac{\pi}{\tau}\ \gamma\ (\frac{m}{M})\ T$

d'où en prenant comme unités

$\pi,\ \gamma,\ \tau$

et avec les unités (coordonnées critiques correspondantes)

$\pi,\ \tau' = \tau, \gamma' = \frac{m}{M}\ \gamma$

$\left[P_r + \frac{3}{V_r^2}\right](V_r - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}\ T_r$ | $\left[P_r + \frac{3}{V_r^2}\right](V_r - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}\ T_r$

La proposition est démontrée et il n'y a plus aucun scrupule à avoir au sujet de la *réduite*, quelles que soient la nature du fluide et la masse de fluide avec lequel on opère, la réduite est la même.

2º) voies graphiques:

Amagat a cherché à superposer les isothermes des divers fluides en faisant *coïncider sur un même cliché les points critiques* de deux fluides, puis en *changeant les grandissements linéaires* jusqu'à ce qu'il obtienne des isothermes s'intercalant les unes entre les autres comme si elles étaient les isothermes d'un même fluide.

Le lecteur verra que deux à deux ou trois à trois la superposition est remarquable.

Raveau opère différemment. Les coordonnées critiques étant π_1, γ_1, τ_1; π_2, γ_2, τ_2 respectivement pour deux fluides, puisque les coordonnées réduites sont les mêmes, les coordonnées or naires de deux points représentatifs de corps *dans des état correspondants* seront évidemment pour l'un

$p_1 = P_r\ \pi_1 \qquad v_1 = V_r\ \gamma_1 \qquad T_1 = T_r\ \tau_1$

et de même pour l'autre

$p_2 = P_r\ \pi_2 \qquad v_2 = V_r\ \gamma_2 \qquad T_2 = T_r\ \tau_2$

puisque les coordonnées P_r, V_r et T_r sont universelles et définies par

$$P_r = \frac{p_1}{\pi_1} = \frac{p_2}{\pi_2} \quad \text{et de même pour } V_r \text{ et } T_r$$

Cela revient à dire que l'on peut construire une *seule surface réduite*, qu'il y a une seule surface de compressibilité et de dilatation pour tous les fluides en prenant pour chacun d'eux les unités convenables.

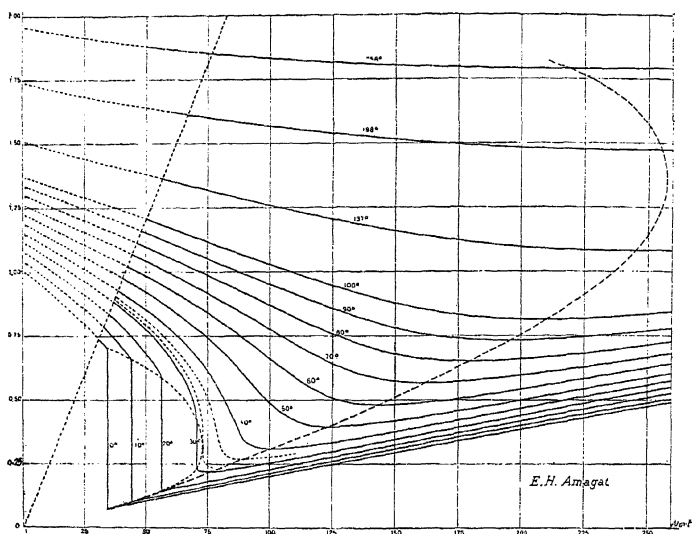



Fig. 102

réseau où l'on a agrandi les abscisses et restreint la variation des pressions.

Prenant les logarithmes des coordonnées, Raveau écrit:

$$\log p_1 = \log P_r + \log \pi_1$$
$$\log p_2 = \log P_r + \log \pi_2$$

d'où la différence

$$\log p_1 - \log p_2 = \log \pi_1 - \log \pi_2$$

Mais $\log \pi_1 - \log \pi_2$ est une constante pour les deux fluides en question quels que soient les points correspondants que l'on envisage.

Aussi, *si au lieu de tracer les isothermes, on construit leurs transformées logarithmiques*

$$\begin{cases} x_1 = \log p_1 \\ y_1 = \log v_1 \\ z_1 = \log T_1 \end{cases} \quad \text{et de même} \quad \begin{aligned} x_2 &= \log p_2 \\ y_2 &= \log v_2 \\ z_2 &= \log T_2 \end{aligned}$$

on aurait

$$x_1 - x_2 = \log \pi_1 - \log \pi_2 = \text{constante } k$$
$$y_1 - y_2 = \log \gamma_1 - \log \gamma_2 = \text{constante } l$$
$$z_1 - z_2 = \log \tau_1 - \log \tau_2 = \text{constante } h$$

ce qui montre que la superposition est possible par une simple translation des axes.

C'est ce qu'a fait Raveau.

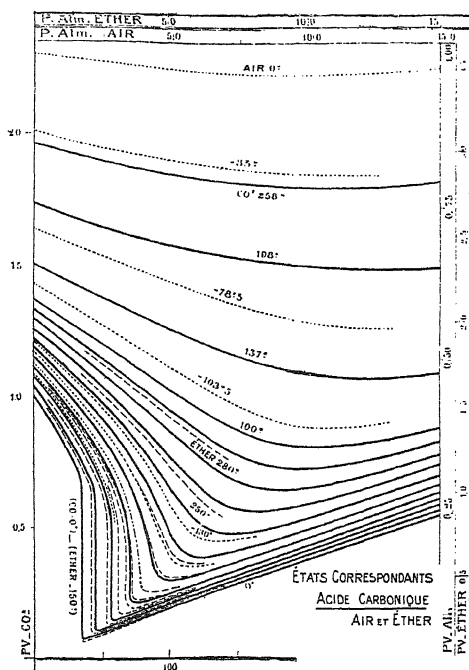



Fig. 103

Superposition de trois réseaux (Amagat).

Van des Waals s'adresse lui aux courbes de pressions maxima des vapeurs. Ces courbes ayant la même allure parabolique, en changeant les échelles tant des abscisses que des ordonnees, il parvient à les faire coïncider.

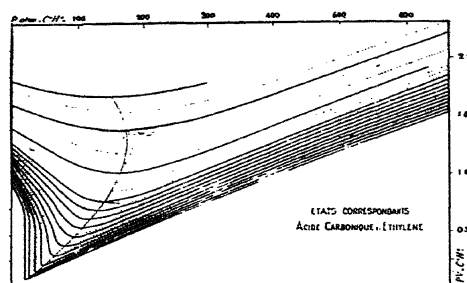
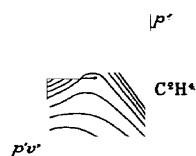



Fig. 104

Méthode d'Amagat de superposer les réseaux de plusieurs corps.

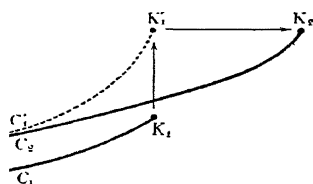



Fig. 105

Superposition des courbes paraboliques de tensions de vapeurs (Van der Waals).

Enfin *Sydney Young* opère de même mais sur les courbes de densité.

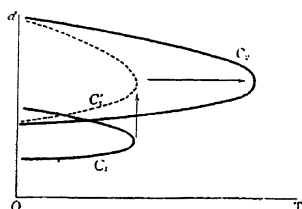



Fig. 106

Superposition des courbes de densité. (Sydney Young).

Conclusion : La loi des états correspondants est bien plus exacte que celle des gaz parfaits, surtout si l'on se borne à une correspondance visant des groupes de fluides plutôt que tous les fluides.

On a pu former des groupes renfermant *jusqu'à seize gaz* pour lesquels il y a correspondance satisfaisante.

Si l'on se demande pourquoi la réduite n'a pas toute la généralité que le calcul semble lui prêter, il faut se rappeler 1° la difficulté de déterminer *avec précision* les données critiques; 2° la connaissance imparfaite de

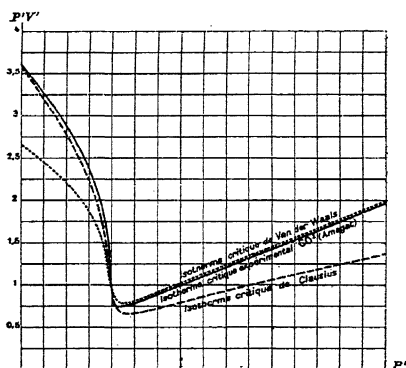



Fig. 107

Comparaison des réduites de Van der Waals et de Clausius à la réduite expérimentale d'Amagat. Pour les pressions inférieures à la pression critique celle de Clausius convient le mieux. Pour les pressions supérieures à la pression critique celle de Van der Waals convient le mieux.

$$\left(\frac{\delta p}{\delta v}\right) \text{ et } \left(\frac{\delta^2 p}{\delta v^2}\right)$$

que nous déduisons de réseaux expérimentaux, donc à partir de formules approchées représentant les isothermes d'Andrews.

En réfléchissant à l'erreur relative dont sont entachées toutes nos mesures, il n'est pas exagéré de dire que l'équation réduite est merveilleusement universelle.

Quelques exemples vont nous montrer l'utilité du principe de correspondance *des états marqués par un même point de la courbe réduite.*

Le lecteur partagera notre admiration en voyant sur la figure 107 combien pour $P_r<1$ avec la réduite de Clausius et pour $P_r>1$ avec celle de van der Waals il y a coïncidence des courbes analytiques et de la courbe expérimentale d'Amagat.

N° 145. *Exemples montrant l'utilisation du principe de correspondance d'états et son degré de précision.*

Premier problème: Si nous n'avions pas de tables concernant le gaz ammoniac, comment pourrions-nous prévoir la pression à laquelle bouillirait NH^3 à la température de −30°C en nous servant de la table des points d'ébullition de l'anhydride sulfureux SO^2 que voici:

SO^2	− 30°	0.39 atmosphère
	− 20°	0.63
	− 10°	1.00
	0°	1.53
	+ 10°	2.26
	+ 20°	3.24

en se servant des coordonnées critiques:

	pression critique	température crit.
NH^3	109 atm. 6	+ 132.°3
SO^2	78 atm.	+ 157.°2

Solution: La température centigrade t° correspondant pour SO^2 à la température centigrade − 30° de NH^3 est: *(puisque la coordonnée réduite de température est la même).*

$$\frac{T}{\tau} = T_r = \frac{273 - 30°}{273+132°.3} \quad \frac{t + 273}{273+157°.2}$$

d'où t = − 15°.08 *(soit − 15° en chiffres ronds).*

A cette température *correspondante,* SO^2 a pour pression voir la table ci-dessus en interpolant entre − 10 et − 20 même linéairement, *(mieux vaudrait construire la courbe et interpoler graphiquement).*

$$p_{(-15°)} = \frac{p(-10°)+p-(20°)}{2} = \frac{1.00+0.63}{2} = 0.82 \text{ atm.}$$

Puisque la coordonnée réduite de pression est la même,

$\frac{p}{} = P_r \frac{0.82}{78}$ soit 1 atm. 15

Conclusion: L'ammoniaque doit bouillir à (-30°) sous 1 atm. 15 de pression.

Or un coup d'oeil sur la table des points d'ébullition de l'ammoniaque nous montre la justesse du résultat.

	- 40° -	0.7
	- 30° -	1.15 C.Q.F.D.
	- 20° -	1.83
H^3	- 10° -	2.82
	0° -	4.19
	+ 10° -	6.02
	+ 20° -	8.41

Deuxième problème: Calcul de la pression saturante de l'anhydride sulfureux SO^2 à la température de + 150° centigrade avec la table des vapeurs saturantes de CO^2 *(anhydride carbonique).*

	24° - 61 atmosphères.8
	25° - 63.3
CO^2	26° - 64.7
	27° - 66.2
	28° - 67.7
	29° - 69.2

Coordonnées critiques

CO^2	+31°.3	72.9 atm.
SO^2	+157.2	78 atm.

Pour CO^2 la température centigrade t correspondante de celle de +150° pour SO^2 est *(la température réduite étant la*

$$T_r = \frac{T}{\tau} = \frac{+150+273}{+157.2+273} \qquad \frac{t+273}{31.3+273} \qquad co^2 \quad +26°.3$$

Par interpolation linéaire *(règle de trois, ce qui n'est pas à recommander comme précision)*, à 26°.3 la pression de CO^2 est:

$$64.7 + 0.3\left(\frac{66.2 - 64.7}{1}\right) = 65.15 \text{ atm.}$$

Cherchons maintenant quelle est la pression p correspondante pour SO^2 à 65 atm.15 pour CO^2.

La coordonnée critique étant la même,

$$\frac{p}{78} \quad \text{d'où } p = 69.7$$

Or les tables de SO^2 de Sajotchewski donnent pour SO^2 à 150° p = 71.45 ce qui diffère de 2% de la valeur calculée.

CO^2 et SO^2 sont moins correspondants que SO^2 et NH^3 du problème N° 1.

Troisième problème: Quelle serait la densité de l'anhydride sulfureux SO^2 à 150° Centigrade, d'après la table de l'anhydride carbonique? *(la température critique de SO^2 est +157°.2 et sa densité critique 0.520).*

		densité du liquide	densité de la vapeur
	25°	0.703	d = 0.240
	26°	0.688	d = 0.252
CO^2	26°.3		d= 0.2562 (pour la vapeur)
	27°	0.671	d = 0.266
CO^2	+31°3 *(critique)*	0.464	

Si nous considérons les volumes spécifiques ou occupés par un gramme de gaz, ces volumes spécifiques sont entre eux comme l'inverse des densités.

La température de CO^2 correspondant à +150° Centigrade pour SO^2 est T = 26°3 *(voir problème 2d)*.

Les volumes réduits étant les mêmes

$$V_r = \frac{v}{\gamma} = \frac{\frac{1}{d}}{\frac{1}{\delta}} = \frac{\delta}{d} = \frac{0.464}{0.256} = \frac{0.52}{x}$$

(0.256 étant obtenue par interpolation linéaire).

Ceci nous donne pour la densité de vapeur de SO^2 à 150°
x = 0.287.

Une table expérimentale donne 0.309 soit un écart de 6% environ, ce qui est bien joli pour une densité gazeuse.

Quatrième problème: Avec la table de Regnault des tensions maxima de la vapeur d'eau, calculer la température d'ébullition de l'anhydride carbonique à la pression normale.

H^2O		
100°	1 atm	ou 76 cm Hg
110°	1.415	ou 107.5 cm
120°	1.962	ou 149 cm
130°	2.67	ou 203 cm
140°	3.58	ou 272 cm

Coordonnées critiques

CO^2	+31°.3	73 atm.
H^2O	+365°	200 atm.

Pression p de vapeur d'eau correspondante de la pression normale pour l'anhydride carbonique *(la réduite étant la même).*

$$\frac{p \text{ atm.}}{200 \text{ atm.}} \quad \text{donc } p \quad \frac{200}{73} \text{ atm.}$$

$$\text{ou} \quad \frac{76 \times 200}{73} \quad 208 \text{ cm de mercure.}$$

$$T_r = \frac{T}{\tau} = \frac{t + 273}{31.3+273} = \frac{131+273}{265+273}, \text{ soit } t = -80°.3$$

Expérimentalement, de bons expérimentateurs ont trouvé -79° ce qui est à 2% près du calcul.

A cette pression, la vapeur d'eau a pour température 131° *(par interpolation entre 130º et 140º de la table ci-dessus).*

La température d'ébullition t de CO^2 correspondant à la température 131° de l'eau est *(la température réduite étant la même).*

Ces quelques exemples montrent qu'il est possible de se servir de *l'expérience des autres même lorsqu'ils sont bien loin ou disparus;* quand on n'a pas sous la main le personnel, les conseils, les crédits, le temps ou l'appareillage que l'on souhaite, on peut consulter les publications: ouvrages de fond et surtout recueils de constantes concernant les divers problèmes que ne cesse de soulever la pratique industrielle.

Un principe qui permet de tirer, à quelques pour cent près c'est entendu, l'ordre de grandeur de ce que l'on doit réaliser *(ou même de ce que l'on devrait réaliser)* est éminemment utile surtout pour un ingénieur qui a peu de temps à consacrer à la vérification expérimentale de haute précision.

Quand on n'est pas à Leyde et que d'opérer à +19° sur l'anhydride sulfureux équivaut à étudier l' anhydride carbonique à −66° ou l'azote à −187° ou l'hydrogène à −251°, on peut envisager l'allure et l'ordre de grandeur d'un phénomène plutôt que de n'en avoir *aucune idée quantitative.*

De même opérer sur l'azote à +19° revient à étudier l'anhydride carbonique à +427° ou l'anhydride sulfureux à +1032°C. A moins d'avoir un laboratoire de pyrométrie optique, que faire encore sinon employer les tables de constantes et opérer aux températures ordinaires avec des gaz dans des états correspondants de ceux qu'il nous faudrait expérimenter à haute température.

N'est-il pas plus sage d'opérer par des expériences *faisables avec rapidité et certitude et de transposer ces données grâce aux tables des grands savants* que de se contenter d'opérer de manière *purement qualitative* avec de l'air liquide ou de la neige carbonique?

Il ne nous reste plus qu'à indiquer sommairement comment de bons expérimentateurs ont pu déterminer les éléments critiques pour notre plus grande utilité.

N° 146. *Détermination des constantes critiques:* Six méthodes principales sont employées dans les laboratoires de précision pour déterminer les constantes critiques:

1º) *examen des isothermes lorsqu'un réseau est complet.*
2º) *observation de la vaporisation totale.*
3º) *examen des courbes de densité du liquide et de la vapeur.*
4º) *examen de la courbe de chaleur latente de vaporisation.*
5º) *application du principe des états correspondants* lorsque l'on connaît plusieurs autres données critiques.
6º) *en déterminant les constantes a, b, R si* l'on peut opérer avec une molécule gramme de fluide; ou a', b', R' si l'on opère avec m grammes; une *isotherme suffit.*

Nous allons dire un mot de chacune, renvoyant aux traités de physique le lecteur que l'une des méthodes précitées intéresserait plus particulièrement; d'ailleurs il faut un appareillage peu commun pour déterminer avec précision les constantes critiques et nous ne voulons insister ici que sur *ce qui est utilisable par un ingénieur ou un chimiste dans sa vie quotidienne.*

1º) Lorsque l'on dispose d'un *réseau complet* d'isothermes, il est assez facile de déterminer le point critique relatif à la masse m à laquelle ce réseau se rapporte. Le numéro de l'isotherme donne la température critique τ, l'abscisse donne le volume critique $\gamma' = \gamma\, m/M$ (*γ étant le volume critique de la molécule gramme*), et l'ordonnée donne π la *pression critique*.

On parle plus volontiers de densité critique δ ou de son inverse de volume spécifique critique *(volume occupé par un gramme)* que de γ volume critique de la molécule *(M grammes)*.

$$\delta = \frac{1}{\tau(\text{spec})} = \frac{1}{\frac{\gamma\, 1}{M}} = \frac{M}{\gamma}$$

2º) Si l'on remplit différents tubes de même volume avec des quantités différentes de liquide *(Natterer)*, et que l'on ferme ces tubes à la lampe, celui de ces tubes *dont le point représentatif* a pour *abscisse le volume critique* arrivera à la température critique sans quitter la région de saturation.

Ceux qui ont plus de liquide pour un même volume d'éprouvette *(plus petit volume offert à une même masse)* auront leurs abscisses à gauche de l'abscisse critique. Ceux enfin qui contiennent moins de liquide *(donc plus grand volume à égalité de masse)* auront leurs abscisses à droite de l'abscisse critique.

Lorsque l'on chauffera le premier; il y aura continuellement coexistence de liquide et de vapeur et à la température critique disparition complète du ménisque qui sépara.it liquide de la vapeur *(vaporisation instantanée)*.

Les seconds à mesure qu'on les chauffe témoignent que le liquide augmente et la vapeur diminue; continue-t-on à chauffer. on quitte la région de saturation pour celle du liquide et le *tube se remplit de liquide et reste ainsi* tant que l'on n'atteint pas la température critique. Le lecteur en suivant une verticale v = Cte à gauche de la verticale du point critique verra clairement sur un réseau d'Andrews qu'il doit bien en être ainsi.

Les troisièmes montrent quand on les chauffe une augmentation de la partie vapeur par rapport à la partie liquide; dès que l'on quitte la région de saturation, le liquide a disparu bien avant la température critique. Ainsi donc en mettant dans un même thermostat une série de tubes, on pourra connaître la température critique spécifique en divisant le volume à τ degrés par la masse du fluide contenu *dans le tube pour lequel il y a eu vaporisation instantanée*. Cette méthode ne donne pas la pression critique.

3º) Mathias ayant construit les courbes de densité du liquide et de la vapeur remarqua que ces courbes admettaient un diamètre rectiligne. La construction de ce diamètre lui permettait de déterminer avec plus de précision le *point de raccordement des deux courbes* de densité, point qui figure *la densité critique*.

4º) Le liquide et la vapeur devenant identiques au point critique, la *chaleur de vaporisation doit s'y annuler*. Si l'on construit la courbe de cette chaleur latente, on voit qu'elle s'annule en effet et la courbe γ = f (t) vient couper à angle droit l'axe des températures: c'est donc que

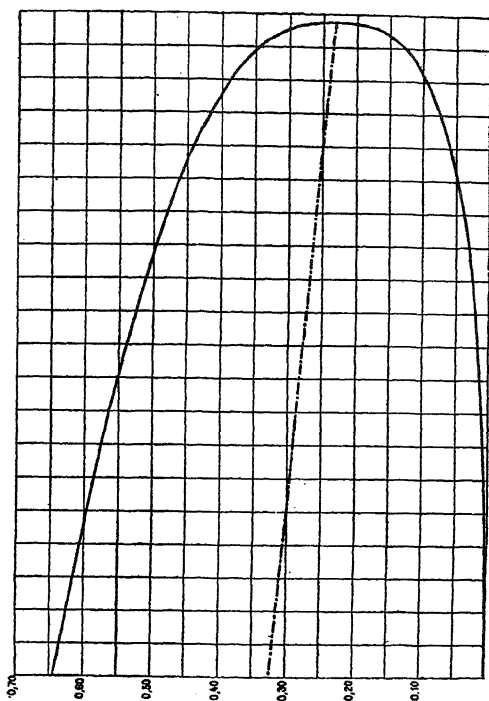



Fig. 108

Diamètre rectiligne (Cailletet-Mathias) des courbes de densité du liquide et de la vapeur.

$$\frac{\delta\ \gamma}{\delta\ t} = -\infty \text{ pour le point critique.}$$

C'est donc une excellente méthode de détermination graphique: vu la rencontre à angle droit de la courbe avec l'axe des températures *(il n'y a pas d'imprécision pour déterminer la rencontre par extrapolation)*.

5º) Connaissant les données critiques d'un corps et prenant sur la réduite le *point correspondant* d'un état de ce corps à un état d'un autre corps;

En écrivant l'*égalité des coordonnées réduites*, on aura trois relations pour calculer les coordonnées critiques du second corps.

La méthode d'Amagat se prête le mieux à cette manière d'opérer.

6º) Avec une isotherme bien nette, en écrivant que la cubique satisfait à la condition de passer par trois de ses points, on aura a', b', R' si l'on opère avec m grammes.

Le lecteur n'a qu'à se reporter au numéro 144 où nous avons indiqué comment exprimer les données critiques en fonction de

$$a', \ b', \ R', \ (\text{ou } a \times \frac{m^2}{M^2}, \ b \times \frac{m}{M}, \ R \times \frac{m}{M})$$

Note: Après avoir indiqué l'acheminement vers la notion de coordonnées critiques, montré comment les calculer et indiqué la *courbe réduite qui résulte de ce que l'on prend le point critique comme point de repère et les coordonnées critiques comme unités,* nous croyons devoir signaler au lecteur qu'il n'*y a pas que les coordonnées critiques qui permettent d'obtenir une même réduite pour les divers fluides.*

Daniel Berthelot (voir figure 109) a indiqué *trois autres réduites* en rapportant les fluides aux coordonnées de *trois points remarquables autres que le point critique.*

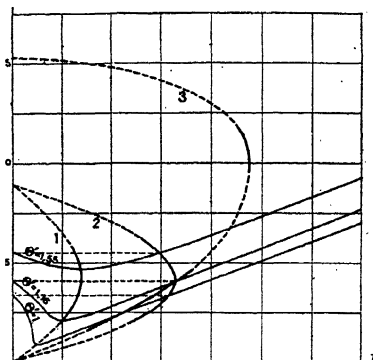



Fig. 109

Points remarquables autres que le point critique (voir recueil de Constantes Physiques, p. 246)

La première en rapportant les fluides *aux coordonnées du sommet* de la parabole lieu des minima du produit p × v *(parabole 1 de la figure 109)*

$$(P + \frac{1}{2V^2})(V - \frac{1}{4} \quad \frac{9}{2} T$$

La deuxième en rapportant aux *coordonnées du sommet* de la parabole lieu des points où le produit p × v reprend la même valeur qu'à l'état gazeux parfait *(parabole 2)*

$$P + \frac{1}{V^2})(V - \frac{1}{2}$$

La troisième en prenant comme unités d'échelles les coordonnées du *sommet* de la parabole lieu des points où sur chaque isotherme l'effet Joule-Kelvin change de sens.

$$(P + \frac{}{3V^2} \quad (V - \frac{1}{3}) \cdot \quad \frac{8}{9} T$$

Nous ne discuterons pas plus ces trois réduites que celles de Clausius, le lecteur que cela intéresserait pourra recourir aux traités spéciaux; mais comme les réduites autres que celle de van der Waals ne *sont pas classiques*, nous craignions que les passer sous silence produisît l'impression sur le lecteur que le point critique d'une masse de gaz a des propriétés exclusives, ce qui n'est pas.

Aux physico-chimistes de travailler avec les cinq réduites *déjà signalées!*

De ce que tous les fluides de plusieurs façons sont représentables avec une précision notable par une même courbe et que cette courbe soit sensiblement la même quelle que soit la manière de "réduire" les dimensions du fluide, n'est-ce pas pour ainsi dire la matière elle-même qui à force d'essayages plus ou moins adroits des divers fluides nous a montré qu'en fin de compte toutes les retouches n'aboutissaient qu'à une plus grande ressemblance à un même patron à un même modèle standard, dont l'échelle de reproduction seule variait d'un fluide à l'autre?

Le plus curieux *(et peut-être est-ce dû à quelque coquetterie foncière de la matière)*, c'est que, suivant le tailleur, l'uniforme des fluide a un cachet propre tout en convenant également bien à tous les fluides.

Van der Waals, Clausius, Amagat, D,Berthelot et autres ont réussi chacun un modèle représentant toute la nature fluide et de manière quantitative.

N° 147. *L'équation de Clapeyron déduite du cycle de Carnot.*
(Revoir les figures 99 et 100 de la région de saturation.)

Dans la région de saturation *(phase liquide + phase gazeuse)*, les isothermes stables *(en présence de germes d'ébullition comme de germes de condensation)* sont des isobares horizontales AB, DC. Formons un cycle de Carnot à l'aide de deux adiabatiques très courtes A'D et B'C.

L'aire de ce parallélogramme cycle est sensiblement(dp) A'B' = dp (AB) à la limite quand dp est un infiniment petit = dp $(v_m \textit{ gaz} - v_m \textit{ liquide})$

Si L est la chaleur latente de vaporisation à T degrés et L+d L la chaleur latente de vaporisation à T+d T degrés, la chaleur prise par le mélange *(vapeur + liquide,* le long de l'isotherme A'B' est (L+d L) m à la température (T+d T)

$$Q_1 = (L + d L) m$$

Comme le rendement de ce cycle réversible est

$$\rho_R = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = \frac{T_1 - T_0}{T_1} = \frac{(T+dT)-T}{T+d T} = \frac{dT}{T} \quad \textit{(au premier ordre,}$$

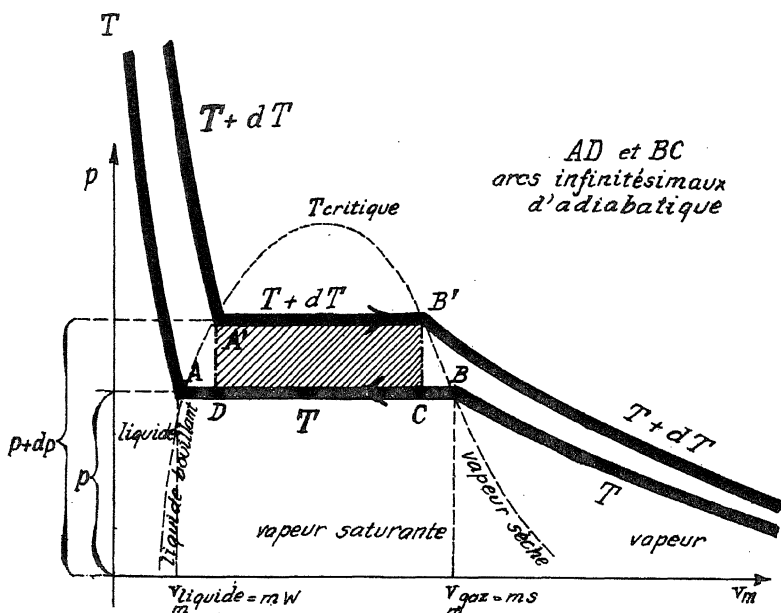
Le travail mécanique fourni doit être $\rho_R Q_1 = E(L+d L) m \frac{dT}{T}$

$= E L m \frac{dT}{T}$ au 1er ordre.

Egalant les deux expressions du travail mécanique,

$$E L m \frac{d T}{T} = dp \; (v_m \textit{ gaz} - v_m \textit{ liquide})$$

d'où
$$\frac{dp}{dT} = \frac{E\ L}{T\ (\Delta v_{1\ gr.\ tout\ vaporisé})}$$

Telle est la formule de Clapeyron qui permet de prévoir l'influence de la variation de pression sur le point d'ébullition et qui s'applique telle qu'elle à la variation du point de fusion si on remplace L par la chaleur de fusion, T par le point de fusion et $\Delta v_1 gr.$ par la variation de volume par fusion *(négative pour la glace)*.

$\begin{cases} w & \text{volume spécifique de l'eau liquide} \\ s & \text{» vaporisée} \end{cases}$

$$\Delta v_{1gr} = (s)-(w) = (1646)-(1)\ \frac{cm^3}{\text{gramme d'eau, tout vaporisé}}$$

Fig. 110

N° 148. Effet d'une augmentation de pression de 1/10 cm de mercure sur le point d'ébullition de l'eau *(application de la formule de Clapeyron)*
à p = 76×13.59×981 = 1,013,600 baryes
T = 373.2 Kelvin
le volume spécifique de l'eau est 1 (cm³/gr)
et le volume spécifique de la vapeur est 1646 (cm³/gr)

$$E\ L = 537 \times 4.185 \times 10^{7} \left(\frac{\text{ergs}}{\textit{gr entièrement vaporisé}}\right)$$

$$\Delta\ p = \frac{1}{10} \times 13.59 \times 981$$

$$\Delta\ T = 0.0365 \text{ degré centigrade.}$$

<u>N° 149. *Trouver le chaleur latente de l'eau bouillante à 302 F = 150 degrés centigrades = 423.2 Kelvin.*</u>

Les tables donnent pour la pression voulue pour un tel point d'ébullition:

$$69.03\ \frac{\text{lbs}}{(\text{inch})^2}$$

$6.28\ \frac{\text{cu.ft.}}{\text{livre}}$ pour volume spécifique s de la vapeur à 150°C

$0.0175\ \frac{\text{cu.ft.}}{\text{livre}}$ pour volume spécifique w de l'eau liquide à 150°C

$$\left.\begin{array}{l} 140°C = (284F):p = 52.400\ \frac{\text{lbs}}{(\text{inch})^2} \\ 150°C = (302F):p = 69.030 \\ 160°C = (320F):p = 89.630 \end{array}\right\} \text{valeur moyenne de: } \frac{dp}{dT} \simeq 1.866\ \frac{\text{lbs} \div (\text{inch})^2}{\text{degré Cent.}}$$

(avec un graphique les praticiens ont une meilleure moyenne de dp ÷ dT)

Appliquant la formule de Clapeyron, après avoir tout réduit en F.S.S. *(foot-slug-second)*

$$\frac{\Delta\ p}{\Delta\ T} \simeq \frac{dp}{dT} = 1.866 \times 144\ \frac{\text{livres} \div (\text{pied carré})}{\text{degré}}$$

$$E = 778\ \frac{\text{ft lbs}}{\text{B.T.U.}} = \frac{778}{252}\ \frac{\text{ft lbs}}{\text{calorie}} \simeq 3.09$$

$$L = \frac{T}{E}\ (\Delta\ v_{1\ \text{lb totalement vaporisée}})\ \frac{dp}{dT}$$

$$L\ \frac{\text{calories}}{\text{livre vaporisée}} = \frac{(423.2 \text{ degrés Cent.})(6.28 - 0.0175)\frac{(\text{pieds})^3}{\text{livre vaporisée}}(1.866)(144)\ \frac{\text{lbs}}{(\text{pied})^2(\text{degré Cent})}}{\dfrac{4.185 \times 10^7\ \text{ergs}}{12 \times 2.54 \times 453.6 \times 980\ \frac{\text{ergs}}{\text{livre pied}}} \doteq 3.094\ \frac{\text{livre pieds}}{\text{calorie}}}$$

$$L = 230100\ \frac{\text{calories}}{\text{lb. d'eau vap.}}$$

$$= \frac{230100}{453.6}\ \frac{\text{calories}}{\text{gr.d'eau vap.}} = 507.3\ \frac{\text{calories-gr}}{\text{gr.vaporisé}}$$

En adoptant comme unité calorifique la calorie-livre, *(voir Nº 152)* on obtiendrait **507.3** *calories livres par livre vaporisée.*

Les tables donnent 504.4 *calories-livres;* rien d'étonnant que l'écart soit notable, nous avons en effet confondu *la moyenne des pentes des deux cordes AB, BC;* (Δp/ΔT) *avec la pente vraie au point B :*

$\left(\frac{\delta p}{\delta T}\right)_{T=150°C.}$

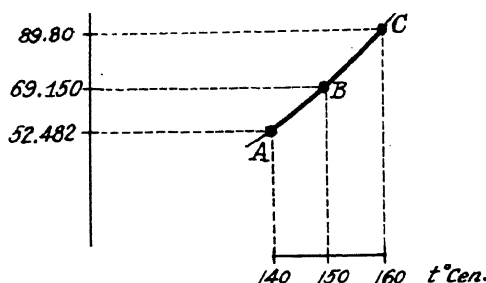



Fig. 111

Pour être plus vraie, il faudrait *1º)* ou bien posséder une table donnant les pressions de degré en degré

2º) ou bien faire un graphique à grande échelle et prendre soigneusement la tangente en B

3º) ou que par hasard on tombe sur une portion de courbe pratiquement droite

(Alors, on pourrait sans risque appliquer la règle de trois à un intervalle notable).

N.B: En $\frac{\text{B.T.U}}{\text{livre}}$ la chaleur latente serait les 9/5 de celle en $\frac{\text{calories gramme}}{\text{gr. vaporisé}}$, puisque la chaleur latente ne dépend pas des degrés choisis alors que l'unité de chaleur dépend de l'échelle des températures.

N° 150. Abaissement du point de fusion de la glace par surpression *(expérience du regel)* lorsque la pression est de deux atmosphères

volume spécifique de l'eau $1 \frac{\text{cm}^3}{\text{gr}}$

volume spécifique de la glace $1.09 \frac{\text{cm}^3}{\text{gr}}$

Chaleur latente de fusion de la glace à zéro degré

$$79.25 \frac{\text{calories}}{\text{gr. fondu}}$$

$T = 273.2$

$$dT = \frac{T(\Delta v_1 \text{ gr. totalement fondu})}{E\ L}\, dp = \frac{273.2(1-1.09)1013600}{(4.185\times 10^7)\ 79.25}$$

$= -0.0075$; sous deux atmosphères manométriques, la glace fond donc à $(273.2 - 0.0075)$ degrés Kelvin.

N° 151. *Les fonctions caractéristiques ou potentiels thermodynamiques (ayant des différentielles exactes commodes pour le calcul) (free energy functions or thermodynamic functions)*

Nous en connaissons déjà une: l'énergie interne dont la différentielle *(exacte)* est $d\,U_m = Ed\,Q_m - p\,dv_m$

Une autre fonction caractéristique est la chaleur totale I définie par la relation H_m ou $I_m = U_m + p\,v_m$

Une troisième fonction est le potentiel thermodynamique à volume constant ψ défini par A_m ou $\psi_m = U_m - T\Phi_m$, ($\Phi_m = S_m E$ voir N° 135).

Une quatrième fonction est le potentiel thermodynamique sous pression constante ζ défini par l'équation

$$F_m \text{ ou } \zeta_m = I_m - T\Phi_m \text{ ou } G_m = -\zeta_m = T\Phi_m - I_m$$

Les auteurs qui traitent de ces questions ne s'entendent pas au sujet des notations cependant tous aujourd'hui expriment la chaleur en unités énergétiques *de la sorte l'équivalent mécanique de la chaleur disparaît*. A partir de ce paragraphe. *nous suivrons les notations de J.K. Roberts* qui dans son livre "Heat and Thermodynamics" très complet et très moderne donne une abaque à grande échelle $I \times \Phi$ *(total heat × entropy)* du diagramme de Mollier, le plus utilisé par les ingénieurs. Comme ce livre sera d'un grand secours pour ceux qui voudront approfondir la chaleur, nous rendrons ainsi plus aisée sa lecture.

U total or internal énergy *(énergie interne)*

W work <u>on</u> the system *(travail reçu par le système et non pas le travail d'expansion)*

Q heat flowing into the system *(chaleur en ergs absorbée par le système)*

S entropie du système en $\frac{\text{ergs}}{\text{degré centigrade}}$

$$\underbrace{F}_{\text{libre}} = \underbrace{U}_{\text{totale}} - \underbrace{TS}_{\text{liée}}$$ *(énergie libre de Helmholtz)*

$\Phi = U - TS + pv$ potentiel thermodynamique sous pression constante

$I = U + pv$ chaleur totale *en ergs*

Quelques exemples numériques pour nous familiariser avec ces fonctions et ces notations nouvelles. Les plus employées en génie civil sont S et I *(diagramme de Mollier)*.

N° 152. *L'énergie interne ou totale:* U ou ses variations ΔU; l'expression $dU = dQ + dW$ étant la différentielle de définition

Premier exemple: Soit une livre d'eau à zéro centigrade, sous une pression de 300 livres par pouce carre, chauffons-la jusqu'à ce que cette eau soit transformée en vapeur saturée sous cette pression. Quelle est l'augmentation d'énergie interne?

Sous cette pression une table donne 214°.17 Cent. pour point d'ébullition.

Note: Les tables anglosaxonnes modernes désignent sous le nom de *"calorie"* l'équivalent calorifique de 1400 livre × pieds. De façon à ne pas la confondre avec la petite calorie C.G.S. ou avec la kilocalorie nous désignerons

la "thermal unit" par "calorie-livre d'eau - degré centigrade" ou tout au moins par *"calorie-livre"*

de même la calorie C.G.S. par "calorie-gramme d'eau-degré centigrade" ou tout au moins par *"calorie-gramme"*

et la calorie métrique par "calorie-kilogramme" en abrégé.

Le degré Fahrenheit semble disparaître et la seule différence entre la B.T.U et la "calorie-livre" est *l'adoption du degré centigrade.*

1 B.T.U. = 778 livre pieds

$$1 \text{ calorie-livre} = 778 \times \left(\frac{9 \text{ degré Fahr.}}{5 \text{ degré Cent.}}\right) = 1400 \text{ lb} \times \text{pieds}$$

a) changement d'énergie interne lors du passage de l'eau

à zéro centigrade en eau *(liquide encore)* à 214°17

l'eau sous cette pression a *par livre* une chaleur de 218.17 calories-livres *(ou 392.7 B.T.U.):* remarquons que la chaleur spécifique de l'eau est donc un peu supérieure à un.

Le volume spécifique de l'eau ayant passé de

$0.01602 \frac{\text{pieds cubes}}{\text{livre}}$ *(à zéro C.)* à $0.01898 \frac{\text{pieds cu.}}{\text{livre}}$ à 219°.17

C.; sous la pression constante de $300 \frac{\text{livre}}{\text{po. carré}}$ il y a eu un

travail d'expansion aux dépens de la chaleur du foyer.

$$\Delta U_{1lb} = (218.2 \text{ calories-Livre})\ 1400 \frac{\text{lb} \times \text{pi.}}{\text{calorie lb.}} - p\ \Delta v_{1\,livre}$$

$$p = 300 \times 144 \frac{\text{livres}}{(\text{pied})^2}\ ;\ \Delta v_{1lb} = (0.01898 - 0.01602) \frac{\text{pied}^3}{\text{livre}}$$

$$\Delta U_{1lb} = (218.2)(1400) - (300)(144)(0.00296) \text{ livre pieds}$$

$$= 305480 - 128 = \boxed{305352 \text{ livre pieds}}$$

b) Changement d'énergie interne pour transformer l'eau en vapeur sans changer de température ni de pression:

$$\Delta v_{1lb} = (\text{vol. spécifique vapeur } 1.551) - (\text{vol, spéc. eau } 0.019) =$$

$$1.532 \frac{\text{pieds}^3}{\text{livre}}$$

travail d'expansion lors de la vaporisation.

$$p\ \Delta v_{1lb} = (300 \times 144) \frac{\text{livres}}{\text{pied}^2}\ 1.532 \frac{\text{pieds}^3}{\text{livre}} = 66182 \text{ livre} \times \text{pieds}$$

La chaleur latente de vaporisation étant sous $300 \frac{\text{lbs}}{\text{po}^2}$

de pression 811.3 $\frac{B.T.U}{livre}$ ou 450.72 $\frac{\text{calories-livre}}{\text{livre}}$, l'augmentation d'énergie interne lors de la vaporisation est:

$\Delta U_{1lb} =$ 450.72×1400 livre pieds - 66182 livre pieds =

= 631008 - 66182 = $\boxed{\text{564826 livre pieds}}$

Pour transformer une livre d'eau à zéro degré Cent. en une livre de vapeur saturée à la pression de 300 $\frac{\text{livres}}{(\text{pouce})^2}$,il faut donc augmenter son énergie interne de

$$870178 \frac{\text{livre pieds}}{\text{livre}}$$

(les tables donnent 1118.5 $\frac{B.T.U}{livre}$ *ou 621.4* $\frac{\text{calorie-livre}}{\text{livre}}$

pour l'augmentation d'énergie interne exprimée en unités calorifiques, prenant U = o pour la glace fondante).

Notre calcul traduit en calorie-livres donne

$$\frac{878180}{1400} = 621.5$$

l'accord est bon.

Exprimée en $\frac{B.T.U}{livre}$ l'énergie interne serait $\frac{870178}{778}$=1118.5 comme la table américaine de Marks and Davis le donne.

Deuxième exemple de calcul d'énergie totale ou interne.

Quelle est l'augmentation d'énergie interne d'une machine lorsque 100 livres d'eau et une fraction négligeable de vapeur ont été introduites à 40 degrés Fahrenheit et que sous la pression de 300 $\frac{\text{livres}}{\text{po.carré}}$ le titre en vapeur soit devenu $\frac{3}{4}$ *(la vapeur a toujours été sous la pression de 300). (titre en vapeur = fraction vaporisée).*

100 livres d'eau à 40° Fahrenheit ont une chaleur de 805 B.T.U. *(en prenant le zéro des chaleurs et de l'énergie interne à glace fondante)* et occupent un volume de 1.6 pied cube environ.

100 livres d'eau sous la pression de 300 $\frac{\text{livres}}{\text{po.carré}}$ ont une chaleur de 39270 B.T.U. et occupent un volume de 1.898 pied cu.

La variation d'énergie interne *lors de l'échauffement de l'eau a été:*

$\Delta U_{100 lbs} =$ (39270-805)B.T.U. 778 $\frac{\text{lb×pieds}}{B.T.U.}$ - p $\Delta v_{100 lbs}$

p = 300×144 $\frac{\text{livres}}{\text{pied}^2}$; $\Delta v_{100 lbs} =$ 1.898-1.6 = 0.298 (pied)^3

$\Delta U_{100 lbs} =$ (38465)778-(43200)(0.298) = 29,925,770 - 12,874

= 29,912,896

Si tout avait été complètement vaporisé, on aurait eu par vaporisation totale un supplément d'augmentation d'énergie interne *(voir table Marks and Davis page 21)*

81130×778 livre pieds - (300×144)(155.1-1.898)

=63,119,140 lb.pi-6,618,326 lb.pi.=56,500,814 lb.pi.

Prenons les 3/4 de ce supplément puisque les 3/4 seulement de la masse d'eau a été vaporisée *(la vapeur n'est pas sèche)*

56,500,814×3/4=42375610 lb.pi.

La variation totale d'énergie interne est donc de

29,912,896+42,375,610 = 72,288,506 lb.pi.

soit en B.T.U. $\frac{72,288,506}{778}$ = 92910 B.T.U.

soit en calorie-livre: 51620 calorie-livre.

N° 153. Nous ne calculerons pas la variation de travail, ou de chaleur séparément, car ces quantités n'ont pas de différentielles; nous passerons de suite à *la chaleur totale* I=U+p v qui représente toute l'énergie de la vapeur hormis son énergie cinétique.

La chaleur totale I *(exprimée en unités énergétiques)* est définie par

$$I = U + pv$$

$$\text{ou} \quad dI = \boxed{dU + pdv} + v\,dp = dQ + v\,dp$$

$$= T\,dS + v\,dp$$

On voit que **dI = dQ pour une transformation isobare seulement** et dU = dQ pour une transformation isométrique seulement.

Le lecteur verra au N° 164 l'importance de ces remarques pour les diagrammes entropique et de Mollier.

Premier exemple: Avec les tables de vapeur saturée pour avoir la *variation isobare* de chaleur totale, il suffit de transformer en livre-pieds les B.T.U. dues à la chaleur.

Exemple: de zéro centigrade à 200° Fahrenheit, une livre d'eau avant d'être vaporisée avait *(du fait des 168 degrés d'élévation de température)* 167.94 B.T.U.

Lors de la vaporisation totale *(vapeur sèche)* la livre d'eau a absorbé 977.8 B.T.U.

Ce qui fait pour chaleur totale en B.T.U. $\boxed{1145.8}$

Et comme il s'agit de pression constante ($\int v\,dp = o$)

$$dI = 1145.8 \times 778 = 890432 \text{ livre pieds}$$

Deuxième exemple: Chute de chaleur totale *(heat drop)* lors d'une *détente adiabatique:*

$$dQ = 0 \; ; \; \int dI = \text{zéro} + \int_A^B v\,dp$$

$$\int dI = \text{aire ABB'A'A} \quad \textit{(hachurée)}$$

N.B.: Ne pas confondre cette aire avec celle du travail d'expansion

$$-\int dW = \int p\,dv = \text{aire ABCD}$$

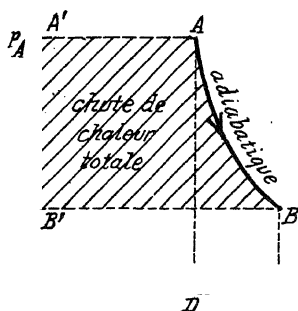



Fig. 112

N.B.II: Ne pas confondre I avec Q; $\int dQ = 0$ ici alors que $\int dI = \int v_m \, dp$.

Troisième exemple: Laminage ou étranglement *(throttling):* si un gaz se précipite en passant à travers une paroi poreuse ou un *petit orifice,* venant d'un réservoir à haute pression, et allant à un autre à basse pression, *les réservoirs et conduite étant bien calorifugés, la chaleur totale est constante.*

Imaginons un petit piston très léger poussant un volume v_{m_I} de gaz à la pression p_1 d'un récipient à l'autre où il aura un volume $v_{m_{II}}$ et une pression p_{II} ; $p_1 > p_2$; $v_{II} > v_I$.

Ce qui pousserait sur ce piston est le gaz du récipient à haute pression et le travail accompli par cette pression *(du premier récipient)* est $p_1 v_{m1}$

Ce qui freinerait ce piston est le gaz du récipient à basse pression et le *freinage* est $p_2 v_{m_{II}}$ ou travail négatif d'expression $- p_2 v_{m_{II}}$

L'ensemble des travaux *d'expansion* du gaz est donc

$$- dW_n \quad + p \, dv_m \quad p_1 v_{m1} - p_2 v_m$$

$$dU_n \quad dQ + dW = dQ - p \, dv_m = \text{zéro} - p \, dv$$

(puisque tout est calorifugé, donc adiabatisme)

$$U_{m_{II}} - U_{m_I} = p_1 v_{m_I} - p_2 v_{m_{II}}$$

ou encore en faisant apparaître "la chaleur totale I" en unités énergétiques

$$U_{m_{II}} + p_2 v_{m_{II}} = U_{m_I} + p_1 v_{m_I}$$

$$I_{m_{II}} = I_{m_I}$$

Règle: Lorsqu'il y a *"laminage"* dans le diagramme de Mollier, le point représentatif se déplace sur une horizontale ($I = c^{te}$) I étant en ordonnées et S en abscisses.

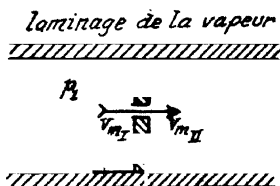



Fig. 113

Note: Les ingénieurs qui s'occupent des moteurs thermiques expriment généralement tout en B.T.U. (*ou calories*); la chaleur comme le travail et désignent par A l'équivalent calorifique de l'énergie

$$A = \frac{1}{778} \frac{\text{B.T.U.}}{\text{livre pied}} = 0.001285 \ \frac{\text{B.T.U.}}{\text{livre pied}}$$

Ainsi la chaleur totale

$$H_{B.T.U.} \text{ ou } I_{B.T.U.} = U_{*} + (A\,pv)_{B.T.U}$$

Nous renverrons le lecteur aux tables et diagrammes de vapeur pour préparer le Cours de Machines Thermiques.

N° 154. L'énergie libre de Helmholtz $F = U - TS$ appelée aussi: potentiel thermodynamique à volume constant.

Dans le langage des anciens énergétistes

$$\begin{cases} F & \text{était l'énergie libre} \\ U & \text{était l'énergie totale ou interne} \\ TS & \text{était l'énergie liée} \end{cases}$$

Différentions, $dF = dU - TdS - SdT$

mais $dU = TdS - p\,dv = TdS + dW$

d'où $dF = -pdv - SdT$

à température constante

$$-dF = +p\,dv$$

la chute de F est égale au travail accompli par la substance: c'est l'origine du nom de "potentiel".

On voit que F représente l'accumulation d'énergie lorsqu'on a fourni isothermiquement du travail à partir d'un état défini où l'on considère F comme ayant une valeur nulle.

Et réciproquement F est la mesure de *l'énergie disponible* comme travail mécanique *dans un processus isotherme.*

Gibbs et Massieu appelaient fonction caractéristique

$$F \text{ et } -\frac{F}{T} \text{ respectivement.}$$

N° 155. Equation de Thomson $F = U + T\left(\frac{\delta F}{\delta T}\right)_v$

(l'indice "v" signifiant - à volume constant).

$$d F = - p\, dv - S\, d T$$ peut s'écrire

$$d F = \left(\frac{\delta F}{\delta v}\right)_T dv + \left(\frac{\delta F}{\delta T}\right)_v d T$$

à condition de poser $- p = \left(\frac{\delta F}{\delta v}\right)_T$ et $- S = \left(\frac{\delta F}{\delta T}\right)_v$

(Revoir dans le cours d'Analyse la signification des différentielles partiellee).

On peut donc remplacer - S par $\left(\frac{\delta F}{\delta T}\right)_v$ et la définition de l'énergie libre conduit à l'équation de Thomson qui s'écrit souvent aussi $U = F - T \left(\frac{\delta F}{\delta T}\right)_v$

(bien des auteurs désignent par ψ ce qui est ici désigné par F).

La chimie physique ancienne a fait grand usage de cette fonction avant que l'atomisme change ses méthodes.

N° 156. Potentiel thermodynamique sous pression constante

$$\phi = U - TS + pv$$ *(souvent désigné par ζ)*

Différentions

$$d\phi = \underbrace{dU - TdS}_{-\,p\,dv} - SdT + p\, dv + v\, dp$$

$$d\phi = + v\, dp - SdT$$

N° 157. *Equilibre des phases gazeuse et liquide (Gibbs).*

Appelons m, v_1, S_1, U_1, T, p la masse (1 gr), le volume spécifique, l'entropie et l'énergie interne de *l'unité de masse,* la température et la pression *du liquide.*

Désignons par les mêmes lettres accentuées les caractéristiques *de la vapeur* m' = 1 gr; v_1', S_1', U_1', T', p'

Supposons l'ensemble contenu dans une enceinte imperméable à la chaleur et de volume constant.

Quelles sont les conditions d'équilibre?

Le premier principe de l'énergie interne indique que $\boxed{U=c^{te}}$

En effet, $dU = dQ_{ergs} - p\, dv$ = zéro - zéro puisque adiabatisme et volume constant.

Le principe de Carnot-Clausius nous donne d'autre part: que l'*entropie tend vers un maximum.*

Donc volume, masse, énergie interne ou totale, sont constants et mS + m'S' doit être maximum

$$m dS_1 + S_1 dm + m' dS_1' + S_1' dm' = 0$$

$$d[m\, v_1 + m' v_1'] = 0 = m\, dv_1 + v_1 dm + m' dv_1' + v_1' dm' = 0$$

$$d[m + m'] = 0 = dm + dm' = 0$$

$$d[mU_1 + m'U_1'] = 0 = m\, dU_1 + U_1 dm + m' dU_1' + U_1' dm'$$

On a donc déjà quatre équations; dans la quatrième remplaçons dU_1 par $TdS_1 - p\, dv$, nous aurons le système:

$$\lambda\, [m\, (dS_1) + S_1 (dm) + m'(dS_1') + S_1' (dm')] = 0$$

$$\mu\ [m\ (dv_1)\qquad v_1\ (dm)\qquad\qquad\qquad (dm')]$$
$$\nu\ [\qquad\qquad\qquad (dm)\qquad\qquad\qquad (dm')]$$
$$1\ \left[\begin{Bmatrix} m\ T\ (\ dS_1) \\ -mp\ dv_1 \end{Bmatrix} + U_1(dm) + \begin{Bmatrix} m'T'(dS_1') \\ -m'p'dv_1' \end{Bmatrix} + U_1'\ (dm')\right] = C$$

Utilisant la méthode des multiplicateurs indéterminés, λ, μ, ν pour les trois premières équations, ajoutant et égalant à zéro les coefficients des diverses différentielles, on a:

coefficient de $(dS_1)m$ $\quad \lambda+T=0$
" de $(dS_1')m'$ $\quad \lambda+T'=C$
$\Big\}$ donc $\boxed{T=T'}$ la température est donc la même pour les deux phases en équilibre.

coefficient de $(dv_1)m$ $\quad \mu-p=C$
" de $(dv_1')m'$ $\quad \mu-p'=C$
$\Big\}$ donc $\boxed{p=p'}$ la pression est commune au liquide et à la vapeur lors de l'équilibre

coefficient de $(dm):\lambda S_1+\mu v_1+\nu+U_1=C$
" de $(dm'):\lambda S_1'+\mu v_1'+\nu+U_1'=C$
$\Big\}$ $\quad -\nu = \lambda S_1+\mu v_1 + U_1 = \lambda S_1'+\mu v_1'+U_1'$

comme $\lambda = -T$; $\mu = p$; de la relation précédente on tire:

$$\underbrace{U_1 - T\ S_1 + p\ v_1}_{\Phi_{1\,gr.\,liquide}} = -\nu = \underbrace{U_1' - T\ S_1' + p\ v_1'}_{\Phi'_{1\,gr.\,vapeur}}$$

égalité des potentiels thermodynamiques spécifiques du liquide et de la vapeur: potentiel *sous pression constante*.

Donc, lors de l'équilibre, les deux phases ont même *pression*, même *température* et même potentiel $(\Phi)_p = \boxed{I - T\ S}$

Une remarque de Gibbs pour ceux qui trouveraient trop particulières les hypothèses "adiabatisme" et "isométrique".

"It should be noted that the assumption of a rigid, non-conducting envelope enclosing the mixture involves *no loss of generality in the result;* for, if any mass is in equilibrium it would be also if the whole or any part of it were enclosed in such an envelope; therefore the conditions of equilibrium of a mass so enclosed are the general conditions which must always be satisfied in any case of equilibrium".

Remarque: Il est très important pour calculer la chaleur totale I d'une vapeur saturée de se rappeler que

$$\overline{T \text{ et } I_m - T\ S_m}$$

ont la même valeur pour les deux phases *(à masse égale pour Φ)*

N° 158. Les quatre équations de Maxwell pour la chaleur.

$$dU = TdS - pdv$$
$$dI = TdS + v\ dp - \cancel{p\ dv} + \cancel{p dv}$$
$$dF = \cancel{TdS} - p\ dv - \cancel{TdS} - SdT$$
$$d\Phi = T\cancel{(dS)} - \cancel{p(dv)} + v(\ dp\ ) - \cancel{TdS} - SdT + \cancel{p(dv)}$$

Nous ne faisons que les indiquer pour préciser les notations.

N°159. *Les 4 principaux diagrammes employés dans l'industrie thermique.*

- énergétique de Clapeyron ↑ p × $\vec{v}_m$ *(relevé à l'indicateur de Watt)*
- entropique de W. Gibbs, ↑ T × $\vec{S}_m$
- chaleur totale × entropie, ↑ I_m × $\vec{S}_m$ *(dit de Mollier)*
- chaleur totale × pression, ↑ I_m × $\vec{p}$

(Celui de Callendar n'est pas très différent du précédent mais une des échelles, celle des pressions, est logarithmique pour avoir des courbes plus régulières)

I) Le premier de ces diagrammes le plus connu depuis que Watt a imaginé son indicateur permettant de le tracer automatiquement a déjà été rencontré plusieurs fois dans ce cours *(↑p, →v_m)*

L'ingénieur l'aime particulièrement parce qu'il lui donne directement *le travail disponible par cycle,* lequel est la différence entre la boucle dextrorsum ↻ et la boucle sinistrorsum ↺ *(les aires étant lues à l'échelle).* Nous verrons cependant que dans la région de surchauffe, il n'est pas utilisable (N° 161).

$A_m = \oint p \, dv_m$ = Aire dextrorsum - Aire sinistrorsum = travail. Cette aire est aussi équivalente à la chaleur $(Q_1 - Q_0)$ transformée en travail.

II) Le second diagramme mentionné est le diagramme entropique qui donne la quantité de chaleur ajoutée *(ou soustraite)* à la vapeur (T↑, →S_m)

$$Q_m = \oint T \, d S_m = \oint d \, Q_m$$

les *isothermes sont ici des horizontales* (comme les isobares du diagramme p × v_m) les adiabatiques sont ici des verticales *(comme les isométriques du diagramme p × v_m).*

Le cycle de Carnot est donc dans ce diagramme représenté par un *rectangle* qui mesure la chaleur absorbée par le gaz si ↻.

Et comme l'énergie interne, étant une différentielle exacte, ne varie pas au cours d'un cycle fermé

$$\oint d \, U_m = 0 = \oint d \, Q_m \text{ ergs} - \oint p \, dv_m$$

Tout comme dans le diagramme énergétique, l'aire représente aussi bien *le travail que la chaleur en unités énergétiques*

$$\oint d \, Q_m = \text{aire } \textit{(du diagramme entropique)} = \oint p \, dv_m$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{\text{aire A B } S_1 S_0 \text{ A}}{\text{aire C D } S_0 S_1 \text{ C}} = \frac{T_1}{T_0}$$

les températures absolues peuvent se traduire avec ce diagramme par la proportion: deux rectangles de base commune sont entre eux comme leurs hauteurs.

Le diagramme entropique dans la région de saturation et pour la surchauffe. Comment voir le titre en vapeur x = fraction vaporisée ou "dryness".

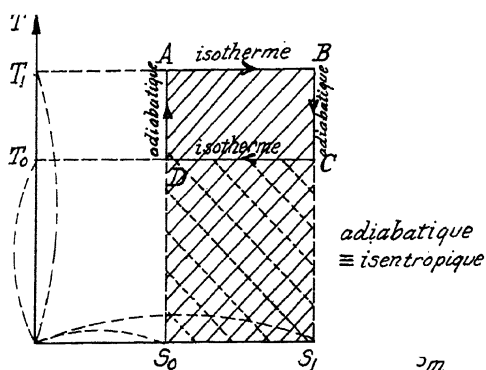



Fig. 114

Aire $A_1 E_1 b\ a\ A_1$ = chaleur pour faire passer, *à la températu-re* T_1 , m grammes de l'état liquide à l'état de vapeur sèche = m L_{T_1} *(fig. 115)*

Au point P_1 qui se trouve dans la région de saturation, désignons par x le "titre" *(dryness)*, il reste à vaporiser m(1-x) donc il faut encore m (1-x) L_{T_1} pour amener P en B_1

$$\frac{\text{Aire } A_1 B_1 b\ a\ A_1}{\text{Aire } P_1 B_1 b\ p\ P_1} = \frac{m\ L_{T_1}}{m\ (1-x) L_{T_1}} = \frac{1}{1-x}$$

d'où $\frac{1}{x} = \frac{A_1 B_1}{A_1 B_1 - P_1 B_1} = \frac{A_1 E_1}{A_1 P_1}$ et $\boxed{x = \frac{A_1 P_1}{A_1 E_1}}$

Aux limites, si P_1 est en A_1, x = 0, rien n'est vaporisé; et si P_1 est en E_1, x = 1 , tout est vaporisé "vapeur sèche".

S'il y a une détente adiabatique, le nouveau titre en vapeur est $\frac{A_0 P_0}{A_0 E_0}$, lu sur le diagramme immédiatement.

Le *diagramme entropique est le meilleur pour comparer les rendements de divers cycles (et pour comprendre l'amélioration du rendement apportée par la surchauffe en particulier).*

Pour préparer cette mise au point, nous devons ici chercher l'allure d'une "isobare" puisque la surchauffe s'opère toujours sous pression constante. La seule difficulté du diagramme entropique étant l'allure plus compliquée des isobares et isométriques un diagramme bien rigoureux éclaircira la chose.

(Dans la région de saturation une isobare étant en même temps une isotherme est une droite horizontale, mais il n'en est plus de même dans la surchauffe).

Utilisons par exemple les tables de vapeur surchauffée *(page 22, Marks and Davis)* qui nous donnent *à toute pression les données correspondant aux divers degrés de surchauffe (T , $I_{1lb.}$, $S_{1lb.}$ v_{1lb}).*

GAZ · PARFAIT
Absolu K 1148
T critique
température critique
600° Fahr.
500° Fahr.
400° Fahr.
300° Fah.
200° Fah.
100° Fah.
32° Fah.
Zéro Fahr.
Absolu K 491 glace fondante
LIQUIDE
eau bouillante
x=0
D
E
A
C
VAPEUR SURCHAUFFÉE
VAPEUR SATURÉE
x=1
x=1/4
x=3/4
titre en vapeur x=1/2 (Dryness)
vapeur sèche (Dryness=1)
CA est agrandi 100 fois
100 AS
(réellement AC est négligeable à petite échelle)
1) —— lignes de même titre en vapeur
2) ------ isobare et isotherme à la fois
3) + + + isobare seulement
4) .... isotherme seulement
5) ▲▲▲ échauffement isobare de l'eau dans la chaudière
Zéro absolu
1 x 100 B.T.U/lb.
2 x 100 B.T.U/lb.
6) ▫▫▫ isotherme de l'eau venant du condenseur et allant à la chaudière grâce à la pompe

Fig. 115

Fig. 116

Exemple: Expliquons la construction d'*un point d'une isobare dans la région de surchauffe*. S'agit-il de raccorder les points de l'isobare à l'isobare-isotherme qui est marquée 200° Fahrenheit. *(fig.116)*

Table 3, page 22 *(Marks and Davis)* je vois que pour la vapeur saturée je dois interpoler entre

$$\left.\begin{array}{ll} 11 \dfrac{\text{livres}}{\text{pouce carré}} & 197.8 \text{ Fahren.} \\ & \qquad 200° \text{ F.} \\ 12 \dfrac{\text{livres}}{\text{pouce carré}} & 202.0 \text{ Fahren.} \end{array}\right) \begin{array}{l} d = 2.2 \\ \\ D = 4.2 \end{array}$$

et pour 50 degrés de surchauffe soit 250 degrés sous p $11 + \dfrac{1.1}{2.1} = 11.524$, je devrai interpoler entre

$$\left\{\begin{array}{ll} 197.8 + (50° \text{ Surch.}) & S = 1.8141 \\ 9C2.2 + (50° \text{ Surch.}) & S = 1.8069 \end{array}\right) \Delta = -.0072$$

l'interpolation *(comme pour un cosinus, soustractive)* me donne

$$\underline{250° \text{ et } 11.524.} \quad 1.8141 - \frac{2.2}{4.2}(.0072) = \boxed{1.8103}$$

de même pour 100° de surchauffe et p = 11.524 $\frac{\text{lbs.}}{(\text{po})^2}$,

	197.8 + 100° surch.	S = 1.8458
	202.2 + 100° surch.	S = 1.8384) Δ = -.0074
donc	200 + 100° surch.	S = 1.8458 - $\left(\frac{2.2}{4.2} 0.0074\right)$ = 1.8419

.......etc.......

Nous aurons maintenant à notre disposition tout ce qu'il faut pour comparer le rendement des cycles· *(Nous n'avons pas tracé les isométriques qui sont presque confondues avec les isobares, la figure n'eut pas été claire).*

III) Le troisième diagramme est celui de Mollier *[dont un magnifique relatif à l'anhydride carbonique se trouve à la fin du livre de Roberts "Heat and Thermodynamic". (Blackie)].*

Un diagramme pour la vapeur d'eau édité par la General Electric Company se trouve à la fin des tables de Marks and Davis.

Ce diagramme de Mollier bien inférieur à celui de Gibbs *(entropique)* pour comparer les rendements est par contre bien commode pour interpoler graphiquement: ne pouvant songer à petite échelle à faire quelque chose de lisible, nous renverrons le lecteur aux deux livres mentionnés et nous expliquerons l'utilisation de ce diagramme à propos du calcul des rendements des cycles. Ce que nous ne ferons pas, c'est la construction rigoureuse point par point du diagramme de Mollier vu la petitesse des figures que nous pouvons donner.

IV) Le quatrième diagramme *(chaleur totale × pression)* se trouve dans les tables de Marks and Davis *(Page 78 à 86 l'utilisation des deux derniers diagrammes y est assez détaillée: tables de Marks and Davis: Longmans).*

N° 160. Le cycle de *Rankine* et son rendement comparé avec celui de Carnot. **Amélioration** du rendement par la surchauffe.

Le cycle de Rankine est encore un cycle *idéal* en ce qu'il est *réversible* et que pour cela on doit négliger les pertes irréversibles *(conductibilité, laminage, et frottements de toutes sortes),* mais *il est adapté à l'étude de la machine* à vapeur avec chaudière, cylindre et condenseur au lieu d'être indépendant de tout fluide comme celui de Carnot.

La figure suivante fera abstraction du "tiroir" chargé d'admettre et de couper l'admission de la vapeur. Les valves V et V' alternativement ouvertes et fermées figurent ce qu'un opérateur *(chargé de remplacer le tiroir)* pourrait effectuer. *(T_1 = 400º Fah. et T_0 = 100º Fah. pour fixer les idées.).*

Sur la figure précédente, nous avons marqué en ▫▫▫ et ▴▴▴ deux arcs de courbe généralement négligés; la différence *pratique* est une très faible erreur, *mais l'intelligence des faits* nécessite la distinction entre les arcs $\overline{AC}$ ▫▫▫ + $\overline{CD}$ ▴▴▴ et l'arc unique $\overline{AD}$ pour savoir de quel droit on peut négliger la différence.

En effet le point A correspond à l'entropie et à la température du point d'ébullition sous la pression de 0.946 lbs/(po)²

Volant
Guide
amenée de l'eau
de condensation
Valve d'admission
fermée actuellement
Valve d'échappement
ouverte actuellement.
vapeur
vapeur
V
V'
Bouilleur
de Chaudière
(boiler)
$T_1 p_1$
$T_0 p_0$
Pompe d'alimentation en eau du bouilleur (Chaudière)
Condenseur
(refrigerator)
or condenser
foyer
eau

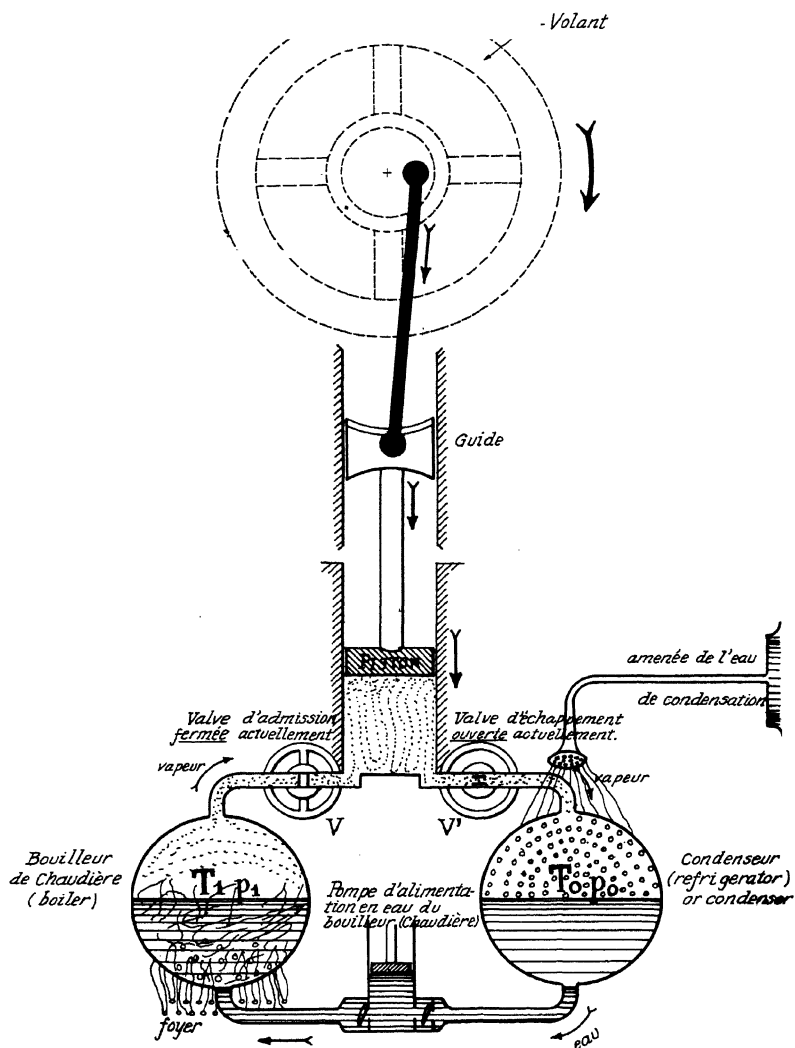



Fig. 117

c'est-à-dire aux *conditions de l'eau dans le condenseur avant la la prise par la pompe d'alimentation.*

Mais la pression qui règne dans la chaudière étant de 247.1 lbs/(po)² l'eau qui arrive de la pompe d'alimentation à la température de 100° Fehrenheit *n'est pas en ébullition elle est complètement liquide* vu la grande pression et *son entropie est plus petite* que si la pression étant seulement de 0.946 lbs/(po)², le point d'ébullition était atteint à cette température de 100°F *(vu la petite compressibilité de l'eau: 1/20000 ≏ par atmosphère)*

$\Delta v_{1lb} \doteq \frac{-1}{20000}\; 350.8\; \frac{(\text{pied})^3}{\text{livre}} \frac{247}{14.7}$; et l'entropie, comparée à la valeur qu'elle aurait si l'ébullition avait lieu est inférieure de $-(247)\left(\frac{-351\times 247}{20000\times 14.7}\right) = +\ 80\ \frac{\text{livre pieds}}{\text{livre}}$ ou $\frac{1}{10}$ de $\frac{\text{B.T.U.}}{\text{livre}}$;

pour que la différence soit lisible, nous l'avons *amplifiée 100 fois.*

Donc pratiquement l'échauffement isobare de l'eau dans le condenseur sera représenté par un arc (AD) de la partie de gauche de la courbe de saturation *(branche x = o)* ; mais cela n'était pas évident à priori. De même, l'arc ACooo représente l'isotherme de la compression de la pompe d'alimentation.

Chaleur absorbée par la substance qui évolue: Q_1 (▩▩▩+//////) aire: $A_0ACDEE_0A_0$: par compression de la porpe *(isotherme AC, échauffement isobare CD et vaporisation isotherme DE).*

Chaleur rejetée par la substance qui évolue: Q_0 (//////////////) aire: $H\ A\ A_0E_0H$

I'aire ▩▩▩ différence des deux précédentes est la partie convertie en travail

Le rendement thermique du cycle de Rankine est donc

aire ▩▩▩ + aire

$\rho_{\text{Rankine}}\quad Q_1$

Note I: Le rendement d'un cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes limites de température serait

$$\rho_{\text{Carnot}} = \frac{T_1 - T_0}{T_1} = \frac{\text{Aire rectangle CMEHAC}}{\text{Aire rectangle } A_0MEE_0A_0}$$

$$\rho_{\text{Rankine}} < \rho_{\text{Carnot}}$$

puisque, lorsqu'à une *fraction positive* on retranche une quantité positive *(aire CMDC)*, la fraction diminue sur la figure *en prenant CMDC comme unité d'aire* et en admettant que l'aire▩ vaille six fois cette aire et CHE_0A_0 douze fois cette aire,

$$\rho_{\text{Rankine}} \doteq \frac{5}{17} \text{ alors que } \rho_{\text{Carnot}} = \frac{6}{18}$$

$$\text{et } \frac{5}{17} = \frac{6-1}{18-1} < \frac{6}{18}$$

T
x=0
x=1/4
x=1/2
x=3/4
x=1
T1 = 400°F.
M
D
E
T1 - T0
T0 = 100° Fah.
C
F
H
(wet)
x=0
(eau bouillante)
x=1/4
x=1/2
x=3/4
(dry)
x=1
(sèche)
T1
Voir figure 116
pourquoi AC + CD sont confondus pratiquement en un seul arc AD
AC { compression de l'eau opérée par la pompe d'alimentation isothermiquement T = T0 = constante 100° Fahrenheit ; P passe de 0.946 à 247.1
CD { échauffement de l'eau dans le bouilleur (isobare) P = P1 = constante 247.1 lbs/(pouce)² ; T passe de T0 = 100° Fah. à T1 = 400° Fah.
C
A
zéro degré absolu
A0 C0
D0
E0
S1lb
DE { vaporisation de l'eau à constante température T1 = 400°F (L = 827.2 BT.U./livre à cette température T1) et DE est isotherme-isobare
EH { détente adiabatique de la vapeur qui devient de moins en moins sèche, son titre passant de 1 à 3/4 (environ)
HA { compression isotherme où la condensation s'achève, le titre tombant de 3/4 (environ à zéro.

Fig. 118

Note II: Comme nous le verrons au prochain numéro de commencer la détente adiabatique avec de la vapeur non sèche diminue le rendement; et de surchauffer la vapeur sous pression constante augmente le rendement.

N° 161. Amélioration du rendement thermique par surchauffe isobare.

Diminution par détente prématurée avant que la vapeur soit complètement sèche.

Le rendement du cycle *à vapeur sèche au début de la détente* adiabatique*(fig.119)*

$$\rho_{Rankine(sèche)} = \frac{\text{Aire CDEHAC}}{\text{Aire CDEHE}_0\text{A}_0\text{AC}}$$

Celui du cycle à vapeur *humide au début de la détente* adiabatique

$$\rho_{Rankine(humide)} = \frac{\text{Aire CDKLAC}}{\text{Aire CDKLK}_0\text{A}_0\text{AC}}$$

Et celui du cycle à vapeur surchauffée de 300° au début de la détente adiabatique

$$\rho_{Rankine\ (surchauffée)} = \frac{\text{Aire CDFJIHAC}}{\text{Aire CDFJIJ}_0\text{E}_0\text{A}_0\text{AC}}$$

je dis que $\rho_{humide} < \rho_{sèche} < \rho_{surchauffée}$.

Pour le montrer, prenons *comme point de comparaison le rendement du cycle de Carnot* qui évoluerait entre

$$\frac{T_1 - T_0}{T_0} = \frac{\text{Aire KEHLK}}{\text{Aire KEHE}_0\text{K}_0\text{LK}}$$

$$\rho_{humide} = \frac{\text{Aire CDKLAC}}{\text{Aire CDKLK}_0\text{A}_0\text{AC}} < \rho_{Carnot} \quad (N^o\ 160)$$

donc ρ_{sec} est compris entre ρ_{Carnot} et ρ_{humide}, puisque le cycle sec est la somme du cycle humide CDKLC et d'un cycle de Carnot KEHLK.

$$\rho_{humide} < \rho_{sec} < \rho_{Carnot}$$

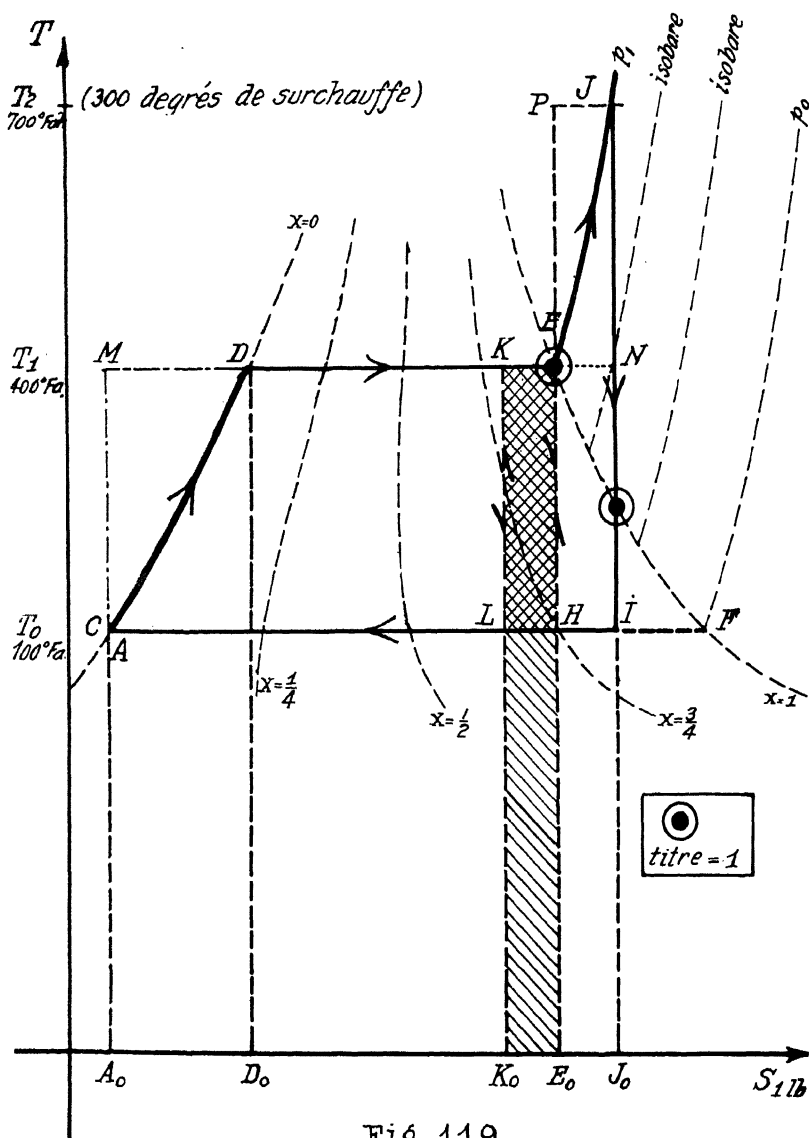
on peut gratuitement ajouter l'arc ↑ LK et l'arc ↓ KL pour transformer le cycle sec en *(cycle humide) + (cycle de Carnot)*

Opérons de même en ajoutant l'arc ↓ EH + l'arc ↑ HE alors le cycle *(surchauffé)* peut être considéré comme un cycle sec CDEHC et d'un cycle à rendement supérieur à celui du cycle de Carnot: EJIHE.

Pour le bien voir, considérons le cycle de Carnot ENIHE, son rendement est $\frac{\text{aire ENIHE}}{\text{aire ENIJ}_0\text{E}_0\text{HE}}$; c'est une fraction positive et en ajoutant un même nombre positif aux deux termes d'une fraction, on la rapproche de l'unité *donc on l'augmente.*

$$\rho_{cycle\ EJIHE} > \rho_{cycle\ Carnot\ ENIHE}$$

T
T2
700°Fa
(300 degrés de surchauffe)
P
J
p1
isobare
isobare
p0
x=0
T1
400°Fa
M
D
K
E
N
T0
100°Fa
C
A
L
H
I
F
x=1/4
x=1/2
x=3/4
x=1
titre = 1
A0
D0
K0
E0
J0
S 1 lb

Fig. 119

(Que les mânes de Carnot soient en paix! Carnot a établi que son cycle avait le rendement maximum parmi les cycles évoluant entre les mêmes limites de température c'est-à-dire

$$\rho_{\text{cycle EJIHE}} < \rho_{\text{autre cycle Carnot PJNIHEP}}$$

Nous ne voudrions pas qu'un lecteur distrait se figure que le rendement dans la région de surchauffe est supérieur à celui d'un cycle de Carnot "évoluant entre les mêmes limites de température".)

Le cycle de vapeur surchauffée se compose donc

$$\underbrace{(\text{du cycle: sèche HACDEH})}_{\text{dont le rendement} < \rho_{\text{Carnot } T_0, T_1}} + \underbrace{(\text{du cycle HEJNIH})}_{\text{dont le rendement} > \rho_{\text{Carnot } T_0, T_1}}$$

Ayant donc un rendement intermédiaire ce rendement global sera supérieur au cycle sec, mais inférieur au rendement

$$\frac{T_2 - T_0}{T_0} \text{ du cycle PJNIHEP}$$

$$\rho_{\text{sèche}} < \rho_{\text{cycle avec surchauffe}} < \frac{T_2 - T_0}{m}$$

$$\text{humide} < \rho_{\text{sèche}}$$

$$\rho_{\text{humide}} < \rho_{\text{sèche}} \quad \rho_{\text{avec surchauffe}} \ll \frac{T_2 - T_0}{m}$$

Mais allons maintenant afin de permettre au plus tôt à l'étudiant de travailler avec les idées de Mollier-Callendar, opérer la comparaison des rendements sur le diagramme de Clapeyron en $p \times v_{1lb}$ *(Revoir la fig.112)*

Les mêmes lettres serviront aux trois cycles de façon à faciliter la comparaison du diagramme de Gibbs *(entropique)* et de celui de Clapeyron, les deux diagrammes étant dessinés à l'échelle et assez rigoureusement.

Bien que ce ne soit pas classique, pour que le diagramme de Clapeyron soit lisible dans la région de saturation, comme nous avons à figurer des volumes aussi différents que 0.01614, 0.01700, 1.8720 et 333, nous *adoptons une échelle logarithmique pour les volumes et une échelle logarithmique pour les pressions* car nous avons aussi à porter 1 lb/(po)² et 247 lb/(po)²

Les cycles seront *déformés mais très lisibles* et les comparaisons des rendements ne changeront pas l'ordre des cycles quant à leur avantage.

Pour la même raison que précédemment puisque d'ajouter une quantité positive *(aire hachurée)* à une fraction positive: le rendement du cycle de Rankine en vapeur sèche avant détente adiabatique, augmente la fraction

$$\rho_{\text{avec surchauffe}} \qquad \rho_{\text{vapeur sèche}}$$

CD
247
BJ
titre 3/4
courbes de saturation
CD { pratiquement confondus.
FH { pratiquement confondus.
275° titre 7/8 p=45.4
EH
détente adiabatique
augmentation d'aire due à la surchauffe
X=1
log p manom.
lbs/po²
log 1
A
H
X=0
log 0.01614
log 0.0170
0
log 1
log 1.8720
log 333

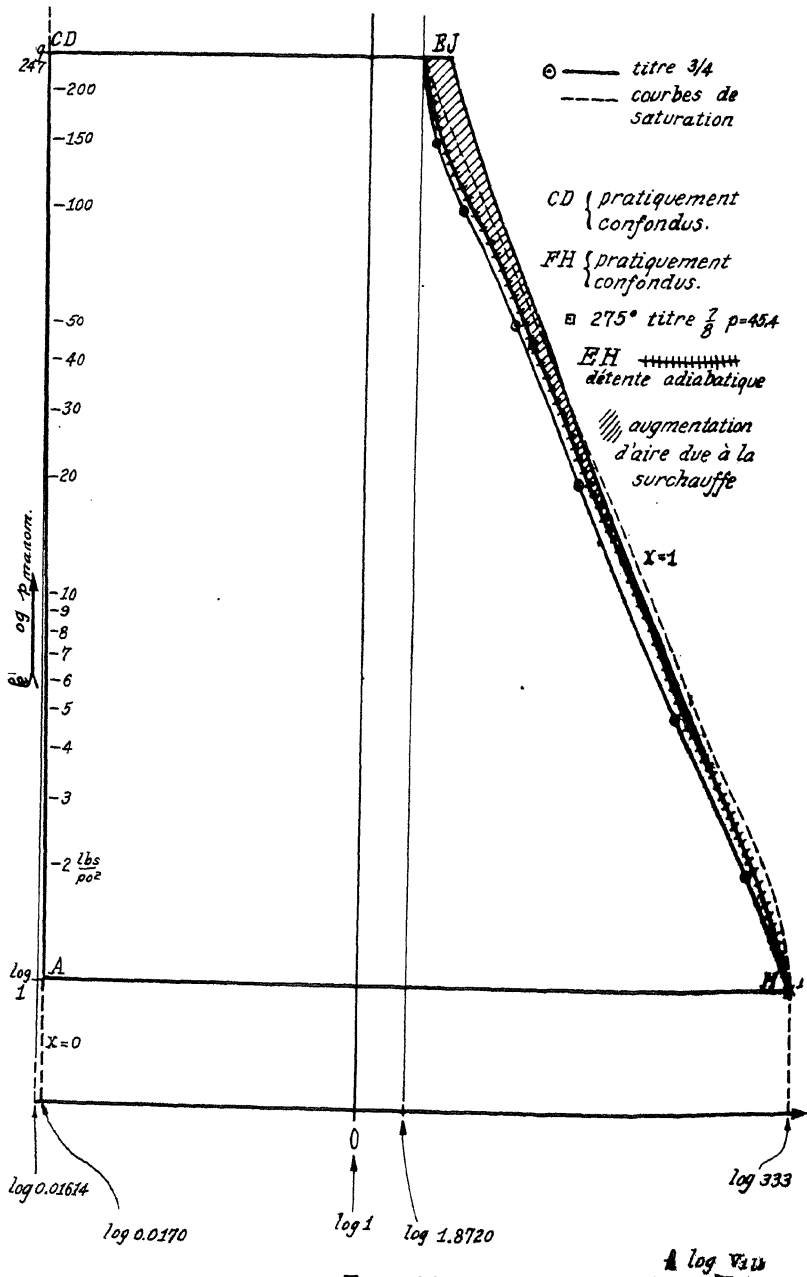



Fig. 120

Maintenant, le lecteur étant prévenu, nous allons faire un diagramme de Clapeyron *sans souci de l'échelle* de façon à pouvoir rendre visible ce qui est trop petit en réalité, ne demandant au *croquis côté* que de nous permettre de faire les calculs.

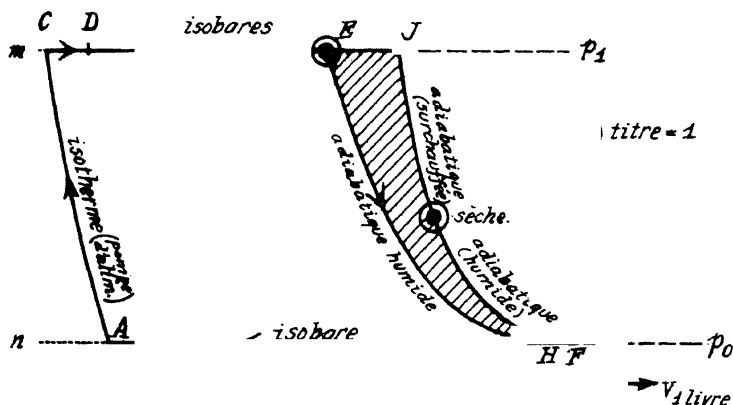



Fig. 121

Travail du cycle *(sèche)* de Rankine: aire (mEHnm)-aire(mCAn)

Mais *(Nº 153, deuxième exemple, figure 112)* l'aire mEHnm n'est pas autre chose que *(heat-drop) la chute de chaleur totale* $I_E - I_H$

Quant à l'aire mCAn, elle est infinitésimale et pourra en tout cas être confondue avec l'aire d'un rectangle *(puisque $m\,C = 0.01614$ et $n\,A = 0.0170$);* posons mc = v_{eau}, p_o

Aire m C A n $\simeq$ $(p_1 - p_o)\, v_{eau,\,p_o}$ = $(247.-1)\ 144\ (0.017)$ lbs × pi.

Le travail du cycle est donc: $(I_E - I_H)$ en livre pieds − $(p_1 - p_o)\, v_{eau\, p_o}$ en livre pieds.

Le travail équivalent à la chaleur prise au bouilleur le long de l'isobare C D E est *(voir Nº 153)* $I_E - I_C$ puisque *pour tout arc d'isobare* $d\,I = d\,Q$

$$\text{Rendement} = \frac{I_E - I_H - (p_1 - p_o)\ v_{eau\ p_o}}{I_E - I_C}$$

Le long de l'isotherme A C *(lorsque l'eau est transportée grâce à la pompe d'alimentation du condenseur au bouilleur)*

$$dI = T_o\, dS + v\, dp$$

$$I_C - I_A = T_o\,(S_{eau\,C} - S_{eau\,A}) + \int_A^C v_{1lb}\, dp$$

$$= \underbrace{T_o\,(S_{eau\,C} - S_{eau\,A})} + (p_1 - p_o)\ v_{eau\ p_o}$$

en livre pieds: $I_C - I_A = T_o(0.5663-0.1327)778+(247-1)144(0.017)$

On peut éliminer Ic et écrire: $I_C = I_A + T_o\,(S_C - S_A) + (p_1 - p_o)v_o$

d'où $I_E - I_C = I_E - I_A - T_o(S_c - S_A) - (p_1 - p_o)v_o$

(en écrivant dorénavant v_o au lieu de $v_{eau\,po}$)

d'où $\quad I_E - I_H - (p_1 - p_o)$

$\quad I_E - I_A - (p_1 - p_o)v_o - T_o(S_c - S_A)$

La plupart des auteurs négligent les termes $(p_1 - p_o)v_o$ et le terme $T_o(S_c - S_A)$, voyons ce qu'il en est devant I_E, I_H, I_A, ou mieux leurs différences $(I_E - I_H)$ et $(I_E - I_A)$.

I_E = chaleur totale de vapeur sèche à $247 \frac{lb}{(po)^2} = 1201.3 \frac{B.T.U.}{livre}$

I_H = " " " " $\frac{3}{4}$ " à $\frac{1\ lb}{(po)^2} = (1104.4)\frac{3}{4} + \frac{69.8}{4} = 845.75 \frac{B.T.U.}{livre}$

I_A = " l'eau à $\frac{1\ lb}{(po)^2} = 69.4 \frac{B.T.U.}{livre}$

$(p_1 - p_o)\,v_o$ *(feed-pump term)*, travail de la pompe d'alimentation en B.T.U.

$$\frac{(247-1)144\ (0.017)}{778} \quad 0.774 \frac{B.T.U.}{livre}$$

$T_o(S_c - S_A) = [492+(100-32)]\ (0.5663-0.1327) = 243$ B.T.U.

Négliger le travail de la pompe d'alimentation n'est pas grave, mais négliger le terme $T_o(S_c - S_A)$ est une plaisanterie; pourquoi calculer I_A plutôt que I_C? et commettre pareille farce!

Aussi négligerons-nous le travail de la pompe d'alimentation qui n'affecte pas le rendement

$$\rho = \frac{I_E - I_H}{I_E - I_C} = \frac{1201.3 - 845.75}{1201.3 - 374.1} = 0.4298$$

(tenir compte du travail que la pompe d'alimentation eut donné)

$\rho = 0.4288$ ce qui est tout à fait pareil

$\boxed{\rho = 0.43}$

N° 162. Il y a un seul point d'arbitraire dans notre calcul, c'est l'évaluation grosso modo de $\boxed{I_H}$; les tables ne donnant pas les chaleurs totales "humides" nous nous sommes servi du diagramme entropique à l'échelle fig. 118 et comme il nous montre que H est à peu près sur la courbe de titre 3/4 nous avons dit: $I_H = \frac{3}{4}(I)$ vapeur sèche à 247 livres $+ \frac{1}{4}(I$ eau) à 247 lbs.

Il est plus élégant et plus exact de se servir de la fonction $TS - I = -(\Phi)_p$ que W. Gibbs nous a montré

1°) Etre la même pour la vapeur et pour le liquide donc pour le mélange (N° 157)

2°) Etre un invariant pour une isobare-isotherme $- d\Phi = S\,dT - v\,dp = S$ (zéro) $- v$ (zéro) (N° 158) d'où $\Phi = c^{te}$ *pour les isobares-isothermes des paliers de saturation.*

Ayons recours encore au diagramme entropique de Gibbs.

$-\Phi_H = -\Phi_F$; $T_o S_H - I_H = T_o S_F - I_F$

$S_H - S_E$ (*E H adiabatique = isentropique)*

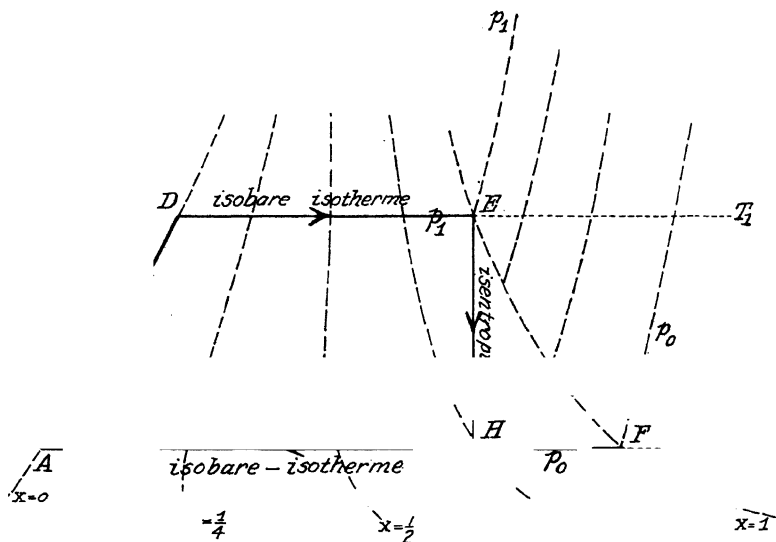
T_o, S_E, S_F, I_F sont connues ou dans les tables *(vapeur sèche)*

$$I_H = T_o\,(S_E - S_F) + I_F$$

$$= 560(1.5286-1.9754)+1104.4 = 854.2 \frac{\text{B.T.U.}}{\text{livre}}$$

(entropie vapeur sèche à 247 $\frac{\textit{livre}}{\textit{po}^2}$*)* = 1.5286

(" " " " 1 $\frac{\textit{livre}}{\textit{po}^2}$*)* = 1.9754

Notre approximation nous avait donné 845.75 $\frac{\text{B.T.U.}}{\text{livre}}$ et ce raffinement nous donne 854.2 $\frac{\text{B.T.U.}}{\text{livre}}$ c'est-à-dire à 1% près concordance.

mêmes échelles que fig. 116

S_{1lb}

Fig. 122

I chaleur totale (par livre)
S entropie (par livre)
ISOTHERME CRITIQUE
VAPEUR SATURÉE
X=1 VAPEUR SÈCHE
x=3/4
x=1/2
x=1/4
x=0
arctang. T₀
LIQUIDE ET VAPEUR
Région de saturation
GAZ
LIQUIDE
EAU BOUILLANTE
ISOTH - CRITIQUE
T₄
T₃
T₂
T₁
T₀
pₖ
p₃
p₂
p₁
p₀
I_J
I_I
I_A
n
d
S_A
S_J = S_I
+ - + - + isobares-isothermes. dont la pente est la temp absolue.
- - - - - isobares seulement.
.... isothermes seulement.
—— isotherme critique.
—— lignes d'égale sècheresse de même titre.

Fig. 123

Donc un diagramme même à échelle moyenne donne de bons résultats.*

Le rendement corrigé sera:

$$\rho = \frac{1201.3 - 854.2}{1201.3 - 374.1} = \boxed{0.42} \quad \text{au lieu de } 0.43$$

Nous avons maintenant tout en mains pour comprendre l'usage du diagramme de Mollier; le lecteur voit déjà vu que

$$\rho = \frac{I_E - T_o (S_E - S_F) - I_F}{I_E - I_C}$$

l'importance d'avoir les chaleurs totales I et les entropies S à toute température pour la vapeur sèche et l'eau bouillante.

N° 163. le diagramme de Mollier: $\uparrow I$, $\vec{S}$

$$d\, I = T\, d\, S + v\, dp$$

T

C'est à dire que *dans la région de saturation*, où l'isobare est en même temps isotherme, *la pente de l'isobare-isotherme est égale à la température absolue*

$$dp = 0 \quad \text{donne} \quad \frac{dI}{dS} = \left(\frac{\delta I}{}\right)$$

Pour un *gaz parfait, les isothermes sont des horizontales dans le diagramme de Mollier*

$$\frac{d\, I}{d\, S} = T + \frac{v\, dp}{dS} = 0 \text{ pour } \textit{un gaz parfait si } T = c^{te}$$

En effet, nous avons vu *(N° 120)* où nous exprimions les chaleurs en calories et les travaux en ergs que

$$d\, Q_m = m\, C_p\, d\, T - \frac{v_m\, dp}{E}$$

Si nous exprimons *tout en livre pieds ou tout en B.T.U.,* E disparaît; $d\, Q_m = m\, C_p\, d\, T - v_m\, dp$

$$d\, S_m = \frac{dQ_m}{T} = m\, C_p \frac{dT}{T} - \frac{v_m dp}{T}$$

$$\frac{d\, I_m}{d\, S_m} = T + \frac{v_m\, dp}{m\, C_p \frac{dT}{T} - \frac{v_m dp}{T}}$$

si T = constante, $d\, T = o$

$$\left(\frac{d\, I_m}{d\, S_m}\right)_T = T - T = 0$$

Après tout, le diagramme de Mollier ressemble beaucoup à un diagramme entropique incliné et un peu déformé. La figure 123 n'est pas à l'échelle, c'est un schéma explicatif et un guide très sûr pour utiliser un diagramme à grande échelle avec un grand nombre de lignes enchevêtrées.

Si la température de la surchauffe est T_3 *(température du point J de la figure 119)* et la pression p_2, la croisée des

lignes: *isobare* p_2 *et isotherme* T_3 donne le point • d'ordonnée I_J= ...., et S_J= ...... lues sur le diagramme de Mollier.

La détente adiabatique isentropique est une verticale qui donne immédiatement en la laissant tomber jusqu'à T_0 *(température du condenseur soit du point I de la figure 119)*
I_J= .... et S_I= S_J .

En suivant l'isotherme jusqu'à x = o, on a le troisième point A de la figure 119 et on lit I_A= .... et S_A= ....

$$= \frac{I_J - I_I}{I_J - I_A} = \frac{n}{d}$$

On voit que le rendement est d'un calcul enfantin avec le diagramme de Mollier, le rapport de deux chutes de chaleur totale.

N°164. La machine frigorifique du type "à compresseur", *(la seule pratique pour l'usage domestique).*

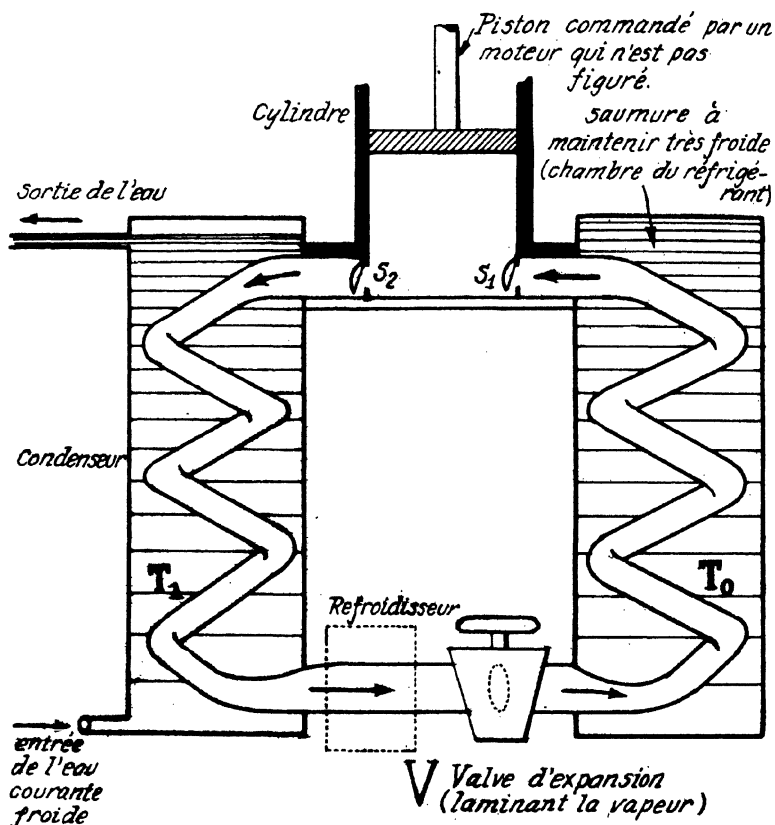



Fig. 124

Comme on ne peut transporter de chaleur d'un corps froid à un corps chaud sans le payer par "un travail de compensation", *(Clausius)* pour refroidir la saumure plus bas que la température des eaux courantes, il faudra un moteur.

L'effet utile (qui évite la dépense et l'encombrement de la glace naturelle ou artificielle) c'est l'enlèvement de Q_o calories à la température T_o de la saumure (brine).

Et le travail de compensation si la machine fonctionnait en cycle de Carnot à l'envers serait *l'équivalent de $Q_1 - Q_o$* calories.

Le coefficient économique *(coefficient of performance)* est donc:

$$\frac{\text{l'utile}}{\text{le payé mécaniquement}} = \frac{Q_o}{Q_1 - Q_o}$$

Et si le cycle était un cycle de Carnot réversible, ce coefficient de rendement frigorifique serait aussi

$$\frac{Q_o}{Q_1 - Q_o} = \frac{T_o}{T_1 - T_o}$$

T_o est imposé par la nature des denrées à conserver.
T_1 est la température de l'eau du robinet; en été, on voit que le rendement frigorifique sera inférieur.

Le réfrigérateur moderne a un cycle de Rankine avec deux arcs dans la région de vapeur surchauffée et un laminage dû à la valve d'expansion V.

Nous allons l'étudier sur les diagrammes entropique et de Mollier.

(Entre le condenseur et la valve d'expansion, il y a souvent un "cooler" ou refroidisseur à une température très peu inférieure à celle de la saumure; ce refroidisseur n'a pas été figuré sur le dessin fig 124)

Diagramme entropique *(qui n'est pas à l'échelle puisque c'est à peu près le même que celui de l'eau et non pas NH_3, CO_2 SO_2 .....etc)*

I_J est lu directement sur la table de vapeur surchauffée du fluide évoluant *(et non de l'eau)*

I_R est lu sur la table de vapeur saturée *(chaleur totale du liquide évoluant)*

I_I va être calculé en utilisant la fonction $(\Phi)_p = I - T\,S$ qui est un invariant pour une isobare-isotherme comme nous l'avons expliqué au N° 162

$$\Phi_I = \Phi_F \;;\; T_o S_I - I_I = T_o S_F - I_F$$

$S_I = S_J$ *(adiabatique)*

$$I_I = I_F + T_o (S_I - S_F) = I_F + T_o (S_J - S_F)$$

et I_F, S_J, S_F sont dans la table.

la "performance" $$\rho = \frac{[I_F + T_o (S_J - S_F)] - I_R}{I_J - [I_F + T_o (S_J - S_F)]}$$

Note: On peut se demander quel est l'effet de substituer une valve "*laminant*" à un cylindre d'expansion: cela diminue le rapport ρ d'environ 40%

$$\rho_{\text{avec valve}} = \rho_{\text{avec cylindre d'expansion}} \times \frac{60}{100}$$

Chaleur absorbée (venant de la saumure)
$Q_0 = I_I - I_Y$
Chaleur cédée (à l'eau courante et au refroidisseur).
$Q_1 = I_J - I_R = I_J - I_Y$
Travail de compensation
$Q_1 - Q_0 = I_J - I_I$
«performance» $\rho = \frac{I_I - I_R}{I_J - I_I}$
x=0
x=1/4
x=1/2
x=3/4
J
E
D
R
C
A
Y
I
F
T
S
IJ adiabatique
JE isobare (surchauffé)
DE, YI isothermes-isobares
RY courbe à constante «I»; $I_R = I_Y$
DR isobare x=0
IJ compression dans le cylindre (S_1 se ferme, S_2 s'ouvre).
JE+ED condensation dans le condenseur, liquéfaction totale.
DR refroidissement du liquide dans le refroidisseur auxiliaire.
RY courbe à constante «chaleur totale» due au laminage ou étranglement du fluide.
YI détente dans la chambre du réfrigérant (saumure) lorsque le piston aspire (S_2 se fermant et S_1 s'ouvrant)

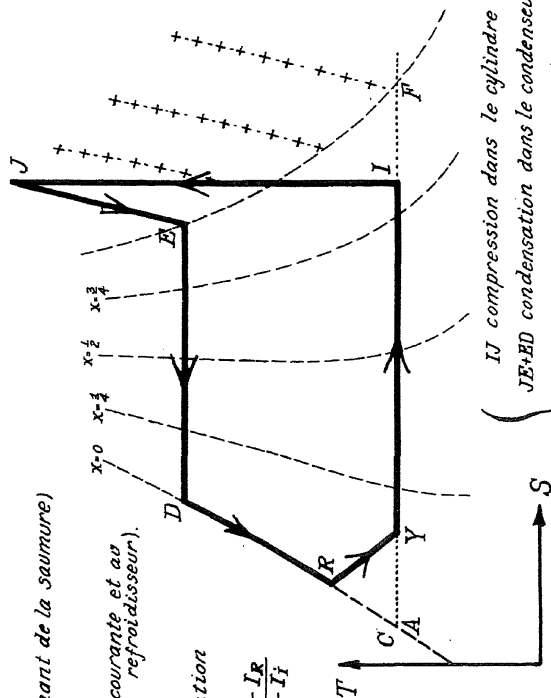



Fig. 125

Ceci n'est qu'*une valeur moyenne et pour CO_2*

Cette perte en rendement frigorifique est préférée vu la simplicité mécanique qu'elle permet: dans le petit appareillage c'est la règle générale de sacrifier le rendement au bon marché l'appareil.

Passons à l'utilisation du diagramme de Mollier Fig.126

I J adiabatique *(compression)*

J E isobare *(région surchauffée)* } condensation isobare dans
E D isobare-isotherme } le condenseur aux dépens de la fraîcheur de l'eau courante

D R isobare à titre nul

R Y "chaleur-totale constante"

Y I isobare isotherme *(détente)* et évaporation dans le serpentin aux dépens de la chaleur de la saumure.

J état de la vapeur quand elle quitte la compression et pénètre dans condenseur

déterminé par { *température: la température à la fin de la compression.*
pression: la pression de vapeur correspondant à la température du condenseur. }

I obtenu en abaissant la verticale isentropique et en l'arrêtant à la température à laquelle le fluide entre dans le compresseur.

Souvent, fréquemment même, on part de I connaissant le titre en vapeur [x] *et la température et pression à l'entrée du compresseur et on déduit J par une verticale isentropique en l'arrêtant à la pression du condenseur.*

D intersection de x = o avec l'isobare venant de J, le fluide est alors complètement liquéfié.

R le liquide s'étant refroidi dans le "cooler", on connaît le point R d'après la température de ce "refroidisseur auxiliaire"

Y donné par l'intersection de l'horizontale qui passe par R ("équi-calorique totale") avec l'isotherme isobare du point I fixée par la température à laquelle le fluide entre dans le compresseur.

Note: Comme on l'a expliqué sur la figure 119, si I était en H, J serait en E *(on ne pénètrerait pas dans la région de surchauffe et le rendement serait moins bon)*. A l'inverse, si I est en E', c'est-à-dire si la vapeur est sèche à l'entrée dans le compresseur, J serait en W' et le rendement meilleur.

On voit aussi que le "cooler" qui ajoute l'aire DHYRD au cycle améliore le rendement.

N° 165. La *règle des phases* de Willard Gibbs. Lorsqu'on a affaire à un mélange de diverses substances en *équilibre chimique, mécanique et thermique,* on considère d'abord le nombre "d'éléments" en présence.

Précisons *par des exemples* ce qu'on entend par [élément]: le sens étant différent de celui que les chimistes donnent à ce mot.

Mélange $P\,Cl_5 + Cl_2 + P\,Cl_3$: deux éléments parce que $P\,Cl_3 + Cl_2 \rightleftarrows P\,Cl_5$ permet d'obtenir le $P\,Cl_5$ à l'aide des deux autres *(où le chimiste dirait trois éléments, Gibbs en trouve deux ici).*

D'autre part, l'eau qui est un corps simple pour le chimiste est bien un élément aux températures basses et ordinaires.

le Mollier en réfrigération mécanique
I
S
ρ cycle dessiné $= \frac{n}{d}$
ρ cycle avec F'W' $= \frac{n'}{d'} > \frac{n}{d}$
ρ cycle avec HE $= \frac{n''}{d''} < \frac{n}{d}$
isotherme critique τ_c
voir fig. 123
pour l'explication du Mollier
et voir fig. 125
pour comparer avec le cycle
dans le diagramme entropique.

Fig. 126

mais *lorsqu'on approche de la température de dissociation, la relation*

$H_2 + O \rightleftarrows H_2O$ veut qu'on compte deux éléments.

Voilà pour la notion d'éléments; passons à celle de **phase**.

La glace, l'eau liquide et la vapeur d'eau sont trois phases d'une même substance.

Le mélange $PCl_5 + Cl_2 + PCl_3$ contient deux éléments en trois phases.

Soit un mélange de **n éléments** et de **φ phases**, Gibbs a appelé,

nombre de degrés de liberté ou variance $V = (n+2) - \varphi$

Premier exemple: l'eau aux températures ordinaires (sans glace ni vapeur)

1 élément, 1 phase
$V = (1 + 2) - 1 = 2$

ce système est "bi-variant" et est donc défini complètement par deux variables p et v_m, p et T ou v_m et T, la courbe est une sorte de conique genre arc d'hyperbole *(courbe du 2e degré).*

Deuxième exemple: la région de saturation eau liquide + vapeur d'eau *(on est bien au-dessous de la température de dissociation de l'eau)*

1 élément, 2 phases
$V = (1 + 2) - 2 = 1$

ce système est monovariant la courbe est une droite *(palier de saturation)* et une seule coordonnée suffit à fixer entièrement l'état: T ou encore p, ou encore v_m.

Troisième exemple: lorsqu'il y a les trois phases en présence, glace, eau, vapeur,

$V = (1 + 2) - 3 = 0$

le système est invariant: c'est le point triple

t 0.0072°C
p 0.46 cm de Hg

C'est un point $\frac{\text{degré}}{\text{zéro}}$ pas de droite $\frac{\text{degré}}{\text{un}}$ ni de conique $\frac{\text{degré}}{\text{deux}}$

N° 166. *Application des deux premiers principes de la thermodynamique.*

Dans des phénomènes en apparence bien étrangers à la chaleur et aux gaz: en électricité, magnétisme, électro-capillarité, élasticité, piles, etc...... lorsqu'on peut exprimer l'énergie interne et l'entropie à l'aide de la température et d'une autre variable, *d'écrire que leurs différentielles sont exactes donne parfois des formules inattendues.*

Proposons-nous à titre d'exemple en restant dans le domaine de la chaleur classique de retrouver l'équation de Clapeyron pour les changements d'états *(ce qu'au N° 147 nous avons fait par le cycle de Carnot).*

Soient m grammes de liquide à température T

L sa chaleur latente *(de vaporisation pour fixer les idées)*

et $\Delta v_{1gr.}$ = l'augmentation de volume spécifique pour la vaporisation totale (*$\Delta v_{1gr.} = 1645$ cm³/gr pour l'eau*).

Si ces m grammes sont portés de T à T + d T degrés, si C_p est la chaleur spécifique et si le titre en vapeur est x

$$d\,Q_m \quad m\,C_p\,d\,T \;+\; \frac{d\,v_m}{m\,\Delta\,v_{1\,gr}} \quad (\,L\,m\,)$$

calories pour réchauffer l'eau	titre en vapeur	chaleur si la vaporisation était totale.

Formons $d\,U_m$ et $d\,S_m$

$$d\,U_m = E\left(m\,C_p\,d\,T + mL\,\frac{d\,v_m}{m\,\Delta\,v_1}\right) - p\,dv_m$$

$$d\,S_m = \frac{m\,C_p\,d\,T}{T} + \frac{L\,m\,dv_m}{m\,\Delta\,v_{1gr}T}$$

Une différentielle est exacte lorsque le coefficient de la première variable est la différentielle partielle corres-pondante

$$d\,F = \left(\frac{\delta F}{\delta x}\right) dx + \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right) dy\,.$$

Comment reconnaître que la différentielle d F est exacte; vu que *l'ordre des différentiations n'affecte pas la valeur des dérivées.*

(voir cours d'Analyse)

il suffit de différentier le coefficient de dx par rapport à y et de voir s'il est égal au coefficient de dy différentié lui par rapport à x

Appliquons cette règle à $d\,U_m$ et à $d\,S_m$.

$$d\,U_m = \quad m\,C_p\,)\,d\,T + \left(\frac{m\,L\,E}{m\,\Delta v_1} - p\right) dv_1$$

$$d\,S_m = \left(\frac{m\,C_p}{T}\right.\;d\,T + \left(\frac{Lm}{m\,\Delta v_1\,T}\right) dv_m$$

$$\frac{\delta(E\,m\,C_p)}{\delta\,v_m} \qquad \frac{\delta}{\delta T}\left(\frac{m\,L\,E}{m\,\Delta v_1} - p\right)$$

$$\text{et} \quad \frac{\delta\left(\frac{m\,C_p}{T}\right)}{\delta\,v_m} \qquad \frac{\delta}{\delta T}\left(\frac{L\,m}{m\,\Delta v_1\,T}\right)$$

E équivalent mécanique de la calorie, C_p et m ne dépendent pas du volume; donc

$$\frac{\delta(E\,m\,C_p}{\delta v_m} \qquad \frac{E}{\Delta\,v_{1gr}}\frac{\delta L}{\delta T} - \delta_I$$

De même, m, C_p et T ne dépendent pas de v_m

$$\frac{\delta\left(\frac{m\,C_p}{T}\right)}{\delta\,v_m} = \qquad \frac{1}{\Delta\,v_1}\left(T\,\frac{\delta L}{\delta T} - L\,\underset{=1}{\frac{\delta T}{\delta T}}\right)\frac{1}{T^2}$$

En tirant $\frac{\delta L}{\delta T}$ des deux équations,

$$r \frac{\delta p}{\delta T} = \frac{L}{T}$$

d'où finalement *(comme au Nº 147)*

$$\frac{\delta p}{\delta T} = \frac{E\ L}{T\ \Delta\ v_{1\,gr.}}$$

Nº 167. *Le théorème de Nernst* sur la chaleur *(ou 3e principe de la thermodynamique).*

Nous avons vu *(au Nº 154) l'équation de Thomson* $U = F - T\left(\frac{\delta F}{\delta T}\right)_V$ qui relie l'énergie interne U à l'énergie libre F *(fonction de Helmholtz).*

Partons de *l'équation de Kirchhoff* qui relie l'accroissement d'énergie interne à la diminution des chaleurs spécifiques.

Soit Q la *chaleur d'une réaction par gramme* lorsqu'elle a lieu *à T degrés sans changement de volume (comme dans la bombe de Berthelot par exemple).*

Si c est la chaleur spécifique du système *avant* la réaction *(of the reactants) et qu'après* la réaction le nouveau système ait une chaleur spécifique c' *(of the resultants).*

Kirchhoff a montré que

$$\frac{d\,Q}{d\,T} = c - c'$$

Considérons pour cela les "réactants" à (T) degrés et les "résultants" à (T + d T) degrés:

On peut passer d'un état*(initial)* à l'autre *(final)* de deux façons:

I) ou bien chauffer les "réactants" de T à T + dT, puis produire la réaction à la température supérieure T + dT, de la sorte les"résultants" sont formés à cette température supérieure et la chaleur de réaction est Q + dQ.

II) ou bien encore produire la réaction à la température T, les "résultants" étant formés à la température inférieure T, avec une chaleur de réaction Q; puis on chauffe de T à T+dT les "résultants".

Vu que *le volume est constant,* il n'y a pas de travail d'expansion ou de compression, la chaleur produite est donc *"équivalente"* à la perte d'énergie interne*("égale si en unités énergétiques, ce que nous ferons).*

Et comme l'état initial et l'état final sont les mêmes dans les deux manières de passer de l'un à l'autre, la différentielle exacte dU est la même

$dU = \boxed{dQ} - p\,dv$; mais $dv = 0$, donc $\boxed{dQ}$ sera aussi la même dans les deux cas. $\boxed{dQ}$ représentant ici la *variation totale* de chaleur: c d T + la chaleur de réaction et *non pas* la différence de chaleur de réaction.

$$\boxed{c\ d\ T + (\ Q + d\ Q\ )} = \boxed{Q + c'\ d\ T}$$

d'où $c - c' = \frac{dQ}{dT}$ *(qui est l'équation de Kirchhoff annoncée plus haut)*

$(-)\ \left(- \frac{dQ}{dT} \right) = \frac{dU}{dT}$ puisque vu l'absence de tra-

vail extérieur, la perte d'énergie interne coincide avec la chaleur dégagée dans la réaction $-\Delta U = \Delta Q$ et leurs dérivées par rapport à la température aussi égales.

Ce que s'est proposé Nernst, c'est *de déterminer l'énergie libre F (liée à U par l'équation de Thomson) lorsque U est connu en fonction de la température* d'après les chaleurs spécifiques, elles mesurables et l'objet de nombreux mémoires Dulong et Petit, Einstein, Debye, Eucken......

Comme dans toute intégration d'équation différentielle, il y aura une constante arbitraire qui s'introduit dans l'équation intégrale *(voir Cours d'Analyse)*.

Nernst pour fixer la constante émet l'hypothèse que *"le système est tel qu'il peut être refroidi jusqu'au zéro absolu de façon continue, c'est-à-dire: sans qu'aucune partie du système ne subisse un changement radical à une certaine température:* pas de congélation par exemple, ni de transformation d'un système cristallin en un autre si le système est allotropique".

Cette hypothèse signifie que la *chaleur spécifique* du système est *une fonction continue de la température* et peut en conséquence *être exprimée par un polynôme entier en T (somme de puissances entières de T)*

Et puisque l'équation de Kirchhoff nous donne la dérivée de l'énergie interne comme différence des chaleurs spécifiques après et avant la réaction, cette dérivée de l'énergie interne peut donc elle aussi être exprimée par un polynôme en T *(puisque différence de deux polynômes entiers en T)*

$$U \quad U_0 + a\,T + b\,T^2 + f\,T^3 + g\,T^4 +$$

a, b, f, g,....etc...étant connus expérimentalement comme figurant *dans les variations de l'énergie interne,* variations connues elles; mais U_0 n'étant pas calculable, car la *valeur absolue de l'énergie interne n'est pas connue.*

Remplaçons U par son expression tirée de l'équation de Thomson:

$$F - T\left(\frac{dF}{dT}\right)_v = U_0 + a\,T + b\,T^2 + f\,T^3 + \ldots\ldots$$

Mais *(voir cours d'Analyse sur la dérivée d'un quotient):*

$$d\left(\frac{F}{T}\right) = \frac{1}{T^2}\left(T\frac{dF}{dT} - F\frac{dT}{dT}\right) = \frac{1}{T^2}\left\{T\frac{dF}{dT} - F\right\}$$

le premier membre n'est donc pas autre chose que

$- T^2 d\left(\frac{F}{T}\right)$; d'où l'on peut écrire encore:

$$- T^2 d\left(\frac{F}{T}\right) \quad U_0 + a\,T + b\,T^2 + f\,T^3 +$$

ou
$$d\left(\frac{F}{T}\right) = -\frac{U_0}{T^2} - \frac{a}{T} - b - f\,T - g\,T^2 \cdot \ldots\ldots$$

d'où, en intégrant $\frac{F}{T} = a + \frac{U_0}{T} - a\log_e T - bT - \frac{f}{2}T^2 - \frac{g}{3}T^3 -$

(A étant constante arbitraire d'intégration)

$$\text{et } F = U_0 + AT - a\,T\log_e T - bT^2 - \frac{f}{2}T^3 - \frac{g}{3}T^4 - \ldots\ldots$$

$$U = U_0 + a\,T + b\,T^2 + f\,T^3 + g\,T^4 + \ldots\ldots$$
$$F = U_0 + AT - a\,T\,\log_e T - b\,T^2 - \frac{f}{2}\,T^3 - \frac{g}{3}\,T^4 -$$

d'où $\frac{dU}{dT}$ $2\,b\,T + 3\,f\,T^2 + 4\,g\,T^3 + \ldots\ldots$

$$\frac{dF}{dT} = A - a\,(1 + \log_e T) - 2\,b\,T - \frac{3f}{2}\,T^2 - \frac{4g}{3}\,T^3 - \ldots\ldots$$

Que prévoyons-nous pour le zéro absolu? $T \to 0$? d'après nos polynômes

$$\left(\frac{dU}{dT}\right)_{T\to o} = \to a \quad ; \qquad \left(\frac{dF}{dT}\right)_{T\to o} = \to \infty$$
$$(\,U\,)_{T\to o} = \to U_o \quad ; \qquad (\,F\,)_{T\to o} = \to U_o$$

Il semble anormal que la dérivée de l'énergie libre prenne une valeur infinie au zéro absolu au lieu d'être finie comme la dérivée de l'énergie interne. Remarquons que cette infinitude bizarre provient du terme logarithmique

$$\log_c\,0 = \infty$$

Pour que cette bizarrerie disparût, il suffirait de supposer $a = o$, car alors le terme logarithmique parti, la dérivée de l'énergie libre de Helmholtz ne serait plus infinie au zéro absolu.

Essayons, retouchons nos formules, en y faisant $a = o$

$$\frac{dU}{dT} = 2\,b\,T + 3\,f\,T^2 + 4\,g\,T^4 + \ldots\ldots$$

$$\frac{dF}{dT} \quad A - 2\,b\,T - \frac{3f}{2}\,T^2 - \frac{4g}{3}\,T^3 -$$

L'idée directrice de Nernst est que les fonctions U énergie interne et F énergie libre ont la même "allure" au voisinage du zéro absolu, et pour cela il annule aussi A; les fonctions deviennent alors:

$$\frac{dU}{dT} = 2\,b\,T + 3\,f\,T^2 + 4\,g\,T^4 + \ldots$$

$$\frac{dF}{dT} = -2\,b\,T - \frac{3}{2}\,f\,T^2 - \frac{4g}{3}\,T^3 -$$

$$U = U_o + b\,T^2 + f\,T^3 + g\,T^4 +$$
$$F = U_o - b\,T^2 - \frac{f}{2}\,T^3 - \frac{g}{3}\,T^4 +$$

N° 168. Les théorie et expérience de Debye et Eucken exigeant que, pour les *"basses"* températures, les *chaleurs spécifiques varient comme T^3*, donc dU/dT varie comme T^3, il faut encore aux basses températures annuler b et f; alors

$$U = U_0 + g\,T^4 + \ldots\ldots$$
$$F = U_0 - \frac{g}{3}\,T^4 - \ldots\ldots$$

(le lecteur est renvoyé pour plus amples détails au livre de Nernst, le meilleur classique de Thermochimie.)

N° 169. La transformation du soufre de la variété rhomboédrique en la monoclinique.

Bornons-nous à la partie principale des formules de Nernst *(il ne s'agit pas de basses températures donc ne prenons pas celles de Debye)* ;

$$U = U_0 + b\,T^2$$
$$F = U - b\,T^2$$

formules de Kirchhoff-Thomson-Nernst.

$$\frac{dU}{dT} \quad c' - c = 2\,b\,T \quad - \frac{dF}{dT}$$

(l'égalité de deux valeurs opposées ayant lieu quand elles sont nulles, $2\,b\,T = 0$, donc au zéro absolu).

Connaissant {c chaleur spécifique du soufre shomboédnique à diverses temp. {c' " " " " monoclinique,

on tire $\boxed{b = 1.15 \times 10^{-5}}$

En mesurant la chaleur de transformation et utilisant la formule $U = U_0 + (1.15 \times 10^{-5})\,T^2$, on peut calculer U_0.

Pour un grand intervalle des températures

$$U = 1.57 + (1.15 \times 10^{-5})\,T^2$$

Donc $F = 1.57 - (1.15 \times 10^{-5})\,T^2$ si la théorie est approchée.

A la température de transformation allotropique, il y a équilibre entre les deux formes, ce qui signifie que le potentiel thermodynamique sous pression constante doit être le même pour les deux variétés.

$\boxed{\Phi = F + pv}$ exactement comme suivant Gibbs *(Nº 157)* il était le même pour la phase liquide et la phase vapeur en équilibre dans la région de saturation.

Comme ici la variation de "pv" est négligeable, il faut que $\boxed{F}$ ait la même valeur pour les deux variétés ou que *sa variation soit nulle; et si à la température de transformation* les potentiels relatifs à chacune des variétés sont nuls la variation est aussi nulle et

$$T^2 = \frac{1.57}{1.15 \times 10^{-5}} = \boxed{369^{\circ}.5}$$

La température de l'expérience étant $\boxed{368.4}$, la théorie de Nernst est très acceptable.

Problème 81: Appliquer la formule de Poiseuille *(Nº 79)* dans le cas d'un liquide incompressible: eau: $\eta = 0.01$; R rayon intérieur du tube 1/4 pouce; l longueur du tuyau 100 pieds; différence des pressions *(amont-aval)* = 4000 lbs/po²; quel est le débit?

Réponse: $0.045\ \frac{\text{pieds cubes}}{\text{seconde}}$

Problème 22.: A quelle hauteur s'élève un liquide dans un tube capillaire cylindrique qui est bien mouillé par lui ?

Tension superficielle: 75 ergs/cm² ou dynes/cm ; diamètre moyen intérieur mesuré au micromètre oculaire *(moving microscope)* 1/40 de mm = 1/400 de cm

Réponse: 61 cms.

Problème 23.: Comment déduire la tension superficielle d'un liquide qui mouille le verre avec un compte-gouttes bien propre?

Si le poids moyen de 100 gouttes tombées "tout bellement" sans précipitation est: 0 gr.705

Le rayon intérieur moyen étant de 1/20 de cm.

Réponse: T ou S = 22 $\frac{\text{ergs}}{\text{cm}^2}$ = 22 $\frac{\text{dynes}}{\text{cm}}$; donc il s'agit d'alcool pur *(à 95%)*

Problème 24: Quelle est l'énergie interne d'une livre d'eau *liquide* à 100 degrés Fahrenheit, si l'on suppose nulle l'énergie interne de l'eau liquide à 32° Fahrenheit.

Dans les tables on donne les vol. spéc. de l'eau: 0.0161 pied cube/livre à 100° contre 0.0160 à 32° *(donc on négligera la dilatation)*.

Réponse: $52881 \left\{ \frac{\text{livre pieds}}{\text{livre d'eau liquide}} \right\}$

(Se servir des tables ou prendre pour chaleur spécifique de l'eau (1-0.00044) B.T.U./livre)

Problème 25: Quelle est l'énergie interne de la vapeur sèche à 300° Fahrenheit et à la même températute si le titre est x=1/2 *(même zéro des énergies internes que dans le problème précédent)*

(Les tables donnent: chaleur de l'eau liquide à 300ºF. 269.6 B.T.U./livre

chaleur latente de vaporisation à 300ºF 909.5 B.T.U./livre

volume spécifique de l'eau 0.0174 pieds cubes/livre d'eau; 6.46 pieds cubes/livre de vapeur sèche

pression 67 lbs/po²; 1 B.T.U. = 777.5 livrexpieds.

(Vu la faible variation du volume spécifique de l'eau, on pourra admettre la règle de trois et dire que l'eau s'est dilatée sous la pression moyenne de 33.5 lbs/(po)²)

Réponse: $684.47 \frac{\text{B.T.U.}}{\text{lb.au titre 1/2}}$

Problème 26: Traduisez la constante moléculaire gramme des gaz et l'équation de Robert Mayer en unités britanniques *(livre poids degré Fahrenheit)* livre-pied, livre/(pied)², soit le système F.S.S. page 7 tome I)

Réponse 1ère: $3.644 \frac{\text{livre pieds}}{(\text{mol})(\text{degré Fahr})}$

Réponse 2ème: $C_p - C_v \frac{\text{B.T.U.}}{(\text{livre})(\text{degré F.})} = \frac{4.7}{M} \times 10^{-3}$

Problème 27: Quel est le volume occupé par 7 livres d'oxygène moléculaire *(diatomique)* sous une pression de 3 atmosphères et à la température de 80.6 F.
(1 livre d'oxygène à 32º F. et sous une atmosphère occupe 11.204 pieds cubes)

Réponse: 28.72 pieds cubes.

Problème 28: Deux gallons d'oxygène **moléculaire** diatomique et deux gallons d'hydrogène moléculaire diatomique se combinent pour former de la vapeur d'eau. Quel est le volume total recueilli?

Réponse: 3 gallons.
Note: Ceci est très important dans la théorie des moteurs à combustion interne. Du fait qu'il y a *réaction, il y a toujours contraction partielle* et il serait fantaisiste de ne pas tenir compte de cette contraction et traiter le mélange initial comme le final.
Les chaleurs spécifiques moyennes des "réactants" *(qui sortent du carburateur et des "résultants" qui vont travailler et être rejetés sont souvent peu différentes).*

Mais *vu la contraction* on ne peut traiter le cycle comme un cycle de gaz parfait; si la pression calculée sans compter la contraction est p , la pression réelle sera les 3/4 p, si comme dans le problème actuel le volume des "résultants" est à "égalité de pression et de température" les 3/4 du volume des "réactants" dans l'équation de carburation.

Problème 29: La chaleur de combustion du charbon pur est de 8×10^6 B.T.U./tonne charbon si la ventilation étant insuffisante le produit de combustion est l'oxyde de carbone.
Si la combustion était complète grâce à une soufflerie *(blower)*, le produit formé serait de l'anhydride carbonique et la chaleur de combustion serait de $29\times10^6 \frac{\text{B.T.U.}}{\text{tonne charbon}}$

Quelle est la chaleur de combustion que donnerait une tonne du premier produit (CO) si on le recueillait pour lui faire achever sa combustion.

Réponse: $9\times10^6 \frac{\text{B.T.U.}}{\text{tonne de CO}}$

Problème 30: Quelle doit être la section droite de la gorge d'un détendeur de façon que 50 livres de vapeur à 160 lbs/(po)^2 surchauffés de +100°F. passent *à la minute* dans l'air libre $(14.7 \frac{\text{livre}}{(\text{pouce})^2})$?

Réponse détaillée: La table *(ou le diagramme)* donnent pour les conditions initiales par livre:

$$S = 1.6292;\ I = 1251.3;\ (t = 463.6\ F.)$$

(On admet que la pression au droit de la gorge est les $\frac{58}{100}$ de la pression initiale lorsque le quotient de la pression finale à la pression initiale est moindre que 0.58)
La pression à la gorge serait donc $160\times0.58 = 92.8 \frac{\text{lbs}}{(\text{po}^2)}$
et à entropie constante, la vapeur est encore surchauffée de

30° environ (donc t = 363° F.) et la chaleur totale est tombée à 1201,5 le volume spécifique de la vapeur *(surchauffée)* étant 4.98.

Chute de chaleur totale: 1251.3 − 1201.5 = 50 B.T.U. = 1/2 M V²

Vitesse: $= \sqrt{2(32.2)(50)\ 777.5} = 1580\ \frac{\text{pi.}}{\text{sec}}$

volume passant par seconde: $\frac{50}{60} \times 4.98 = 4.15\ \frac{\text{pieds cubes}}{\text{seconde}}$

Section droite: $\frac{4.15}{1580} \times 144 = 0.38$ pouce carré *au minimum*

Problème 31: Un aviateur est dans un nuage qui se forme. Au sol le baromètre marque 75 cms.5 ; l'aviateur téléphone au sol que la pression doit être 69.5 cms où il se trouve.

Si le thermomètre au sol marque 31° centigrades, quel est le point de rosée au sol?

Portion de table nécessaire au problème *(table de Regnault)*

23°C	2.09 cms	de pression	maximum	de vapeur.
24°C	2.22 cms	"	"	"
25°C	2.35 "	"	"	"
26°C	2.50 "	"	"	"

Admettre que la propagation de *(l'air sec + vapeur d'eau)* est adiabatique et diatomique.

Réponse: Si l'on refroidissait à 25°.5 C l'air au sol, la rosée perlerait.

Problème 32: Calculez l'entropie de la vapeur d'eau à 200° F. titre 3/4 *(prenant pour nulle l'entropie de l'eau liquide à 32º Fahrenheit)*

Les tables donnent: chaleur de l'eau à 200°F: $167.94\ \frac{\text{B.T.U.}}{\text{lb d'eau}}$

chaleur latente de vaporisation à 200° Fah:

$$977.8\ \frac{\text{B.T.U.}}{\text{livre entièrement vaporisé}}$$

(l'entropie de l'eau *et de la* vapeur sèche *sont aussi données en unités calorifiques permettant de vérifier le calcul direct avec chaleur spécifique de l'eau = 1)*

Réponse: 0.2926 (pour chauffage de l'eau) + 1.1116 (pour vaporisation aux 3/4) = 1.4042 *(avec la table on aurait 1.4053)*

Problème 33: Appliquez l'équation de Clapeyron au problème suivant:

Un corps fond à 72°5 sous une pression de une atmosphère
à 72°6 " " " " 6 "
à 72°7 " " " " 11 "

En fondant, chaque gramme augmente de 0 cm³ 05 *(contrairement à la glace qui, elle, diminue)*. Si à cette température l'équivalent mécanique de la calorie-gramme d'eau-degré centigrade est 4.19 joules, quelle est la chaleur latente de fusion de ce corps en calories/gramme fondu *à cette température.*

Réponse: $20.89\ \frac{\text{calories}}{\text{gr. complètement fondu}}$

Problème 34: Le laminage de la vapeur *(throttling)* ou transformation *à chaleur totale constante (certains disent à chaleur interne constante).*

Si de la vapeur est à 200 $\frac{lbs}{po^2}$ de pression, au titre en vapeur $\frac{99}{100}$ et passe à travers une valve qui "l'étrangle" *(la lamine)*, quelle est la pression sous laquelle la vapeur doit être lâchée par la valve de façon qu'elle soit sèche *(titre 1, dryness 100/100, quality 100/100).*

Réponse: Avec une table *(ou mieux un diagramme)* on voit que la chaleur totale de la vapeur mouillée "incidente" est de 1189.668 B.T.U./livre et la vapeur *sèche* qui a la même chaleur totale est à la pression de 121 lbs/(po²) donc la pression doit tomber de 200 à 121 *(et la température de 381.9 à 341.9 F.)*

Problème 35: Le débit d'un détenteur de vapeur.

De la vapeur à 100 $\frac{livres}{(po^2)}$ surchauffée de 60°F., est détendue et tombe à 2 $\frac{livres}{(po^2)}$; quelle est la vitesse finale? *(supposant la détente adiabatique).*

Réponse détaillée: Pour 100 livres, surchauffe 60°, la chaleur totale est 1219.1 B.T.U. et l'entropie 1.6420

Sous 2 livres de pression l'entropie de l'eau est 0.1749 et celle de la vapeur sèche 1.918; les chaleurs totales étant 94.0 et 1115.0, cherchons x le titre en vapeur *(la détente étant isentropique)*. x 1.918 + (1-x) 0.1749 = 1.6420

0.8416|

Alors la chaleur totale est 1115 (0.8416) + 94 (1-0.8416)= 953.3

La chute de chaleur totale est donc

121.9.1 - 953.3 = 265.8 B.T.U.= 206660 livres pieds

L'énergie cinétique étant 206660 $\frac{livre\ pieds}{livre}$, la vitesse est donc

$$V = \sqrt{2(32.2)(206660)} = 3650 \frac{pieds}{sec.}$$

Problème 36: (purement graphique): Utiliser le diagramme de Mollier relatif à CO_2 *(fin du livre Heat and Thermodynamics, Roberts, Blackie)*

Hypothèses: Température du condenseur *(eau courante 25ºC.)*
CO_2 complètement liquéfié et refroidi à cette température.

Température du réfrigérant *(saumure)* - 10°C.

Vapeur *sèche* lorsqu'admise au compresseur *(titre 1)* ; rendement frigorifique *"coefficient of performance"* 4.5_5 avec valve laminante.

Problème 37: A la température de 280° absolus*(centigrade ou Kelvin)* une solution à 1% de sucre de canne $C_{12}H_{22}O_{11}$ a une "pression osmotique" de 50.5 cms de mercure.
Sachant que le poids moléculaire de ce sucre est 342 $\frac{grs}{\ldots}$

et qu'une solution à 1% signifie "le centième d'une molécule gramme dans un centimètre cube".

Quelle est la constante moléculaire de cette solution parfaite?

Réponse: 8.41×10^7 *(pour un gaz parfait* 8.36×10^7*)*

CHAPITRE VII

Electromagnétisme : effet moteur, induction, champ des courants.

En première année, nous avons vu l'*"Electricité"* continue en régime permanent et le *"Magnétisme"* des aimants et du fer doux. Nous devons maintenant jeter un pont entre ces deux domaines et au plus vite voir leur parenté *(connue depuis les travaux du "Newton de l'Electricité" que fut André-Marie Ampère)*.

Un mot d'Histoire:

Volta *(Alexandre)* inventa la pile: premier générateur du "courant" électrique OErsted*(Jean-Christian)* approchant une "boussole" d'un fil conducteur parcouru par un courant de pile fut surpris de la voir "se mettre en croix" avec le courant: c'était la première fois que l'on apercevait une force qui ne soit pas dirigée suivant la droite qui joint les centres d'action.

(André-Marie) Ampère fut le premier à trouver une loi"élémentaire" pour expliquer les actions électromagnétiques produites par une petite longueur de courant. Puis, *(Jean-Baptiste)* BIOT et *(Félix)* Savart étudiant le champ magnétique créé par un courant en forme de V suivant la bissectrice du V trouvèrent une loi "globale" que*(Pierre-Simon)* Laplace sut traduire en loi "élémentaire""à son tour.

Enfin *(Michael)* Faraday et *(Joseph)* Henry trouvèrent l'induction *(indépendamment)*.

Comme nous le verrons à la fin du chapître, en guise de synthèse, la formule d'Ampère est logiquement préférable;mais *pour une premiere exposition celle de Laplace est plus simple (mathématiquement)*.

Plan du chapitre:

Chaque fois que la chose est possible, il est bon de pouvoir déduire l'une de l'autre les diverses formules d'une même branche de la science; c'est ce qu'a réussi pour l'électromagnétisme*(dans son Cours en Sorbonne)*mon maître Fabry*(Charles)*.

Le plan général de ce chapître sera donc presque le même que celui des "Eléments d'Electricité" *(C.Fabry,A.Colin)*et que les "chapîtres V et VII de la Physique de l'Ecole Polytechnique" *(C.Fabry, Gauthier-Villars)*. *(Le lecteur est prié de relire d'abord les chapitres XXI et XXII du tome I)*.

SOMMAIRE du chapître VII: L'effet moteur: loi élémentaire de Laplace *(que l'on appelle aussi loi vectorielle)*; loi globale de l'effet moteur *(dite également loi scalaire ou "expression énergetique de l'effet moteur")*. Convention de signe *(de Maxwell)* pour les flux. Equivalence d'une bobine à un aimant du point de vue de l'effet moteur. Loi de Rowland.

Le *self-champ des courants:* loi élémentaire de Laplace, champ d'un courant rectiligne, d'un courant circulaire, de toute une bobine suivant son axe.

Théorème d'Ampère sur la "force magnétomotrice" de la pile magnétique qu'est une bobine électrique.

Electrodynamique *(champ des courants sur les courants)*.

LES COURANTS INDUITS loi globale et loi vectorielle.

Induction mutuelle. Feuilletage des induits *(courants de Foucault)*. Effets de la self induction lors de la fermeture et de l'ouverture des circuits continus. Energie emmagasinée par le champ magnétique. Le galvanomètre balistique et les courbes d'Hystérésis, la quantité d'électricité induite indépendante de la vitesse de variation du flux.

**Note I (destinée à préparer la théorie de Maxwell comme la note IV):* La force magnétomotrice déduite de la théorie des potentiels et la formule de Neumann pour les coefficients d'induction mutuelle.

Note II: Rhéostat de démarrage des moteurs.-Soufflage des arcs continus.- Electro-aimants.- Bobine d'induction.- Calcul d'un circuit magnétique.

**Note III:* Les particules électrisées dans un champ magnétique et dans un champ électrostatique: *(en admettant par avance l'analogie des effets d'un champ E sur une charge (q) et d'un champ H sur un pôle nord unité (m)*. Les systèmes d'unités en électricité, un tableau de passage.

**Note IV:* Le courant de déplacement dans un isolant *(Maxwell Clerck)*. La "densité de courant" et la traduction analytique du théorème d'Ampère et de la force électromotrice d'induction.

Note V: Les débuts de l'Electrodynamique.

No170. *Loi de Biot-Savart-Laplace sur l'effet moteur: (appelée souvent deuxième loi de Laplace ou encore loi élémentaire vectorielle). (fig. 127)*

Supposons un petit chariot *(un crayon de cuivre bien propre)* mobile sur deux rails conducteurs et un électroaimant *(ou un aimant permanent de grandes dimensions)*.

Le chariot et les rails seront de substance *non magnétique (tel que cuivre ou laiton)* autrement ils se colleraient sur les pôles de l'électro. Ils doivent être *conducteurs de l'électricité* donc métalliques.

La pile qui entretient le magnétisme de l'aimant est dite pile *"excitatrice"* et celle qui traverse le chariot mobile est dite pile *"motrice"* celle aux dépens de qui le moteur va travailler mécaniquement.

Le courant moteur traverse le chariot mobile dans le sens PQ suivant la longueur 1 centim. *(inter-rail)*: voir No185, tome I.

Pile
motrice
destinée à
vaincre les
frottements,
l'effet Joule,
et la force contre-
électromotrice du
moteur.
+
−
force
chariot mobile non magnétique
P
Q
ℓ
N
S
H
fer doux
rail
non magnétique
rail
non magnétique
ligne d'aimantation
ligne d'aimantation
+
−
Pile
excitatrice
entretenant le
magnétisme.
Electroaimant

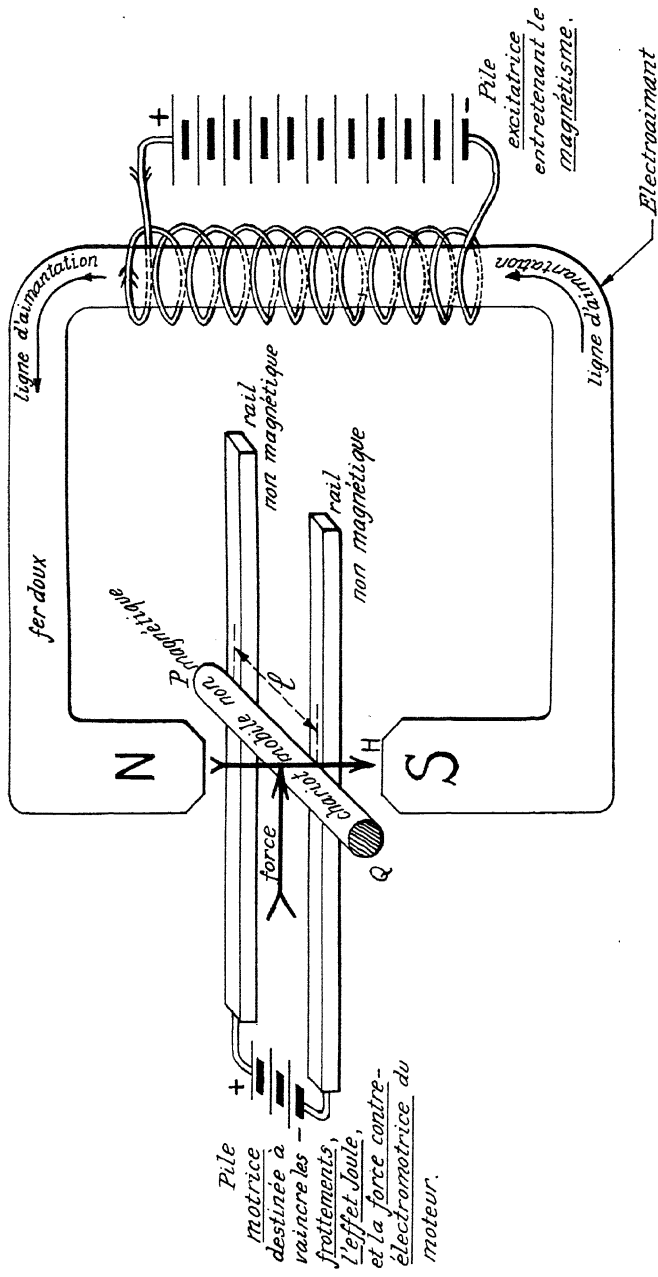



Fig. 127

Le champ magnétique H de l'électro *(voir No. 223 tome I)* va *du pôle nord* de l'épanouissement polaire N à *l'autre corne S (c'est en réalité le vecteur induction B ou champ dans l'entrefer No 224)* mais pour ce qui nous intéresse actuellement, c'est tout simplement un champ magnétique *(que nous apprendrons bientôt à mesurer)* dont nous pouvons prévoir *le sens* en tournant *avec un tire-bouchon dans le même sens que le courant d'excitation, la translation du tire-bouchon indiquant le sens des lignes d'aimantation.*
On constate que le chariot se déplace vers la droite avec les pôles marqués sur la figure.

Maintenant figurons sur un schéma en projection ce que la figure précédente donnait en perspective. *(fig. 128)*

En projection horizontale, le champ magnétique étant vertical descendant sera ⊗ H ; le courant ⇓ i ; la force électromagnétique qui prend naissance ⟶ F

Si le champ est évalué en *"gauss" (No 218 tome I)* le courant en *ab-ampères (dizaine d'ampères)* et l' interrail en *centimètres,* la force est en *dynes:*

$$= \Downarrow il \times \overset{\otimes}{H} \qquad \underline{H_\ell} \quad il$$

(vecteur force en "dynes") (axe courant × longueur en *(ab-ampères × cent.)*) (produit vectoriel) (vecteur champs en gauss)

"l" indique *la direction,"i"* fixe le *sens* sur cette direction et le produit "i l" a la même symétrie qu'un axe *(ou vecteur des rotations)(les élèves nouveaux trouveront, No 115 p. ex. au tome I des exemples de produits vectoriels).*

Règles classiques (antérieures au calcul vectoriel):

1) la règle du bonhomme d'Ampère

2) la règle des trois doigts de Fleming

1) Si un observateur ayant le bras *droit* étendu *latéralement et horizontalement reçoit le courant moteur par les pieds* et le renvoit par les cheveux; et si le *champ magnétique* normal au courant *lui pénètre par le nez,* son bras indique le sens de la force de l'effet moteur.

2) Main *droite* ordre: pouce, index, medius *(ordre dans lequel un enfant se suce les doigts),* ordre alphabétique: *champ normal, chemin, courant (si les trois doigts forment un trièdre trirectangle).*

Le lecteur verra que ces deux règles sont comprises dans le produit vectoriel.

Exercice: A l'aide des trois règles, vérifier que d'"inverser" soit le courant, soit le champ, inverse le sens de la force; et que d'inverser *à la fois* les courants moteurs et d'excitation conserve le même sens à la force.

N.B: Quand on n'emploie pas la règle vectorielle, il ne faut pas oublier d'écrire l'indice "n"*(normal)* à droite et en bas du symbole du champ: H_n

C'est que seule la *composante* du champ *normale* au plan des rails donne du travail, nous écrirons toujours cet indice dans ce chapître, même avec la règle vectorielle, ce ne sera pas un "pléonasme vicieux".

$$\underbrace{i\ell}\quad\underbrace{\times}\quad H_n$$

force(*dynes*) = (*courant* × *longueur* / *en ab-am×cm.*) produit vectoriel (champ normal en gauss)

Si le champ de l'électro n'est pas normal au courant, il faut le décomposer en deux vecteurs et ne prendre que la composante normale la seule utile au mouvement.

Le nombre de dizaines d'ampères étant le dixième du nombre d'*ampères, si le courant est exprime en ampères,* il faudra écrire

$$F = \frac{i_{amp.}\ell}{10} \times H_n$$

No 171. Loi globale de l'effet moteur *(expression énergétique ou scalaire).*

La loi élémentaire vectorielle ne s'applique qu'à un élément rectiligne de circuit de dimensions assez petites pour que le champ magnétique dont il coupe les lignes soit uniforme.

Autant dire de suite que ce n'est qu'un cas d'exception. D'autre part, le calcul vectoriel n'est pas des plus familiers aux électriciens.

L'étude du travail accompli par la force électromagnétique va nous permettre d'éviter le calcul vectoriel grâce à la notion de flux de vecteur et d'obtenir une formule globale pour tout le circuit.

Soit donc en projection le petit moteur de translation de la figure précédente avec les mêmes sens de courant moteur et du courant d'excitation.

Appelons Δx le chemin parcouru entre l'époque t et l'époque $t + \Delta t$

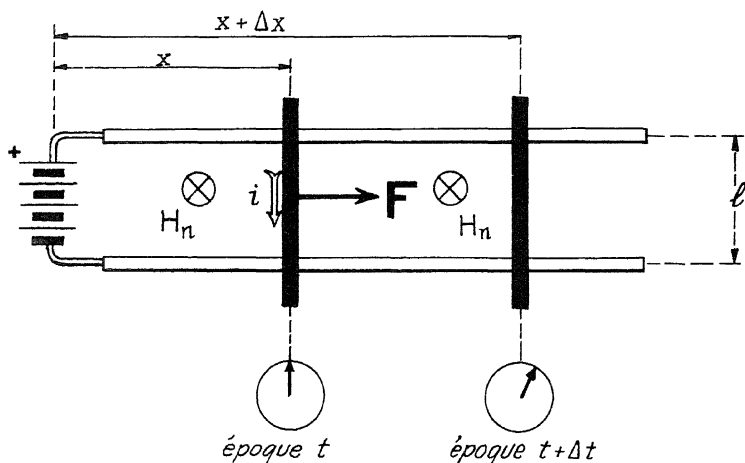



Fig. 128

travail=produit scalaire *(dot product)* de la force par le chemin

$$\boxed{A \text{ ergs}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta x}$$
$$= \Downarrow i \; l \times \otimes H_n \cdot \overrightarrow{\Delta x} = \boxed{+i \; l \; H_n \Delta x}$$

le travail est positif, moteur, car la force est dans le sens et la direction du chemin.

Et la puissance $\boxed{W \frac{ergs}{seconde} = \frac{A}{\Delta t} = +i \; l \; H_n V}$

$V = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ étant la vitesse du chariot en $\frac{centimètres}{à \; la \; seconde}$.

No 172. Convention de Maxwell sur le signe à prendre pour les flux. L'écossais Clerk Maxwell a indiqué la règle du tire-bouchon: tournant un tire-bouchon qui visse à droite comme tourne le courant d'un circuit, *le champ et son flux seront comptés comme positifs si dans le sens de la translation du tire-bouchon* sur la figure le courant tourne ↻ et le tire-bouchon rentrerait dans le papier ⊗ , donc le champ extérieur qui est dans ce sens sera positif ainsi que son flux.

Scalaire flux initial *(à l'époque t):* $\Phi_t = + Hn (x l)$

scalaire flux à l'époque t+Δt :

$$\Phi_{t+\Delta t} = \Phi_t + (\Delta \Phi)_t^{t+\Delta t} = + Hn (x + \Delta x) \, l$$

Donc $\Delta \Phi = (+ Hn)(+ \Delta x) \, l$

On voit donc que $A = + i \; (\Delta \Phi)$ *travail positif.*

Nous recommandons fortement au lecteur de s'assurer que *dans un moteur la variation de flux est toujours positive.*

Inverser le courant rendrait bien le champ négatif, mais l'aire du circuit diminuant, *(comme la diminution d'une dette est un gain)*, du flux négatif dont la quantité diminue en valeur absolue est une variation positive du flux:

$$- \Phi_t + \Phi_{t+\Delta t} = \Delta \Phi = (- Hn \, x \, l) + (- Hn)(x - \Delta x) \, l$$
$$= \boxed{+ Hn \, l \, \Delta x} \quad (-\text{flux initial} + \text{flux final})$$

No 173. Equivalence d'une bobine à un aimant au point de vue de l'effet moteur. *(fig.129)*

Bobine de n =8 spires parcourue par du courant continu constant et située dans un champ magnétique extérieur H, le self-champ de la bobine étant à (α) du champ extérieur.

Soit a l'aire de section droite d'une spire; le flux *extérieur* qui la traverse est

$$H_n \cdot (a) = (H)(a) \cos \alpha$$

Et si la bobine se meut de façon que α diminue *(ce que montre l'expérience)*, après une diminution de dα, le flux *extérieur* qui traverse une spire est

$$H_n \cdot (a) = (H)(a) \cos (\alpha - d\alpha)$$

La variation de flux est donc: $\Phi_{\alpha - d\alpha} - \Phi_\alpha =$

$$= Ha \, [\cos (\alpha - d\alpha) - \cos \alpha] = Ha \, (\sin \alpha)(- d\alpha)$$

N.B: Il y a bien aussi un flux de self-induction qui traverse les spires, celui qui est dû au courant lui-même qui passe dans les spires de la bobine; mais, comme celui-ci ne varie pas

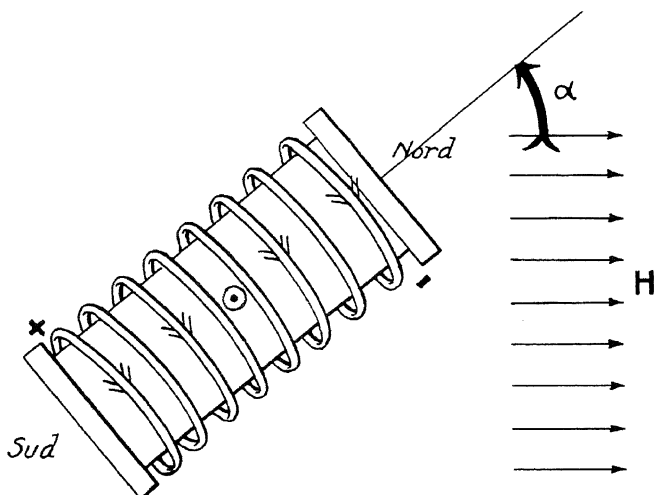



Fig. 129

avec l'angle α étant toujours dirigé suivant l'axe de la bobine et la suivant, *ce flux de self n'intervient pas dans la variation et par suite ne produit pas de couple*

$$d\Phi = Ha\,(\sin\alpha)(-d\alpha)$$

$$\frac{d\Phi}{-d\alpha} = Ha\,\sin\alpha$$

et puisque le travail est électrodynamiquement

$$A = +i\,d\Phi = -i\,Ha\,\sin\alpha\,(d\alpha)$$

et mécaniquement $A = \mathbb{C} \cdot \Delta\Phi = \mathbb{C}\,d\alpha$

(pages 5 et 149, tome I)

Le couple "par spire" doit être $\mathbb{C} = i\,H\,a\,\sin\alpha$
et pour les n spires $\mathbb{C} = -\,n\,i\,a\,H\,\sin\alpha$

Le signe (-) indique que le couple est opposé à l'augmentation de l'écart et que *(page 316. tome I)* tout comme pour un aimant le self-champ tend à se coucher dans le sens du champ extérieur.

Comparant à l'aimant, on voit que la quantité

$$\binom{n}{\text{nombre de spires}}\binom{i}{\text{abampères}}\binom{a}{\text{cms. carrés de section droite}}$$

remplace le moment magnétique $\mathfrak{M}$ dans l'expression du couple qui freine les écarts α d'avec la position d'équilibre.
Règle: Au point de vue des effets moteurs *(et non de ce qui se passe à l'intérieur), une bobine se conduit comme un aimant coaxial* dont le moment magnétique serait

$$\boxed{\mathfrak{M}} \quad n\,i\,a$$

le sens du champ *du S au N par l'intérieur* étant la translation du tire-bouchon qui tourne comme le courant dans les spires.

<u>No 174</u>. Loi de Rowland: une charge électrique positive de q abcoulombs se mouvant à la vitesse de V cms/sec subit *(la même force qu'un élément rectiligne de conducteur parallèle à cette trajectoire si*

1) le sens de V est le même que celui de i

2) si le produit q V = i l

Contentons-nous de vérifier l'homogénéité de cette formule

$$\underset{q}{(\text{ab-coulombs})}\ \underset{V}{\frac{cms}{sec}} \cdot \equiv \underset{i}{(\text{ab-ampères})}\ \underset{l}{(\text{cms})}$$

identité, puisque $\frac{q \text{ coulombs}}{\text{seconde}}$ i ampères *(p.273 tome I)*

$$(i\,t)\left(\frac{l}{t}\right) \equiv i\,l$$

Dans les tubes à vide, cette formule est indispensable.
N.B: Si la charge est négative *(électron ou ion négatif)* changer le sens du courant, c'est-à-dire le supposer dans le sens de - V

$$-qV = q(-V) = -il$$

<u>No175. **Le self-champ des courants**</u>: Quel est le vecteur champ magnétique produit au point P par le petit vermisseau de courant i Δ l?

Utilisant la notion de pôle Nord unité isolé *(tome I, p.310)* nous allons en vertu du principe de l'opposition de sens de l'action à la réaction *ramener ce problème à l'effet moteur.*

Ce que nous cherchons, le champ au point P actué par le fragment C D de courant, c'est: *"l'action que souffrirait un pôle Nord unité qui se trouverait isolé en P".*

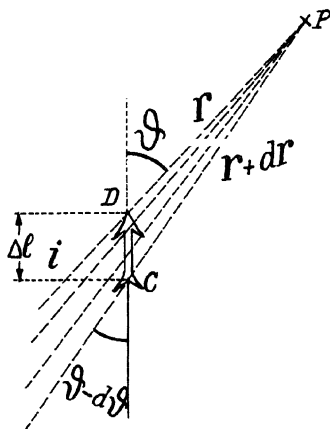



Fig. 130

Mais ce Pôle Nord unité isolé *(dont le conjugué sud est fort loin)* émet, lui, des lignes de champ dans tout l'espace et en particulier dans la région du courant C D.

Et l'intensité du champ magnétique exercée par le pôle N unité en P, dans le voisinage de C D, c'est l'action que souffrirait à cause de lui un autre pôle Nord unité N' situé entre C et D, action Newtonienne *(centrale)* connue depuis Coulomb *(Nos.218, 219, tome I)*.

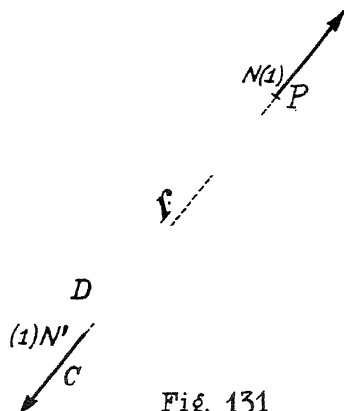



Fig. 131

Dans l'air ou le vide ces deux pôles Nord unité N et N' se repoussent avec une intensité

$$F \text{ dynes} = 1 \frac{(+1)(+1)}{r^2}$$

(dans un corps magnétique tel l'oxygène liquide on aurait: $\frac{1}{\mu}\frac{(m)(m')}{r^2}$ *; voir No 227 tome I)* μ *perméabilité, m et m' charges polaires, r leur distance)*

Donc la masse polaire nord unité N placée en P induirait dans la région C D un champ *(qui en gauss est le même nombre que la force en dynes subie par N')*

$$H_{gauss} = \frac{1}{1}\frac{(1)(1)}{r^2} = \frac{1}{r^2}$$

Or, seule la composante de ce champ qui lui est normale affecterait le courant

$$H_{normale} = \frac{1}{r^2} \sin \vartheta \text{ (gauss)}$$

et la force subie par cet élément C D de courant serait *(effet moteur)*:

$$i\Delta l \times \overleftarrow{H_n} \quad \odot\, i\Delta l \frac{\sin\vartheta}{r^2}$$

Mais si le pôle Nord situé en P actue sur l'élément de courant CD une force *(action)* $\odot\, i\, l \frac{\sin\vartheta}{r^2}$ inversement le vermisseau de courant doit opérer la force *(réaction)* sur le pôle

nord unité en P $\otimes i \Delta l \frac{\sin \vartheta}{r^2} \overline{H}_n \times \Uparrow i \Delta l$ c'est-à-dire que *le champ élémentaire du au courant CD est (au point P)*

$$dH = \otimes i \Delta l \frac{\sin \vartheta}{r^2}$$ loi dite souvent "première loi de Laplace".

Note I: r et ϑ sont coordonnées relatives suffisantes parce que le champ a la même valeur en tous les points de la circonférence de cercle que décrirait P en tournant autour de l'axe-courant *(inutile de figurer une longitude par exemple si le courant est vertical)*.

Note II: Remarquer qu'en enfonçant le tire-bouchon dans le sens du courant, on tourne comme les champs magnétiques qu'il induit *(circonférences de cercle axées sur le courant)*.

Note III: Il semble étrange à priori que l'action et la réaction du pôle Nord unité situé en P et de l'élément de courant CD, ne soient pas *directement* opposées; car en mécanique newtonienne, ceci a toujours lieu; ceci tient à ce que par brièveté mathématique nous faisons une double abstraction

1) ne considérant pas le conjugué Sud *(ce qui est peu grave s'il est loin)*

2) ne considérant pas le reste du circuit, ceci infiniment plus grave car *le courant ne peut pas commencer subitement en C et mourir en D.*

Si nous considérions tout l'aimant et surtout *tout le circuit électrique auquel appartient le vermisseau CD, alors les action et réaction réciproques de tout l'aimant et de tout le circuit seraient comme la Mécanique Newtonienne le veut directement opposées".*

Le lecteur après la lecture de tout ce chapître verra qu'avec les formules d'Ampère il y a aussi des oppositions apparentes entre Newton et Ampère "quant aux lois infinitésimales"; ne pas oublier que loi mécanique "macroscopique" de Newton ne peut être utilisée pour des fractionnements très petits.

D'ailleurs, les formules élémentaires *ne sont pas directement vérifiables* seuls les résultats de leur intégration *(censurés par l'expérience)* indiquent si la loi élémentaire est acceptable. Il peut y avoir une infinité de lois élémentaires pour une même loi globale expérimentale.

No 176. Champ créé en un point par un élément rectiligne de courant de longueur finie ou infiniment grande. *(fig. 132)*.

Pour pouvoir totaliser des vecteurs et se servir du calcul intégral scalaire ordinaire, *il faut que tous les éléments de vecteurs soient parallèles.*

C'est ici le cas. Au point P les self-champs produits par divers éléments du courant rectiligne CD, C'D'..... etc.. sont tous de direction et sens $\otimes$, $\otimes$, ... etc....

Donc, nous pourrons utiliser le vieux calcul infinitésimal scalaire.

$$(dH)_{CD} = \otimes \frac{i}{a} d(\sin \varphi)$$

c'est une différentielle exacte dont la primitive est

$$\frac{i}{a}(\sin \varphi) + C^{te}$$

Fig. 132

Et, en prenant la différence des valeurs de la primitive aux deux limites, on aura le champ de toute une portion finie de conducteur rectiligne: ainsi *au point P* les champs de la boucle rectangulaire 1 2 3 4 sont: *(fig. 133)*

$$H_{(1\rightarrow 2)P} = \otimes\left(\frac{i}{a}\right)\left(\sin[+\beta] - \sin[-\beta]\right) = \otimes\, 2\,\frac{i}{a}\,\sin\beta$$

$$H_{(2\rightarrow 3)P} = \odot\left(\frac{i}{\ell/2}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]$$

$$= \odot\,\frac{2i}{\ell}\,(\cos\alpha - \cos\beta)$$

$$H_{(3\rightarrow 4)P} = \odot\,\frac{i}{a+b}\,\left[\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\right] = \frac{2i}{a+b}\,\sin\alpha$$

$$H_{(4\rightarrow 1)P} = \odot\,\frac{i}{\ell/2}\,\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right] = \frac{2i}{\ell}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

$$H_{\square P} = \otimes\, 2i\left\{\frac{\sin\beta}{a} - 2\,\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\ell} - \frac{\sin\alpha}{a+b}\right\}$$

Les manuels ne donnent généralement que le champ *d'une seule portion rectiligne de longueur infinie devant a*; $(\frac{\ell}{a} = \infty)$,

Fig. 133

alors seul le champ $H_{1\to 2}$ subsiste et $\beta \to \frac{\pi}{2}$ d'où $H \to (2i \div a)$

<u>No177</u>. Champ d'une spire circulaire en un point P de *son axe* géométrique.

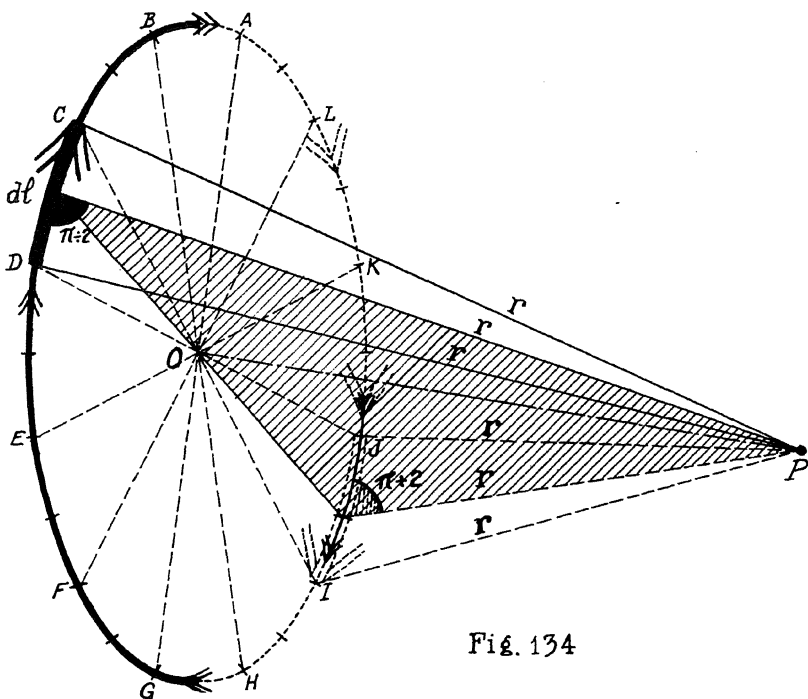



Fig. 134

Menant de ce point P comme sommet les génératrices du cône qui admet la spire circulaire comme directrice on remarque:

*1)*que toutes les génératrices ont même longueur

*2)*que l'angle de toute génératrice avec un arc CD de directrice est droit.

Profitons de la symétrie de la circonférence de cercle pour la décomposer en éléments axialement opposés tels que AB et GH, BC et HI, CD et IJ, DE et JK, EF et KL, FG et LA.

Si au lieu de la décomposer ainsi en 12 arcs on la décomposait en un très grand nombre d'arcs, 12×10^6 par exemple, alors on pourrait dire que les portions (*arcs*) de circonférence de deux éléments opposés DC et JI sont deux segments de lignes droites antiparallèles, et à chacun de ces segments rectilignes de petite longueur on peut appliquer la première loi de Laplace

$$dH_{DC} = \frac{i\,d\ell \sin \pi \div 2}{r^2}$$

ce vecteur étant normal au plan CPD dans le sens rentrant dans le papier (*la translation du tire-bouchon étant suivant DC, la rotation frappe en P du lecteur vers le papier).*

Comme les Polytechniciens sont habitués aux projections, nous allons représenter sur le plan de la feuille le plan médian des deux éléments DC et JI considérés (*plan qui est hachuré sur la figure en perspective*), de façon à voir en vraie grandeur les angles et les lignes *de ce plan;* DC et JI seront normaux au papier ◉ et ◎ respectivement. On voit bien alors que l'angle ϑ de ces éléments de courant *perpendiculaires au papier* avec les droites du papier (r) est droit. *(fig.135)*

Champ(dH_{DC})produit en P: $\frac{id\ell 1}{r^2}$ sur une perpendiculaire au rayon vecteur moyen et dans le sens indiqué par le tire-bouchon qui avancerait suivant DC en rentrant dans le papier donc◉ tournant suivant MM' ligne de force (*du courant DC*)qui passe par P.

Champ(dH_{JI}) produit en P: $\frac{id\ell 1}{r^2}$; (JI=DC=dl) sur une perpendiculaire à l'autre rayon vecteur (*milieu de IJ a P*) dans le sens du tire-bouchon qui venant vers le lecteur en sortant du papier ◎ tourne suivant QQ' ligne de force (*du courant JI*) qui passe par P.

Composons ces deux vecteurs:

$$dH_{JI} + dH_{DC} = \frac{2\,i\,d\ell}{r^2} \cos\beta = 2\,i\,d\ell\,(\sin\alpha) \div r^2 = 2\,i\,a(d\ell) \div r^3$$

On voit ainsi que le self-champ résultant en P de deux petites portions de circonférence (*de spire*) opposées par l'axe est "*purement axial*"; les composantes radiales s'étant annihilées.

Ceci est évidemment vrai pour toute couple de portions opposées par l'axe et *tous les champs résultants*: de telles couples de portions de spire sont *tous portés par l'axe (même direction)* et *tous de même sens* P O

(Sens que le tire-bouchon donne encore en bloc car il faut l'avancer de P vers O pour tourner comme le courant dans la spire).

On peut donc totaliser par le calcul scalaire et dire:

$$\overleftarrow{H_P} = \Sigma\ \frac{i\,a}{r^3}\ \overleftarrow{(2\,d\ell)} = \frac{i\,a}{r^3}\ \Sigma\ (2\,d\ell)$$

Mais, $\Sigma\ (2\,d\ell) = 2\pi a$, d'où

$$\boxed{H_P = \overleftarrow{2\,\pi\,i\,a^2 \div r^3}}$$

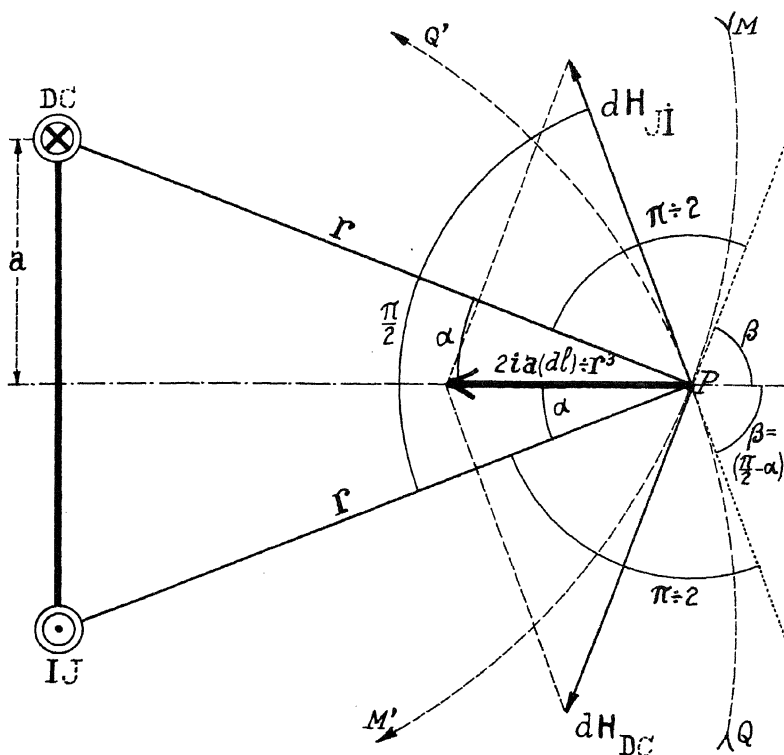



Fig. 135

No178. Champ d'une bobine sur l'axe, au centre d'une joue terminale: en J par exemple. *(fig.136)*

Soit une bobine de Z spires enroulées sur une longueur L et parcourues par un courant i (*ab-ampères*).

Considérons l'épaisseur dx de bobine; elle contient *en moyenne* $\frac{Z}{L}$ dx spire (*qui n'est qu'une fraction de spire si dx est infiniment petit).*

Le champ de chaque spire du "paquet infiniment plat" est en J: $dH = 2\pi ia^2 \div r^3$ par spire, soit pour le nombre (*fractionnaire*) de spires du paquet d'épaisseur dx ,

et comme tous les paquets analogues produisent des champs axiaux de même sens, on peut totaliser par le calcul scalaire ordinaire:

$$H = \int_{x=0}^{x=L} \frac{Z}{L} 2\pi i a^2 \frac{dx}{r^3}$$

Nous avons là deux variables x et r, et (*l'esprit humain ayant une forme linéaire, comme disait Gabriel Königs*), il vaut mieux par un changement de variable, exprimer la différentielle du champ *comme différentie~~lle d'une~~ seule variable: l'angle* ϑ.

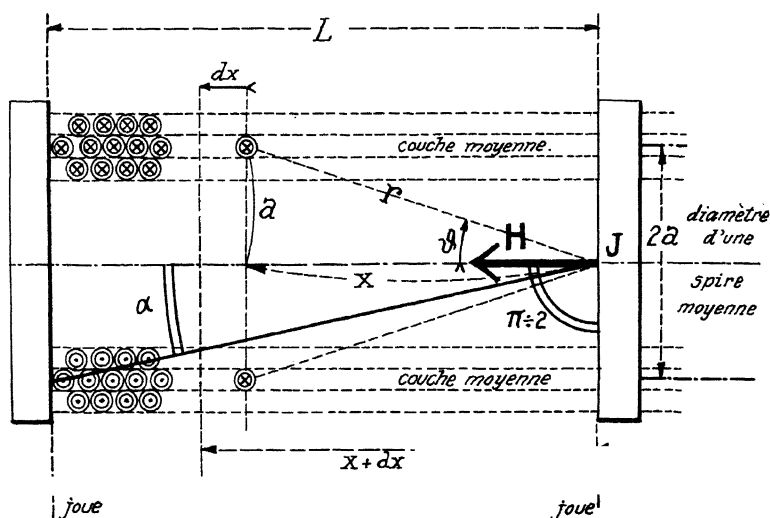



Fig. 136

$$tg\ \vartheta = \frac{a}{x} \quad ou \quad \vartheta = arctang \frac{a}{x} \quad ou \quad d\vartheta = \frac{-a\,dx}{x^2+a^2}$$

$$\left|\frac{dx}{r^2} : \frac{dx}{a^2+x^2}\right. \qquad \left|-\frac{d\vartheta}{a}\right.$$

$$mais\ \frac{a}{r} = sin \qquad d'où\ \frac{Z}{L}\, 2\pi i\, a\, \frac{a}{r}\, \frac{dx}{r^2}$$

$$= \frac{Z}{L}\, 2\pi i (a)(sin\ \vartheta)\left(-\frac{d\vartheta}{a}\right)$$

$$= 2\pi i \frac{Z}{L}\, d\,(cos\ \vartheta)$$

$$H = 2\pi i \frac{Z}{L} \left(cos\ \vartheta\right)_{\vartheta=0}^{\vartheta=\alpha} = 2\pi i \frac{Z}{L} cos\,\alpha = 2\pi i Z \frac{1}{\sqrt{L^2+a^2}}$$

No179. Champ sur l'axe d'une bobine et à l'intérieur. *(fig. 137)*
Considérons P comme appartenant à deux bobines (1) et (2) ayant *une joue commune en P*. Les champs de ces deux bobines s'ajoutent arithmétiquement (*tire-bouchon*) donc

$$H_{int} = \overleftarrow{2\pi i \frac{Z}{L} cos\,\alpha} + \overleftarrow{2\pi i \frac{Z}{L} cos\,\beta}$$
$$= \overleftarrow{2\pi i \frac{Z}{L}} (cos\,\alpha + cos\,\beta)$$

No180. Champ au centre géométrique d'une bobine $\alpha = \beta$; $cos\,\alpha =$
$= cos\,\beta = \frac{L}{\sqrt{L^2+4a^2}} = \frac{L}{D}$ (*en désignant par D la "diagonale" moyenne de bobine*). $\quad H_{centre} = 2\pi i \frac{Z}{L}\, 2\, \frac{L}{D} = \frac{4\pi i Z}{D}$

Cette formule toujours très rigoureuse se confond pratiquement lorsque la bobine est *très longue* avec la formule approchée généralement donnée

$$H_{centre} = \frac{4\pi i Z}{L}$$

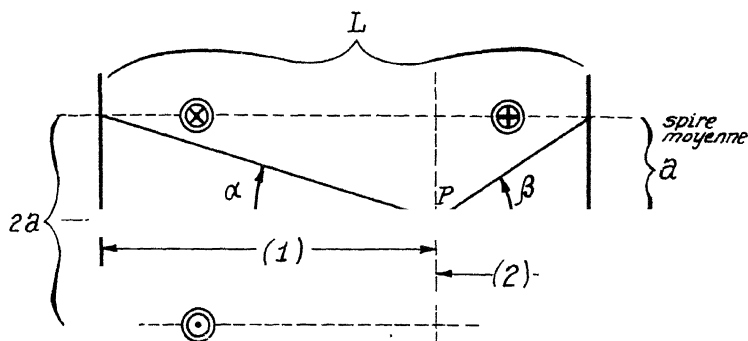



Fig. 137

car $D=L\left(1+\frac{4a^2}{L^2}\right)^{1/2} \simeq L$ lorsque L est grand devant 2a.

No181. Champ sur l'axe d'une bobine et à l'extérieur.

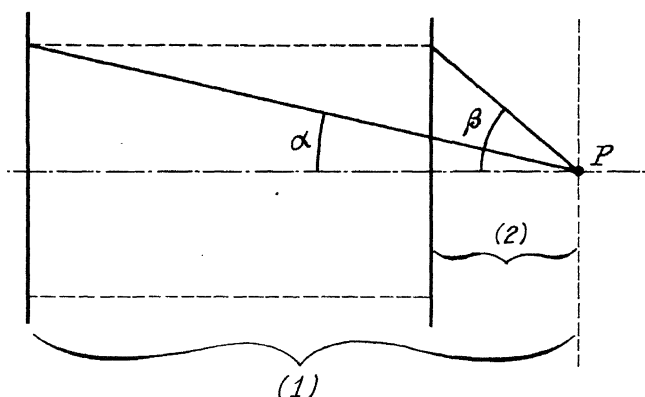



Fig. 138

Considérons cette fois la bobine comme *différence* de deux bobines ayant une *joue commune en P.*

$$H_{ext.} = 2\pi i \frac{Z}{L} (\cos\alpha - \cos\beta)$$

No182. Théorème d'Ampère par intégration graphique en suivant l'axe de la bobine sur un long parcours.

Le théorème d'Ampère exprime la différence de potentiel magnétique par spire c'est-à-dire le travail du champ lorsqu'"un pôle nord unité" décrit une courbe fermée bouclant la spire parcourue par un courant.

Pour une bobine de Z spires, si les Z spires sont bouclées, la différence de potentiel magnétique ou "*force magnétomotrice est égale à* $\boxed{4\pi i Z}$ *(si i est en ab-ampères)*

(Avant d'entreprendre au numéro suivant la démonstration du théorème d'Ampère dans toute sa généralité, nous croyons bon de nous servir des formules qui donnent le champ suivant l'axe d'une bobine pour trouver ce résultat numériquement sur un graphique à l'échelle).

Si donc la trajectoire du pôle nord unité comprend une très longue portion rectiligne suivant l'axe AB et un arc BCA de très grand rayon pour compléter la boucle;

Les champs en A et B et tout le long de l'arc BA seront négligeables pourvu que nous donnions à x une valeur suffisamment grande et alors le travail du champ pour toute la boucle se bornera au *travail du champ de A en B.*

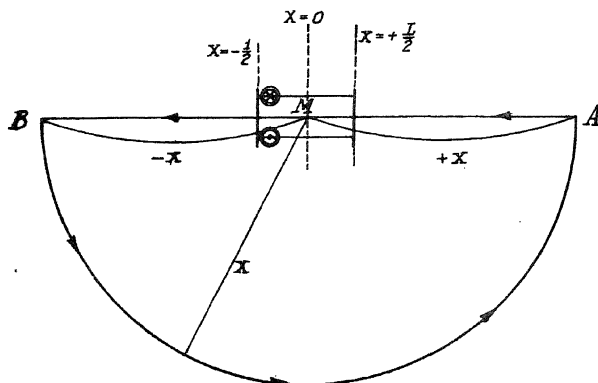



Fig. 139

Soient: $\left\{\begin{array}{l} a = 5 \text{ cms} \\ L = 20 \text{ cms} \\ Z = 1000 \text{ spires} \\ i = 100 \text{ ampères} \\ \text{ou } = 10 \text{ abampères} \end{array}\right.$

$$D = \sqrt{400+4(25)} = 22.36$$

1)(revoir le No 230, tome I) la différence de potentiel magnétique est la somme des produits *(champs)(chemin)(cosinus* champ, chemin)

$$\Sigma H . dl = \Sigma H \, dl \cos(\widehat{H, dl})$$

*2)*si nous portons en ordonnées les valeurs du champ (*H à la place des y habituels*) et en abscisses les chemins dl=dx, le long de l'axe de bobine H et l étant *parallèles* et de même sens, $\cos(\widehat{H, dl}) = 1$ et

l'aire du diagramme $\mathop{\llcorner}^{H}_{x}$ sera la force magnétomotrice c'est-à-dire le travail qu'exercerait la bobine sur un pôle Nord unité décrivant la ligne AB.

*3)*comme cette courbe est évidemment symétrique par rapport à la droite x=0, il nous suffira de construire la moitié seulement du diagramme.

A) *Au centre* $H_{x=0} = \frac{4\pi i Z}{D} = \frac{(4\pi)(10)(1000)}{\sqrt{400+4(25)}} = 80\sqrt{5}\,\pi$ *gauss.*

$\simeq 800(2.236)(3.1416) = 5620$ *gauss*

prenons une hauteur de petit carré égale à 112.4 gauss ou 50 hauteurs de petit carré pour représenter le champ au centre. La largeur d'un petit carré étant le 1/2 cm.

Chaque aire de petit carré vaudra donc $\frac{112.4}{2}$ gauss×cms

$= 56.2$ *gauss×cms.*

B) à 5 cms du centre, sur l'axe, appliquant la formule du champ à l'intérieur d'une bobine,

$$H = \frac{2\pi i Z}{L}(\cos\alpha + \cos\beta)$$

$$H_{x=5} = (2\pi)(10)(1000)\frac{1}{20}\left(\frac{15}{\sqrt{15^2+5^2}} + \frac{5}{\sqrt{5^2+5^2}}\right)$$

$$= 2(3.1416)\,10\,(1000)\frac{1}{20}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right) = 5200.6 \text{ gauss}$$

ou 46.3 hauteurs de petit carré.

C) sur la joue $H_{x=10} = \frac{2\pi i Z}{\sqrt{L^2+a^2}} = \frac{2\pi(10)1000}{\sqrt{400+25}} = 3047.8$ gauss

ou 27.1 hauteurs de petit carré.

Continuons ainsi le calcul pour x=30, 40, 50 etc...... en utilisant la formule $H = \frac{2\pi i Z}{L}(\cos\alpha - \cos\beta)$

D) pour x=15 par exemple

$$H_{x=15} = 2\pi(10)\frac{1000}{20}\left(\frac{25}{\sqrt{(25)^2+5^2}} - \frac{5}{\sqrt{(5)^2+(5)^2}}\right) =$$

$= 1000\pi(0.986 - 0.707) = 876.5$ gauss soit 7.8 hauteurs de petit carré.

E) pour x=20

$$H_{x=20} = 2\pi(10)\frac{1000}{20}\left(\frac{30}{\sqrt{(30)^2+(5)^2}} - \frac{10}{\sqrt{(10)^2+(5)^2}}\right)$$

$= 3141.6(0.9864 - 0.8945) = 286.9$ gauss ou 2.6 hauteurs de pet. car.

puis de même pour x=25 cms, H=129.5, ou 1.1 hauteur de p.c.
x=30 cms, H=27, ou 0.24 " " "
x=35 cms } négligeables de plus
x=40 cms } en plus

la figure 140 représente la moitié de la courbe "en chapeau de gendarme".

Les aires hachurées ne sont pas égales; sur un graphique très soigné et à grande échelle on verrait que pour égaliser les aires hachurées, il faudrait couper la courbe non pas par

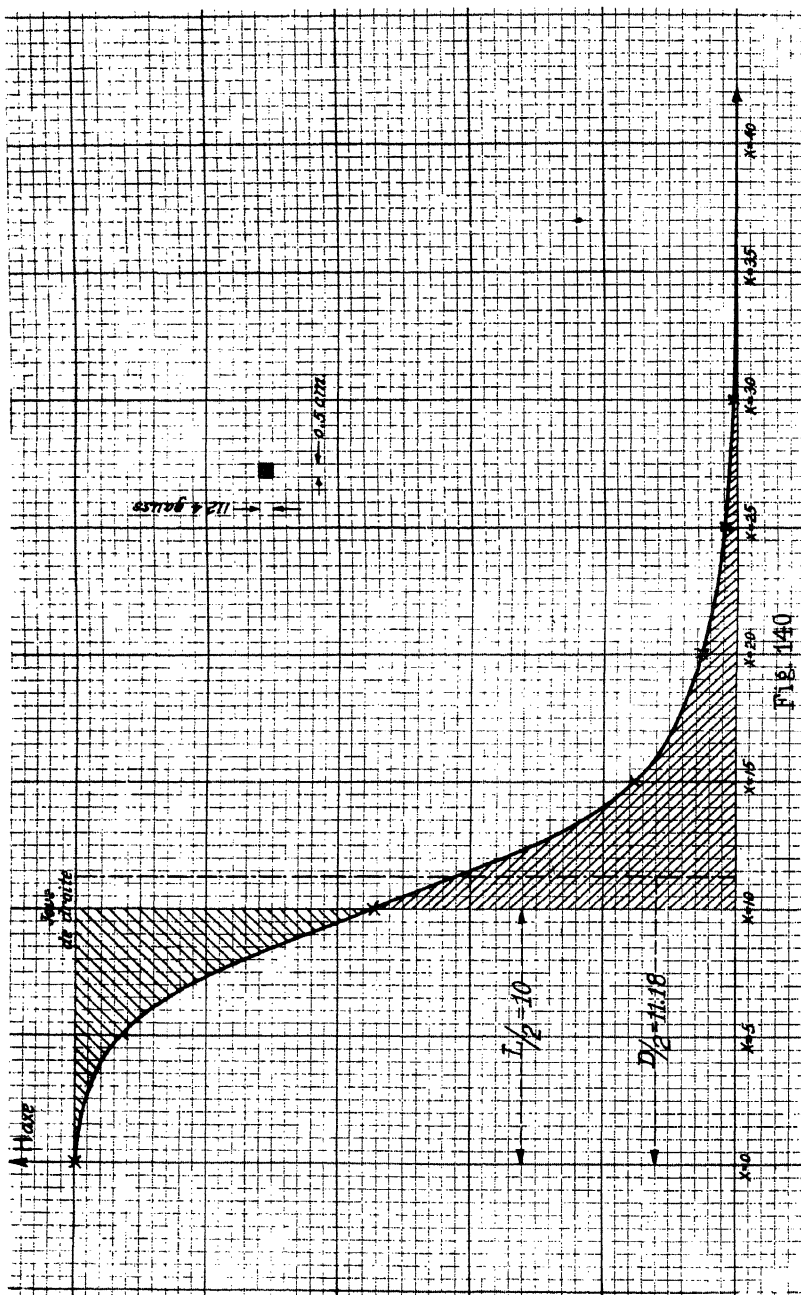
la droite x $\frac{L}{2}$ mais bien par

la droite $x = \frac{D}{2}$ (*Demi-diagonale de bobine*).

Donc l'aire de cette moitié de diagramme vaut

$$(H_{centre})\frac{D}{2} = 4\pi i\frac{Z}{D}\,\frac{D}{2} = 2\pi i Z$$

H axe
Joue de droite
112,4 gauss
0,5 cm
L/2 = 10
D/2 = 11.18
x=0
x=5
x=10
x=15
x=20
x=25
x=30
x=35
x=40

Fig. 140

Et l'aire de tout le diagramme complet vaudrait $\boxed{4\pi i Z}$

Donc la force magnétomotrice (*analogue en magnétisme à la f.é.m. en électricité*) de la pile magnétique qu'est la bobine vaut

$$(4\pi i) \text{ par spire}$$

Ce que le graphique ne prouve pas, c'est que *cette force magnétomotrice par spire est la même quelle que soit la forme et les dimensions de la trajectoire du pôle Nord unité qui boucle la spire.* C'est ce qui va être prouvé.

N.B: Les ouvriers électriciens appellent "le nombre d'ampère-tours" ce qui correspond à la force magnétomotrice.
Ainsi ils diraient {100000 ampères×tours au lieu de
{125664 unités électromagnétiques de force magnétomotrice
Les livres indiquent parfois f.m.m. 1.26 (*ampère×tours*) pour aider le technicien.

No183. Le théorème d'Ampère: La force magnétomotrice pour une spire est $+4\pi i$ par "boucle fermée" décrite par un pôle nord unité (*dans le sens des lignes de force*) si la trajectoire du pôle Nord et la spire sont comme mailles d'un filet ou encore comme deux anneaux voisins d'une même chaîne, et cela *quelles que soient les formes et les dimensions tant de la trajectoire du pôle Nord unité que de la spire du courant.*

Nous diviserons la démonstration en six étapes vu la délicatesse du sujet: partant d'un cas évident pour généraliser de plus en plus.

*1)*un courant rectiligne très long, et pour trajectoire de pôle Nord unité *une ligne de force du courant* infiniment long.
*2)*un courant rectiligne très long, mais pour trajectoire de pôle Nord *une courbe plane dans un plan normal au courant*
*3)*un courant rectiligne très long, mais pour trajectoire du pôle Nord *une courbe gauche.*
4)un filet de courant(très mince) de force et de dimensions quelconques bouclé par le pôle Nord suivant une *trajectoire infiniment petite.*
5)Un filet de courant de forme et de dimensions quelconques bouclé suivant une *trajectoire quelconque* par le pôle Nord.
6)courant et trajectoire de pôle Nord *quelconques.*

1e cas: *(Voir figure 141)*

2e cas
(A) {courbe plane renfermant la trace du courant indéfini
(B) {courbe plane ne renfermant pas la trace du courant indéfini.

En projection sur le plan normal au long conducteur soit i la trace du courant et ABDA la courbe plane *(fig.142 A et B)*

$$\vec{dl} = \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$
$$\vec{dl} = \vec{rd\vartheta} + \vec{dr}$$

le long de AC le champ est tangentiel car c'est une ligne de force; le long de CB le champ est normal car CB est une normale aux lignes de force (*circonférences d'axe le courant).*

$$\oint H.d\ell = \oint \left(\frac{2i}{r}\right)(r\,d\vartheta)\cos(\text{zéro}) + \oint \left(\frac{2i}{r}\right)(dr)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i\oint d\vartheta = 4\pi i$$

Fig. 141

Fig. 142

Fig. 143

On voit en effet sur le cercle trigonométrique que le nombre de radians par tour est 2π

Même raisonnement que dans le cas précédent mais pendant que l'arc OABD est décrit, l'angle sur la circonférence de rayon 1 est de $\omega \rightarrow$ vers φ et quand l'arc DPO est décrit, l'angle est de $\varphi \rightarrow$ vers ω, revenant sur ses pas à l'origine des angles ω.

L'angle par tour est donc nul et il n'y a pas de travail magnétomoteur par tour. (*Cela correspond physiquement à ceci: de O en D (par AB) le champ est accélerateur comme la gravitation pour un poids qui tombe, alors que de D en O (par P) le champ est retardateur comme la pesanteur pour un poids qui monte).*

Troisième cas: Projetons la courbe gauche trajectoire du pôle nord unité sur un plan normal au courant et supposons pour fixer les idées que cette *projection renferme la trace du courant.*

Fig. 144

Comme on le fait en coordonnées cylindriques, menons par A un arc Ab' parallèle à la projection ab: et soit b'B=dz la composante de la courbe gauche parallèle au conducteur; les lignes de force du courant sont *tangentes à r dϑ, normales à dr* et *normales à dz* ; il ne reste donc encore que $4\pi i$ par tour si la trace du conducteur est enfermée par la projection de la courbe gauche (*cas de la figure*). Les parcours dr et dz sont nuls énergétiquement pour la même raison que la pesanteur ne travaille pas lors d'un parcours horizontal.

Quatrième cas: Si nous dessinons avec des échelles "infinies", la trajectoire de N infiniment petite deviendrait une des courbes des trois premiers cas, alors que la *portion de courant du voisinage* deviendrait un courant rectiligne indéfini; on se-

rait donc ramené à l'un des trois premiers cas où le travail du champ vaut $4\pi i$ (*et non zéro puisque le courant est bouclé*).

Et d'avoir agrandi le dessin n'aurait pas *changé le nombre de radians par tour certes*;donc *le résultat est le même si l'on n'agrandit pas*: $4\pi i$ par tour de pôle Nord unité tournant dans le sens des lignes de champ magnétique.

Cinquième cas: Montrons que l'on peut passer d'une trajectoire (*de pôle Nord*) infiniment petite à une autre quelconque ou réciproquement sans rien changer au résultat.

a) passons d'une petite trajectoire t à une autre.

Ajoutons à $4\pi i$ autant de zéros que nous voudrons ces zéros étant la force magnétomotrice des boucles qui ne contiennent pas le courant

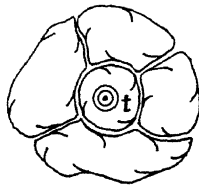



Fig. 145

Ajoutons-les toutes d'un même sens de parcours, celui de la petite trajectoire; comme les parcours du pôle Nord en deux sens opposés se détruisent on voit que

$$4\pi i + \text{zéro} + \text{zéro} + \text{zéro} + \text{zero} = \boxed{4\pi i}$$

est encore la force magnétomotrice pour la périphérie tout comme pour la petite trajectoire pour laquelle le courant se trouvait indéfini.

Et l'on peut ainsi *agrandir autant que l'on veut la trajectoire de pôle Nord sans changer le résultat énergétique.*

b) partons d'une grande trajectoire T et dessinons autant de petites trajectoires interieures (*de sens opposé quant au premier parcours*) *supprimant les parcours énergétiquement stériles*: puisque deux fois parcourus en sens inverses, il ne reste plus qu'une courbe intérieure de même sens de parcours que T.

Et l'on peut reduire ainsi tant que l'on veut les dimensions de la trajectoire en retranchant autant de zeros que l'on veut

$$4\pi i - \text{zéro} - \text{zéro} - \text{zéro} \ldots\ldots = \boxed{4\pi i}$$

Donc la restriction du quatrième cas(*trajectoire infiniment petite peut être levée* ; *pour un filet de courant quelconque et pour une trajectoire quelconque la différence de potentiel par tour de N bouclant le courant est encore $4\pi i$*

Sixième cas : Et si l'on a un gros courant, on peut le décomposer en filets de courants

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + . \qquad = \Sigma\, i_i$$

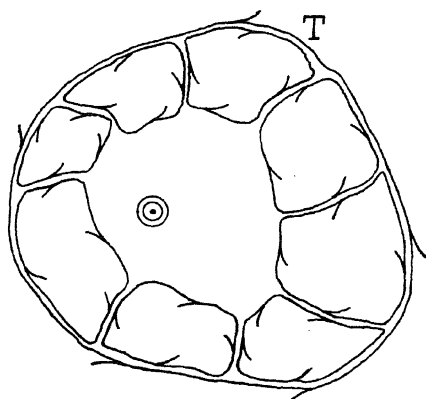



Fig. 146

Pour chacun des filets la proposition est vraie, on était obligé de parler de filet car il eut été bizarre d'imaginer qu'un gros fil conducteur pût être bouclé par une trajectoire infiniment petite; mais *puisque la trajectoire du pôle Nord unité est aussi grande que nous le voulons, il y aura place pour faire passer tous les filets de courants* en lesquels se décomposera le gros courant.

Conclusion: Pourvu que le courant soit "*bouclé*" *une fois* dans le même sens que les lignes de force., *le travail du champ magnétique* est donc $\boxed{4\pi i}$ *(i en ab-ampères)*.

Et ce travail du champ magnétique est numériquement identique à la force magnétomotrice (*car le potentiel est le quotient du travail par la quantité A/m ou numériquement égal au travail relatif au pôle Nord (+1)*;

Si c'était d'un pôle nord de "m unités" qu'il s'agissait, le travail serait *(toujours pour 1 boucle dans le sens des lignes de force)*.

$$A = m \cdot \mathcal{V} = 4\,\pi\,m\,i$$

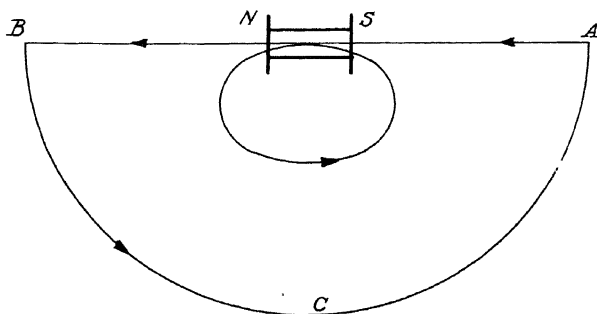



Fig. 147

Maintenant le résultat du numéro 182 peut être généralisé; si au lieu du parcours ABCA il s'agissait d'un parcours quelconque tel que la petite boucle dessinée, le pôle Nord unité bouclant Z fois le courant, $\mathcal{F} = Z\ (4\pi\ i)$ pour la petite boucle comme pour la grande. Ceci le graphique ne le disait pas.

Le calcul du champ en dehors des points de l'axe étant assez difficile, heureusement que le théorème d'Ampère est venu faciliter le travail du technicien.

$\boxed{\mathcal{F} = 4\ \pi\ i\ \ Z}$ est donc toujours la force magnétomotrice d'une bobine.

No184. Exemple de l'utilisation du théorème d'Ampère. (*Nous n'en pouvons donner ici qu'une idée).*

Au courant électrique i correspond le flux d'induction magnétique Φ pour un "circuit magnétique de fer d'une machine"

Divisant ce flux par la section droite moyenne on obtient l'induction B dans la partie du circuit magnétique que l'on considère *(on fait de même pour carcasse, induit, entrefer, épanouissements polaires):*

$$B = \frac{\Phi}{S} \qquad \frac{\text{flux magnétique}}{\text{section droite moyenne}}$$

Les courbes (*de la page 330, tome I)* donnent alors le champ "H" (*en choisissant la courbe relative au matériau de la machine.*

Et évaluant sur le dessin la longueur (l) moyenne des lignes de flux, on fait le produit H l

Ce produit est la *différence de potentiel magnétique nécessaire à l'entretien du magnétisme.*

Et la somme de ces produits (*si tout est en série*)représente la force magnétomotrice requise pour compenser toutes les chutes de potentiel magnétique nécessaires au passage du flux.

$$\Sigma H l = \mathcal{F} = 4\pi i Z \qquad \text{d'où } (10_i Z) \text{ les ampères tours d'excitation.}$$

tout comme $\Sigma R i$ = la force électromotrice du circuit électrique qui doit compenser toutes les chutes de potentiel électrique.

Après avoir vu les schémas de moteur et de dynamo, à la fin Note II,nous calculerons ainsi un petit circuit magnétique renvoyant à Vieweger pour plus de détails.

Actuellement, nous ne saurions pas de quelle valeur de φ il faudrait partir; cette valeur de φ dépendant de la vitesse et du nombre de spires de l'enroulement moteur pour un voltage aux bornes et une résistance d'induit donnés.

Attendons donc d'avoir suivi Faraday sur l'induction magnétique des courants pour traiter du circuit magnétique.

No 185. Ampère a appelé ***Electrodynamique*** l'action réciproque de *deux courants.*

Nous savons déjà trouver en tout point de l'espace le champ magnétique produit par le premier courant. Donc en tous les points du second circuit, nous pourrons calculer *les champs produits par le premier.*Et,de par la loi de l'effet moteur, nous pourrons connaître *l'action des champs du premier sur le second courant.*

La difficulté n'est plus d'ordre physique, mais affaire de machine à intégration; bornons-nous aux cas les plus souvent rencontrés dans l'appareillage de mesure *(tout appareil de*

haute précision ne renferme pas de fer et est basé sur l'électrodynamique parce que où il y a du fer les courbes ne sont pas linéaires: voir page 330, tome I).

Note: [Le lecteur va trouver que c'est bien artificiel de passer par la notion de champ magnétique du premier courant pour ensuite calculer l'effet du champ magnétique du premier sur le second courant; dans la note V[e] justement, nous verrons qu'Ampère ne prend que les deux courants sans passer par les champs magnétiques de Laplace (qui n'existaient pas alors et qui n'auraient pas plu à l'élégant analyste Ampère)]

1) Fils rectilignes parallèles: au milieu M du second courant, le champ produit par le second *(si a est petit devant la longueur du courant I,*

$$H_M = \frac{2I}{a} \quad \frac{\text{abampères}}{\text{cms}}$$

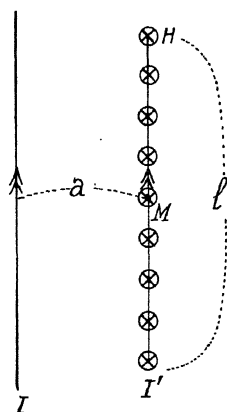



Fig. 148

Et si le courant I' n'est pas trop long, le champ sera sensiblement le même tout le long du courant I': $\otimes H = \frac{2I}{a}$

La loi de l'effet moteur donne

$$\overleftarrow{F} = \Uparrow I'\ell \times^{\otimes} H = \frac{2II'\ell}{a}$$

on voit que deux fils parallèles s'attirent

2) fils rectilignes antiparallèles: de renverser l'un des courants va produire une répulsion donnée par la même expression

$$F \text{ dynes} = 2\frac{\ell}{a} II' \text{ (ab ampères)}^2$$

3) Solénoïdes: on appelle ainsi depuis Ampère des hélices conductrices parcourues par un courant. Le tire-bouchon indique à quel aimant droit les assimiler .

Une différence avec les aimants est que s'ils sont inégaux en diamètre, *le plus petit se met parallèlement au plus gros (et de même sens) puis est avalé par lui.*

4) Electrodynamomètre de Pellat *(principe des wattmètres et des ampèremètres).*

Grosse bobine *(série)* I. Une petite bobine en dérivation, *(fil fin, faible courant)* ayant n spires de section moyenne S a pour moment magnétique $\Uparrow \mathfrak{M} = nSi$; elle est dans la région centrale d'une grosse bobine en gros fil *(au centre* $H = \frac{4\pi NI}{D}$ *)* et le couple électromagnétique est

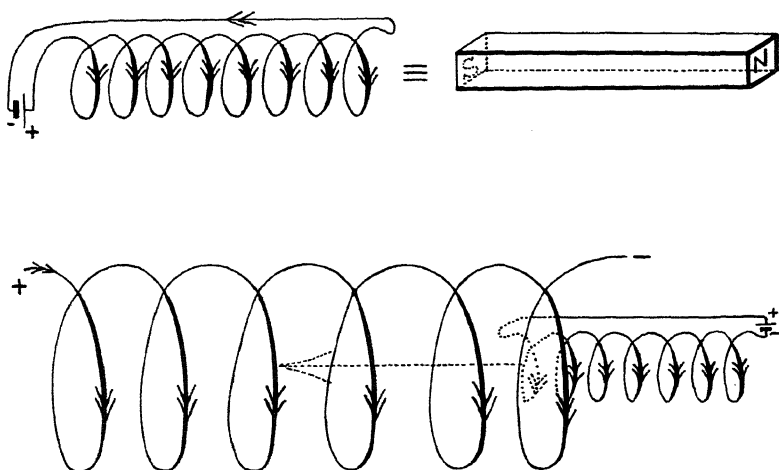



Fig. 149

$$\otimes \uparrow \mathfrak{M} \times \vec{H} = (nSi)\left(\frac{4\pi NI}{D}\right) \sin 90° = \frac{nS4\pi N}{D} iI$$

Un couple s'oppose à ce dernier pour peser "i I" c'est le couple de la balance $\overleftarrow{\text{bras}}\ b \times \downarrow \text{force } Mg = \circledcirc Mg\, b$

Il y a équilibre si $(Ii) = \frac{Mg\, b\, D}{4nS\pi N}$

a) montage en Wattmètre: la grosse bobine est en série avec le courant d'utilisation; la petite, aux bornes de l'appareil, sa résistance étant R, a un courant

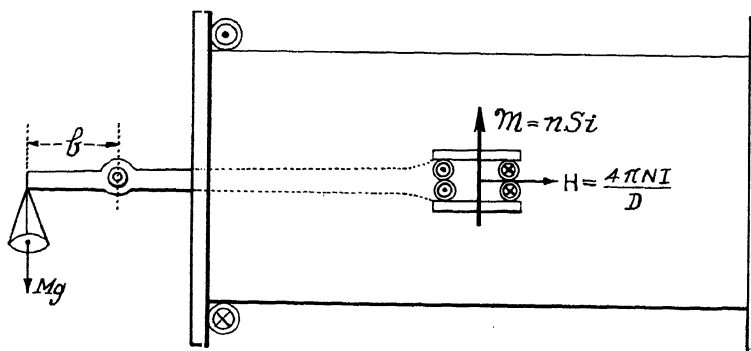



Fig. 150

$\doteq \frac{\Delta V}{R}$ $\frac{\text{diff. de pot. aux bornes de l'utilisation}}{\text{résistance de la petite bobine.}}$

I *(grosse bobine)*=I d'utilisation

i petite bobine $= \frac{\Delta V}{R}$

$I = \frac{1}{R}(I\,\Delta V) = \,_r W$

d'où $\boxed{W = \frac{R\,M g\, \ell\, D}{4\pi n S N}}$

b) montage en ampèremètre: mettant en série les deux bobines, on a

$$iI = I^2 = \frac{M g\, \ell\, D}{4\pi S N n}$$

Remarque: étant proportionnel à I^2 cet ampèremètre pourra servir directement en courant alternatif pour donner l'intensité efficace $I_{eff} = \sqrt{\frac{M g\, \ell\, D}{4\pi S N n}}$

No 186. Coefficient d'induction mutuelle de deux circuits.

Lorsqu'on a en présence deux circuits et *qu'il n'y a pas de fer* le flux de l'un est proportionnel à son courant *(il n'y a pas de courbe en genou due a la saturation du fer, flux et courant obéissent à la règle de trois).*

Si donc le premier circuit C_1 est parcouru par un courant I_1 on sait que le flux créé par ce premier circuit qui traverse le second circuit C_2 est *proportionnel à I_1 (M étant le facteur de proportionnalité)* $\Phi = M I_1$

M ne dépend que de *la grandeur et de la forme des circuits et de leur position relative.*

M est dit le "coefficient d'induction mutuelle" et s'exprime en maxwells par abampère ($\frac{\Phi}{I}$) ce qui est homogène au centimètre, comme il apparaîtra plus clairement après le tableau des unités Note III.

Si la grandeur géométrique M varie de ΔM par suite de la déformation des circuits ou de leur variation de position relative plus généralement, le flux *emis par le circuit C_1 à travers le circuit C_2 a varie de* $\Delta\Phi = \Delta M I_1$

et d'après l'expression scalaire de l'effet moteur, le travail des forces électromagnétiques *qui agissent sur C_2 est*

$$\Delta A = +I_2\,\Delta\Phi = +I_2\,I_1\,\Delta M$$

I_2 étant le nombre d'abampères du circuit C_2

On voit que cette expression n'est pas changée si l'on inverse I et I_2, donc *le coefficient de C_2 sur C_1 est le même que de C_1 sur C_2:* en effet ΔM variation purement géométrique due à la relativité des positions est la même et le travail de l'un sur l'autre est le même au signe près*(comme action et réaction: action×chemin et réaction×chemin).*

Dans la note 1 nous verrons la formule de Neumann.

No 187. Coefficient de self induction d'un circuit:

Un circuit unique isolé "s'envoie" des lignes de flux de par son self champ.

Le flux de son self champ est par définition:

$$\Phi_{self} = L I$$

où L est le coefficient de self induction; pour une bobine ce flux est proportionnel au carré du nombre des spires.

$$\left(\frac{4\pi NI}{D}\right)(N)(\pi a^2) = K(N^2)$$

Deux courants d'un même fil se repoussant, on démontre qu'un circuit isolé tend à se déformer pour avoir un coefficient de self maximum.

No 188. L'induction magnétique des courants.

De même qu'Ampère avait converti "l'électricité en mouvement" en magnétisme, Faraday a converti le "magnétisme en mouvement" en électricité.

Loi de Lenz: Simon Stévin *(de Bruges)* devançant Carnot et Lenz a souvent pris comme point de départ de ses raisonnements un fait purement instinctif: *l'impossibilité* du mouvement perpétuel et surtout de *la production gratuite d'énergie.*

Supposons un générateur de courant, nous savons bien qu'il faut une turbine hydraulique ou thermique pour le faire tourner. Une personne saine d'esprit n'irait pas songer qu'une machine qui produit de l'électricité *(une génératrice)* tournerait toute seule! ou qui plus s'accélérerait d'elle-même tout en produisant du courant!

"Ce serait trop beau pour être vrai" dirait un ouvrier; et, de fait, *lorsqu'on produit un courant dans un circuit fermé par déplacement de ce circuit dans un champ magnétique, le courant qui prend naissance est dans un sens tel qu'il freine le mouvement.*

C'est la loi de Lenz qui indique la rançon à payer mécaniquement pour avoir de l'énergie électrique et qui vérifie aussi l'action et la réaction de Newton ou encore l'effet réagissant sur sa cause.

L'ingénieur qui essaye une génératrice à la plate-forme sait bien que tant que la génératrice de courant ne débite pas de courant, un couple infime subit à entretenir la rotation *(les frottements étant minimes)* mais si l'on fait débiter un gros courant le couple nécessaire à la rotation devient énorme comparé au couple à vide: ceci est la preuve du "freinage du courant induit" que nous faisaient pressentir les Stévin, Carnot, Kelvin, Clausius et Lenz.

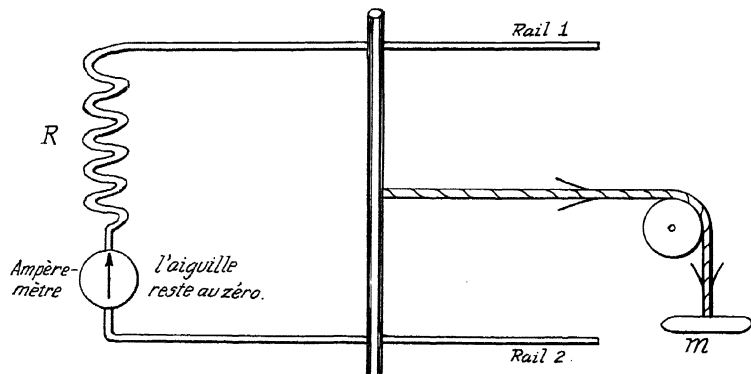



Fig. 151

Soit une couple de rails réunis d'une part par le premier pont: crayon de cuivre =chariot et d'autre part par une résistance électrice R et un appareil de mesure *(galvanomètre ou ampèremètre)*.

Il n'y a pas de pile et si l'on déplace le chariot au moyen d'une petite masse m qui tombe, l'ampèremètre n'accuse le passage d'aucun courant, supposons que le crayon étant déjà lancé, m soit tout juste la masse voulue pour *"compenser les frottements mécaniques c'est-à-dire pour entretenir le mouvement uniforme du chariot.*

Recommençons la même expérience après avoir lancé du courant d'excitation dans un électroaimant *(ou encore disposé un gros aimant)*qui envoie un champ normal au plan des rails.

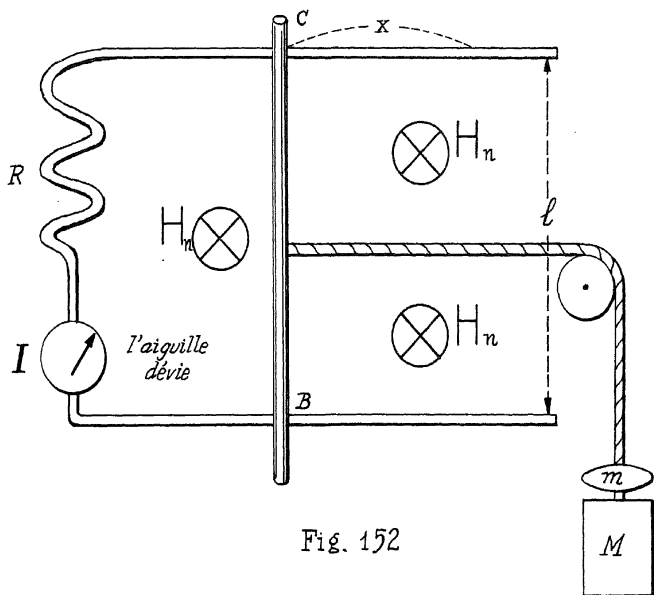



Fig. 152

Cette fois *1)* il faudra un poids (M+m)g immense devant mg pour entretenir le mouvement uniforme du chariot

2) mais l'aiguille de l'ampèremètre déviera .

Sens du courant induit? *pour que le bras droit du bonhomme d'Ampère soit dirigé vers la gauche, (puisque ce courant induit freine, il tire donc à gauche résistant au poids qui l'entraîne à droite) on a deux cas possibles de figure.*

Mais puisque le champ magnétique doit lui piquer le nez la seconde figure est à rejeter.

Et comme le courant rentre toujours par les pieds du bonhomme, le courant induit va donc passer de B vers C pour les sens donnés du champ et du mouvement.

Le courant induit tourne donc dans le circuit dans le sens BCRIB.

Pour ce sens de courant, le champ magnétique extérieur H est négatif.

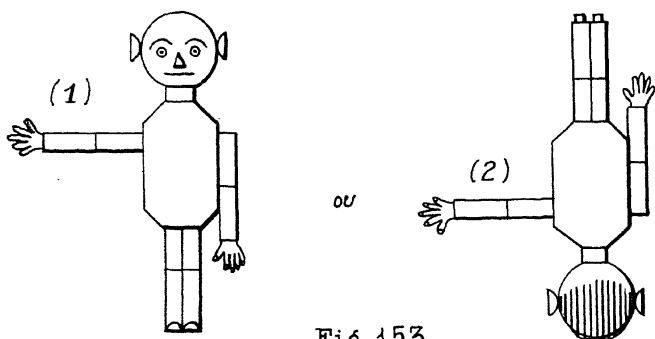



Fig. 153

Et puisque l'aire du circuit augmente pour ce cas de figure, *l'augmentation du flux*

$$\Delta \Phi = +(\ell x)(-H_n) = -H_n \ell x < 0$$

Donc le travail des forces électromagnétiques

$$+I \Delta \Phi = +I(-H_n \ell x) = -H_n \ell x I < 0$$

Comme *tout travail de freinage* c'est un travail négatif qui ne se fait pas de lui-même.

Ce qui est positif, c'est le travail qui compense ce freinage, travail accompli par la surcharge M

$$A = +M\, g\, x = -I \Delta \Phi$$

Ecrivons que ce travail de la partie du poids qui ne sert pas aux frottements *(M et non M+m)* se retrouve en énergie électrique:

$$M g x = -I \Delta \Phi = Q\ (\Delta V)$$

Q : charge induite pendant un certain temps Δt ; ΔV : somme des différences de potentiel du circuit ou force électromotrice

Mais de par la définition du débit

$$Q = I\ (\Delta t)$$ *(N° 187 p. 273 tome 1)*

et de par la loi de "Ohm" si *R désigne la résistance globale du circuit (à peu près constante si les rails sont de forte section droite)*

$$\Delta V = I\ (R)$$ *(No 198 tome I)*

Combinant ces trois relations, il vient

$$-I(\Delta \Phi) = I(\Delta t) I R \quad \text{ou} \quad I = \frac{-(\Delta \Phi \div \Delta t)}{R}$$

Pensant à la loi de "Ohm", on peut dire que "tout se passe comme si dans le circuit prenait naissance une force *électromotrice:* $-\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ $\quad \overline{-\dot{\Phi}}$

tant que varie le flux magnétique qui traverse le circuit".

Cette formule utilisée dans les enroulements "en anneau" comme nous le verrons nous montre que

1) la f.e.m. est indépendante de la résistance du circuit et doit être considérée comme l'élément fondamental des phénomènes d'induction *(existant que le circuit soit fermé ou non)*

2) si nous exprimons la quantité d'électricité induite lorsque le circuit est fermé,

$$Q = I\Delta t = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\Delta t = -\frac{\Delta\Phi}{R}$$

cette quantité est indépendante de la durée de variation du flux: cette remarque sera utile pour le calcul de l'induction dans un entrefer.

No 189. Autre expression de la f.e.m. d'induction utile pour les barres des enroulements "en tambour"

De $\Delta\Phi = -H_n l\ x$

et $e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (formule scalaire ou globale)

on tire *(V étant la vitesse linéaire $x \div \Delta t$ du conducteur)*

$\boxed{e = +H_n l\ V}$ formule dite élémentaire ou vectoriell

No 190. La loi de l'induction est générale: L'inspection de l'expression de la variation du flux

$$\Delta\Phi = H_n\ l\ x$$

(qu'il faudrait pour être plus exact remplacer par $\mu H_n l\ x$ de façon à englober les cas non industriels où la perméabilité varierait),
nous montre que la force électromotrice d'induction peut dépendre:

a) de la variation dans le temps de la perméabilité μ du milieu
b) de la variation dans le temps du champ H de l'électro d'excitation
c) de la vitesse d'une portion mobile du circuit
d) des déformations ou irrégularités du circuit *(si par exemple l'interrail variait, les rails n'étant pas parallèles.*
e) de l'angle que forme le champ avec la normale au circuit puisque seule la composante normale est efficace.

De plus, de remplacer l'électro-aimant par un aimant perma nent ne change rien *(identité des champs d'aimant et de bobine*
Le cas (b) correspond aux transformateurs statiques alimen tés en courant alternatif ou tout au moins modulé.
Le cas (e) correspond aux alternateurs.
Il est curieux que d'avoir raisonné avec le seul cas (c) nous donne une *formule valable dans tous les cas* de l'induction.

No 191. Seconde forme de la loi de Lenz valable même lorsqu'il n'y a pas de déplacement du circuit (transformateurs).

$\Delta\Phi<0$ *:La variation de flux extérieur est toujours négative.*
Nous l'avons montré sur un cas de figure, renverser le champ, puis le sens du mouvement, puis les deux et voir que c'est toujours vrai
(Un moyen mnémonique est que $e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ devant être positive (puisque force électromotrice), donc de même sens que le courant qu'elle produit, $-\Delta\Phi$ doit être positif).

En vue de la théorie des transformateurs statiques, considérons le flux de champ du *courant induit,* sur notre figure nous voyons qu'il est positif et il en serait de même de tous les cas de figure *puisque les flux sont comptés positivement d'après le courant.*
Donc alors que *le flux extérieur diminue sans cesse,*
le flux du courant induit augmente toujours
On peut donc dire que *le sens du courant induit est tel que son flux tend à compenser la variation du flux extérieur.*

Les deux lois de Lenz seront donc unifiées par *"le courant induit s'oppose toujours à la variation de flux qui l'engendre"*; qu'on déplace une partie du circuit, il freine pour modérer la variation de flux; qu'on fasse varier le courant dans le primaire du transformateur (et par suite le flux primaire) une variation de flux dans un sens opposé se produira grâce au sens du courant induit dans le secondaire.

Pour l'affaiblir "le courant induit réagit toujours sur sa cause".

No 192. Induction mutuelle de deux circuits:

Soit un circuit C_1 traversé par I_1; si C_2 est immobile et si I_1 varie, d'après la définition du coefficient d'induction mutuelle M, la variation ΔI_1 du courant I_1 produira une variation de flux $+M(\Delta I_1)$ et par suite une force électromotrice $-M(\frac{\Delta I_1}{\Delta t})$

Si d'autre part il y a eu déplacement des deux circuits, *(variation ΔM du nombre géométrique)*, il y a eu en supplément une variation de flux $+(\Delta M)I_1$ et par suite une force électromotrice $-(\Delta M)I_1$

Donc C_2 est le siège d'une force électromotrice totale

$$e_2 = -M\frac{dI_1}{dt} - I_1\frac{dM}{dt} = -\frac{d(I_1 M)}{dt}$$

No 193. Self induction: s'il n'y a qu'un seul circuit et que ce circuit soit *indéformable* et isolé, alors L est une constante et la force électromotrice d'induction serait

$$e_1 = -\frac{d(LI_1)}{dt} = -L\frac{dI_1}{dt}$$

(mais s'il était déformable il faudrait tenir compte de $(-\frac{dL}{dt}I_1)$.

No. 194. Les courants de Foucault *(eddy currents)*.

La figure 154 représente un induit de machine enroulée en tambour: *(le bobinage n'a pas été figuré)* les tirets représentent les lignes du flux d'induction magnétique, appliquant la règle des trois doigts: *champ (normal au chemin)*, chemin que le courant induit *(qui freine)* voudrait produire, *courant [règle de Fleming]*, On voit que toute la partie gauche de l'induit contre l'épanouissement polaire Nord est tapissée de courants induits fuyant le lecteur et contre l'épanouissement Sud à droite, l'induit est parcouru par des courants induits venant vers le lecteur.

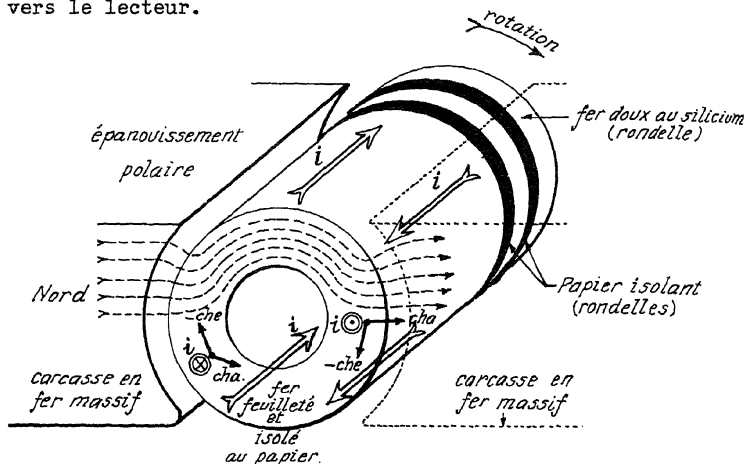



Fig. 154

Si le moteur mécanique de commande était assez fort pour vaincre leur freinage, ces courants *porteraient vite l'induit au rouge s'il était massif (solid iron)* mais grâce au feuilletage, *(laminage)* de l'induit [*on empile sur l'axe une rondelle de fer doux, suivie d'une rondelle de papier et ainsi de suite alternativement*] les forces électromotrices dans chaque rondelle de fer ne trouvant ainsi que des circuits coupés *ne peuvent actuer de courants (résistance pratiquement infinie)*.

Certains historiens de la physique affirment que ces courants ont été la cause du succès du pauvre ouvrier belge: Gramme; tous les gens de laboratoire se faisaient forger de superbes induits massifs qui ne pouvaient tourner vu le freinage des courants de Foucault alors que Gramme utilisant un paquet de rognures de fer oxydées réussit à obtenir le premier moteur industriel, vu que l'oxyde *(rouille)* produisait un isolement suffisant pour empêcher les courants induits de freiner.

No 195. Retrouver le théorème d'Ampère à l'aide de la formule de l'induction de Faraday et de la notion de flux de Gauss

(page 326, tome I).

(Nous devons cette élégante démonstration à notre ami regretté W.S. Franklin longtemps professeur de physique au M.I.T., elle se trouve dans le livre Electricity and Magnetism de Franklin and MacNutt).

"Avant de prouver que la force magnétomotrice d'une bobine est donnée par $\mathcal{V} = 4\pi Z\, i$ *(où Z est le nombre de tours et i l'intensité du courant en dizaines d'ampères)* il est nécessaire de trouver une expression du travail total A nécessairement accompli pour maintenir constant le courant d'une bobine alors que le flux magnétique qui traverse la bobine est accru d'une quantité Φ;

"A étant exprimé en ergs, i en abampères et Φ en maxwells *(ou en nombre de lignes)*, comme toujours.

"Ceci dit, pendant que le flux magnétique croissait, donnant alors naissance dans la bobine à une force contre-électromotrice égale à $Z\frac{d\Phi}{dt}$ *(soit algébriquement $-Z\frac{d\Phi}{dt}$ comme force électromotrice)* il a fallu que "ces abvolts résistants $-Z\frac{d\Phi}{dt}$ soient compensés par une force électromotrice aidante $+Z\frac{d\Phi}{dt}$ pour empêcher le courant de diminuer.

"Energétiquement parlant, il faudra accomplir le travail $A=(e)(i)(t)=(Z\frac{d\Phi}{dt}).(i).(1'')$ par seconde, *donc déployer la puissance* $W=\frac{dA}{dt}=(ei)=Z\,i\,\frac{d\Phi}{dt}\,\frac{\text{ergs}}{\text{seconde}}$ pour prévenir toute diminution du courant *(éq.1)*.

"Mais par hypothèse Z i est constant *(puisque nous nous proposons justement de maintenir i constant et que Z est absolument fixe)*.

"Intégrant l'équation précédente en prenant A=0 lorsque $\Phi=0$ c'est-à-dire négligeant le courant de régime *(l'effet joule donc la résistance étant supposés négligeables)*

$$\text{de } \frac{dA}{dt} = (Zi)\frac{d\Phi}{dt}, \text{ on tire}$$

$$A = (Zi)\,\Phi \qquad (\text{éq. } 2)$$

(De tenir compte de la résistance ne ferait qu'ajouter une constante aux deux membres par exemple $A' = A + R\,i^2 t = Z\,i\,\Phi + R\,i^2 t$; A' étant la somme du travail équivalent au chauffage du filament et du travail de compensation nécessaire à maintenir le courant constant).

"Ainsi donc A représente le *travail supplémentaire* en ergs qu'il *faut fournir pour maintenir le courant de i abampères à sa valeur primitive*, contrebalançant ainsi l'effet d'un flux qui croît de Φ maxwells et qui traverse Z tours du fil.

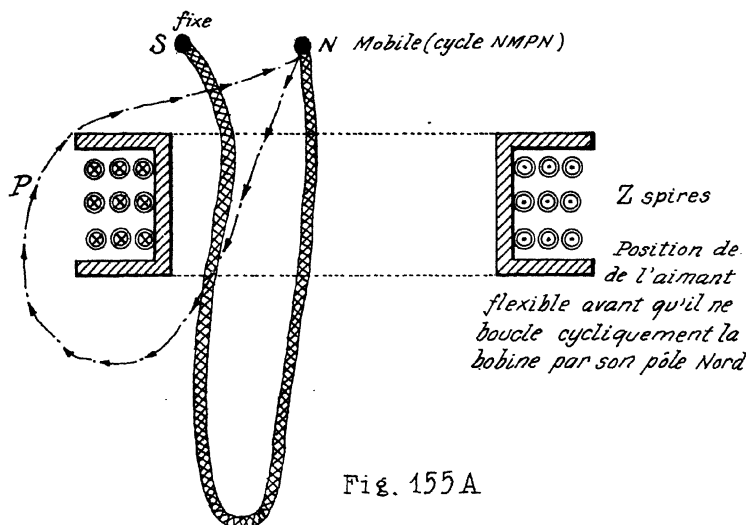



Fig. 155 A

"Soit donc *(figure 155 A)* une bobine de Z tours de fil. Imaginons NS être un *aimant très flexible* et supposons que le pôle Sud de l'aimant restant fixe, le pôle Nord par contre décrive ***le cycle en trait mixte*** dans le sens des flèches ***(figure 155 A)*** donc positivement puisque c'est suivant le sens des lignes force et qu'il s'agit d'une trajectoire de pôle nord *(force et chemin dans le même sens)*.

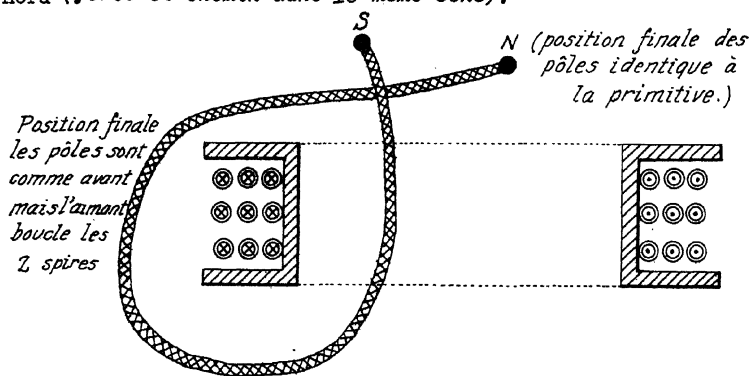



Fig. 155 B

Les positions des pôles relativement à la bobine sont les mêmes avant et après, mais cette fois l'aimant flexible ***"a bouclé les Z spires"*** positivement alors qu'***initialement il ne les bouclait pas.***

"Soit $\mathcal{Y}$ la force magnétomotrice le long du trajet *(cycle en trait mixte)* et soit +m la masse polaire nord du pôle qui a décrit le cycle fermé; alors, de par la définition de la force magnétomotrice: *(travail du champ ou somme des différences de potentiel pour un pôle nord unité), le travail accompli sur le pôle nord de (m) unités par le champ magnétique de la bobine sera* $A = m\,\mathcal{Y}$

"Mais ce travail accompli *par* le champ magnétique de la bobine *sur* le pôle mobile est égal au travail dépensé pour conserver au courant sa valeur constante en dépit de la force électromotrice induite dans la bobine par le pôle mobile.

"Ceci est évident si nous considérons que le travail accompli par le champ sur le pôle doit provenir de quelque part, cette énergie doit être fournie par une source: le générateur de courant et, puisque les conditions initiales et finales sont les mêmes en 155a et 155b *(identité des positions pour les deux pôles de magnétisme libre)*, la seule provenance possible d'énergie pour accomplir le travail sur le pôle nord mobile est le travail supplémentaire accompli par la pile pour conserver au courant sa valeur invariable.

Plus explicitement: "Les deux pôles de l'aimant flexible étant dans les mêmes positions avant et après ce mouvement, le nombre total des lignes de force *(ou le flux) qui émanent de ces pôles* et qui passent à travers la bobine est le même avant et après le mouvement *(parmi les lignes de la gerbe qui rejoint les deux pôles par l'extérieur de l'aimant les quelques unes qui pourraient boucler la bobine sont les mêmes)*.

"D'autre part *(tome I, pages 326 et 327)* le flux d'induction qui passe de pôle à pôle, *canalisé le long de l'aimant de par la perméabilité du fer*, est $4\pi m$ quelle que soit la forme de la gerbe des lignes de force qui ferme le circuit en joignant dans l'air les deux pôles, puisque *tout le flux passe par l'intérieur* de l'aimant.

"Donc le flux qui passe à travers la bobine après le mouvement *(qui a provoqué le bouclage du circuit) est accru de* $4\pi m$ par le dit mouvement cyclique du pôle nord.

"D'après l'équation 2, Z(i) ($4\pi m$) est le travail supplémentaire dépensé pour maintenir le courant constant malgré la variation du flux qui traverse la bobine, et comme ce travail est m fois la force magnétomotrice

$$m\,\mathcal{Y} = 4\pi i\, Z\, m$$

On déduit $\boxed{\mathcal{Y} = 4\pi i\, Z}$ tout comme par les autres méthodes, Mais de façon plus savoureuse pour l'ingénieur, du genre thermodynamique.

<u>No. 196</u>. Manifestation de la self induction lors de la fermeture et de l'ouverture des courants à force électromotrice constante.

(Pour le calcul, nous supposerons qu'il n'y a pas de fer dans le circuit, donc que le flux de self varie linéairement avec le courant.

$$L = \frac{\Phi}{I} = \text{constante}$$

1) Fermons le circuit composé d'une pile, d'une bobine sans fer et d'un interrupteur.

La loi d'Ohm $I = \frac{E}{R}$ n'est pas applicable à la période d'établissement du courant, car *cet établissement n'a pas lieu instantanément* vu l'existence de la force contre-électromotrice d'induction qui résulte de la variation du courant.

Nous devons recourir à l'équation différentielle pour considérer ce qui se passe à un instant donné *(pendant une durée tellement courte que* $i = i + di$ *et* $\frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} + d\left(\frac{di}{dt}\right)$*)*

E

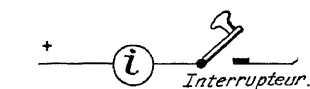
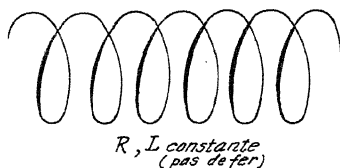



Fig. 156

Loi de Ohm-Kirchhoff pour cette boucle de circuit pendant cette très courte durée *(courte devant la période d'établissement du courant)*.
i force électrom. et Z forces contréelectrom.en série

$$E_{\text{Appliquée}} \quad - Z \frac{d\Phi}{dt}$$

chute ohmique de tension.

$$= R i$$

Introduisons le coefficient de self-induction:

$$Z \Phi = L i$$

(Remarque: les analogies hydrauliques des livres élémentaires portent l'élève à croire que puisque c'est le même flux qui traverse les Z spires, il semble absurde de le compter Z fois pour les Z spires!!

Défions-nous de l'analogie et raisonnons ainsi: dans chacune des spires il y a une force électromotrice d'induction égale à $-\frac{d\Phi}{dt}$ *et puisqu'il s'agit du courant fourni par un générateur extérieur et non pas d'un transformateur ou d'une dynamo, cette force est contre-électromotrice pour le courant de la pile.*

Comme toutes les spires sont en série (tome I, page 276) toutes ces forces contre-électromotrices s'ajoutent pour se coaliser contre la force électromotrice de la pile. Donc la force électromotrice résultante, celle qui va pouvoir vaincre l'effet joule sera bien $E - Z\frac{d\Phi}{dt}$)

Ce *n'est que pour abréger le langage* que les électriciens disent que "le flux total embrassé par une bobine de Z spires est Z fois celui embrassé par une spire"; se rappeler que cela *provient de l'addition des effets de self induction pour des spires en série.*

Intégrons cette équation différentielle avec les conditions aux limites imposées par la physique à savoir:
à l'époque t=o courant nul i = o et au bout d'un temps considérable d'établissement du courant, la valeur limite donnée par la loi d'ohm *(valeur de régime du débit d'électricité)*

:pour $t = \infty$ *(infini)* ; $i = \frac{E}{R}$, $\frac{di}{dt} \rightarrow 0$

Ordonnons l'équation et divisons tout par R

$$\frac{L}{R}\,\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$$

l'équation *sans second membre* donne en séparant les variables i et t

$$\frac{L}{R}\,\frac{di_o}{dt} + i_o = 0,$$

$$\frac{di_o}{i} = -\frac{R}{L}\,dt\ ,$$

d'où $d(\log_e i_o) = -\frac{R}{L}\,dt$, qui intégré donne $\log_e i_o - \log_e C = \frac{R}{L}t + C'$

ou en remontant à l'exponentielle

$$i_o \div C = e^{-\frac{R}{L}t + c'}$$

$$\text{soit } i_o = C\,e^{-\frac{R}{L}t + c'} \quad \text{et } i = i_o + \frac{E}{R} (\text{courant total})$$

Conditions aux limites *(boundary conditions)* le courant de fermeture du circuit (i) est évidemment nul au début puisque rien ne passe qu'il y ait pile ou non.

$t = o$, $i = o = C\,e^{c'} + \frac{E}{R}$ qui exige $\boxed{C' = o}$ et $C = -\frac{E}{R}$

Substituons donc à i dans l'équation complète *(avec second membre)* la solution trouvée $i_o = C\ e^{-\frac{R}{L}t}$ *(solution de l'équation sans second membre) augmentée de la solution de régime* $i_R = \frac{E}{R}$

$$\frac{L}{R}(C\,e^{-\frac{R}{L}t})(-\frac{R}{L}) + C\,e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \equiv \frac{E}{R}$$

Nous avons bien une identité *quel que soit t.*

Or on sait*(voir le Cours d'Analyse)*que *la solution générale d'une équation différentielle est la somme de la solution de l'équation sans second membre extra-courant et d'une solution particulière courant de régime).*

$$i = \underbrace{C\,e^{-\frac{R}{L}t}}_{i_o} + \underbrace{\frac{E}{R}}_{i_R}$$

Déterminons C par le fait que le courant total est nul à l'origine des temps

$$\text{zéro} = C\ (1) + \frac{E}{R} \quad ; \text{ d'où} \qquad \overline{-\frac{E}{R}} \text{ comme ci-dessus.}$$

La forme définitive du courant sera donc pour la fermeture du circuit

$$i_o + i_r = \boxed{i = \frac{E}{R}\,(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}$$

L'homogénéité de la formule exige que $\frac{L}{R}$ soit *en secondes* comme t

Effectivement $\frac{L}{R} = \vartheta$ est appelé la *"constante de temps du circuit"*terme qui prête à confusion puisque la durée de l'établissement du courant est théoriquement infinie.

Le graphique va nous indiquer ce que cela signifie: ϑ serait en effet *la durée requise pour atteindre la valeur de régime du courant*$(\frac{E}{R})$ *si la courbe était remplacée par sa tangente à l'origine*

La pente initiale vaut: $t/_{t=o}\ \frac{E}{R}(\text{zéro} + \frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}) \quad = \frac{E}{L}$

Et partant de zéro, si le courant croissait linéairement avec$(\frac{E}{L})$ *pour pente, il atteindrait la valeur de régime au bout du temps*

$$\theta = \frac{E \div R}{\text{pente}\ \frac{E}{L}} = \frac{L}{R}$$

En consultant une table de fonctions exponentielles ou indirectement avec une table de logarithmes on trouve qu'au bout du temps 4.6 θ le courant a atteint les (99/100) de la valeur de régime donnée par la loi d'ohm.

$$\left[\; i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot 4.6 \frac{L}{R}}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-4.6}\right);\right.$$

mais $-4.6 \log_{10} e = -4.6\,(0.43429) = -1.997734 = \bar{2}.00227$

et l'antilogarithme $e^{-4.6} \simeq 0.0105$

$$\left. i_{t=4.6\theta} \simeq \frac{E}{R}(1 - 0.0105) = 99/100\ \frac{E}{R} \;\right]$$

De même au bout du temps t=9.2 θ le courant ne diffère plus que de 10^{-4} soit 1/100 de 1% de sa valeur de régime.

(Avec un noyau de fer la self induction est plus grande mais les calculs précédents n'ont plus de sens puisque L varie énormement suivant la saturation du fer).

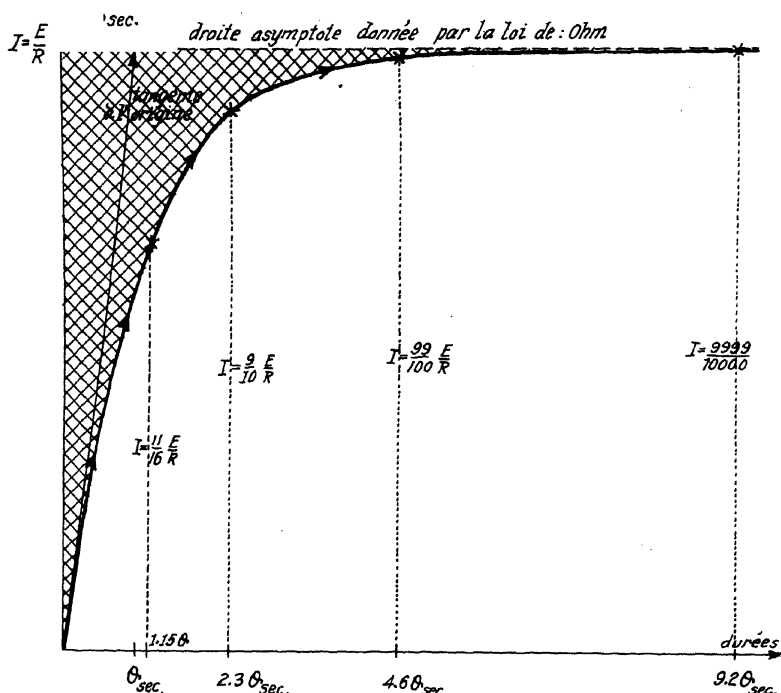



Fig. 157

2) Rompons le circuit après une circulation prolongée du courant de régime. *(fig. 158 et 159)*

Les effets de self induction qui ne se manifestaient plus lors du régime vont encore réapparaître et retarder l'annulation du courant.

(c'est pourquoi l'on compare la self à l'inertie, de même que l'inertie d'un mobile ne se manifeste que dans les varia-

tions vectorielles de vitesse. de même la self induction d'un circuit ne témoigne sa présence que lors des variations du courant).

Il y a une manière dangereuse de rompre un circuit qui a de la self, c'est celle qui consiste à lever la clef de l'interrupteur: en effet *si cette rupture est rapide (due à un ressort comme dans la bobine d'induction, voir plus loin Note II)* la force électromotrice d'induction due à cette rupture rapide peut être énorme comparée à la force électromotrice de la pile puisque $-z\frac{d\Phi}{dt}$ devient très grand si dt est petit surtout s'il y a du fer dans la bobine.

On a vu des ruptures d'isolants et des secousses violentes lors de l'ouverture de circuits d'une tension continue inférieure aux tensions d'éclairage, c'est que la force électromotrice de rupture *peut être des milliers de fois celle de la batterie d'alimentation.*

Une autre manière d'opérer qui n'est dangereuse ni pour l'opérateur ni pour les contacts ni pour les isolants, *(manière décrite par M.Fabry)* a de plus *l'avantage de permettre une analyse plus complète du phénomène: elle consiste dans l'emploi d'un interrupteur qui ne coupe le circuit d'alimentation qu'après avoir courtcircuité la bobine de self.*

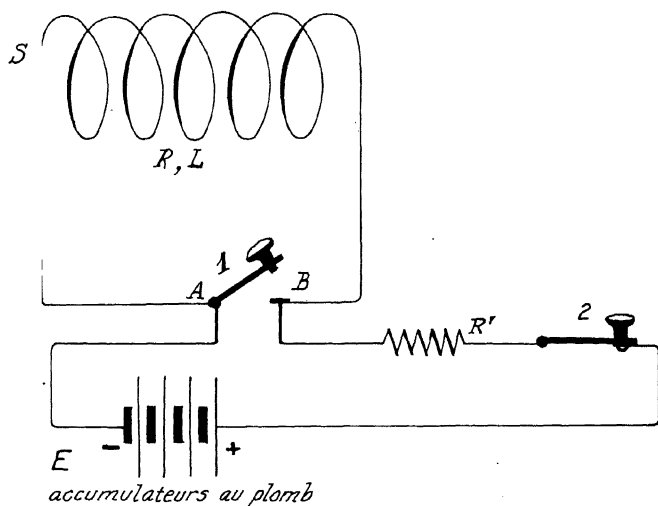



Fig. 158

Soit une bobine ayant une self notable *(L grand)* et une faible résistance *(R petit)* après avoir fermé la clef 2 et ouvert la clef 1 pendant un certain temps on a eu l'établissement du courant étudié précédemment puis le courant de régime.

Pour rompre le circuit *fermons d'abord la clef 1 avant d'ouvrir la clef 2 (on peut s'arranger pour que l'ouverture de 2 ne puisse se faire avant que 1 soit fermée);R'est* une résistance de protection grande devant R d'autant plus nécessaire que la source est en général une batterie d'accus au plomb de résistance très faible.

Comme la force électromotrice de la batterie est négligeable devant les forces de self induction nous pourrons négliger E et traiter le problème comme si d'avoir jeté le pont AB équivalait "à séparer la bobine du reste du circuit sans avoir coupé le circuit". Nous n'aurons donc pas à nous soucier de la rupture ultérieure du circuit d'alimentation lors de la levée de la clef 2.

Il n'y a plus de pile dans le circuit fermé de grande self ABSA, cependant le courant va continuer à passer au lieu de tomber brusquement à zéro.

Initialement le courant avait la valeur de régime $t = o$ $I = \frac{E}{R}$ *(chaque fois qu'il y a courant variable on désignera la valeur de régime par une majuscule).*

Au bout d'un certain temps t, le courant a diminué tombant à $i < I$

A cet instant t, la force électromotrice d'induction est $-L\frac{di}{dt}$, comme elle est seule dans le circuit, la loi d'Ohm-Kirchhoff donne

$$- L\frac{di}{dt} = R\,i$$

C'est l'équation "sans second membre" $L\frac{di}{dt} + Ri = 0$ que nous avons déjà intégrée, mais les conditions aux limites sont différentes.

$$i_o = C\,e^{-\frac{R}{L}t + C'}$$

$$t = o \qquad i_o = C e^{C'} = \frac{E}{R}$$

$$t = \infty \qquad i_o = \text{zéro} = C e^{-\infty}$$

$$i_o = (C e^{C'})(e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = I e^{-\frac{R}{L}t}$$

Le graphique suivant indique l'allure de la courbe d'évanouissement du courant *(évanouissement asymptotique).*

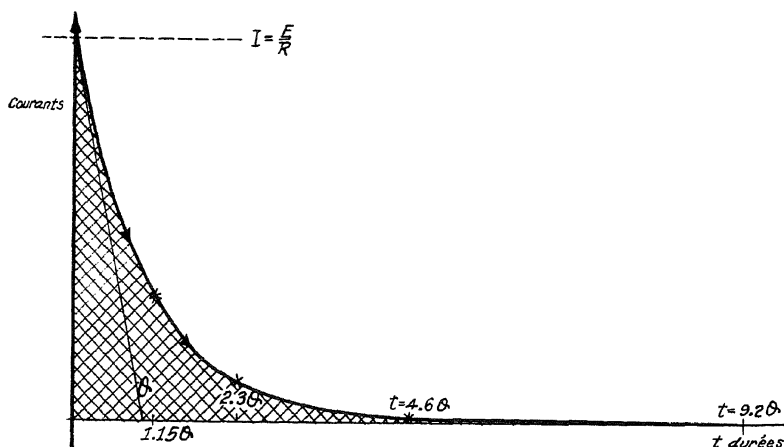



Fig. 159

La tangente à l'origine $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{I}{\theta}$

Et l'on voit que *si le courant décroissait en continuant à tomber d'aussi à pic qu'à l'origine* au bout de θ seconde il serait nul.

Pour des comparaisons de courbes d'extracourants d'ouverture ou de fermeture, il y aurait avantage à utiliser une échelle logarithmique puisque les exponentielles seraient alors des lignes droites et l'interpolation immédiate.

A la note II le lecteur trouvera *(à propos de la bobine d'induction)* une application intéressante du fait que si la rupture d'un circuit est plus rapide que sa fermeture, la force électromotrice induite dans un sens peut-être immense devant celle dans l'autre sens: ce qui est constant dans les deux sens c'est la quantité d'électricité induite *(indépendante de la vitesse de variation du flux)*.

No 197. Energie emmagasinée dans le champ magnétique.

Lorsque le courant a passé de $\left(I=\frac{E}{R}\right.$ à $\left.(zéro)\right)$ il y a eu passage de courant et chauffage de la résistance R donc *disparition d'énergie par effet calorifique Joule* et cela sans qu'une source extérieure eut fourni quoi que ce soit.

Cette constatation nous amène à la conclusion que *l'existence d'un champ magnétique coexiste avec une certaine énergie magnétique en réserve* qui lorsqu'elle disparaît donne de la chaleur.

Il a fallu *pour la payer* vaincre la force contre-électromotrice d'induction lors de la fermeture du circuit, fournir le travail:

$$\int_{i=0}^{i=I} \underbrace{\frac{L\,di}{dt}}_{\text{ab volts}} . \underbrace{i\,.\,dt}_{\text{ab amp. sec}} = \int L\,i\,di = \frac{1}{2} L I^2$$

Voyons si nous la retrouvons en chauffage lors de l'ouverture du circuit:

$$\int_{i=I}^{i=0} Ri\,.\,i\,.\,dt = RI^2 \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-\frac{2R}{L}t}\,dt$$

$$= -\frac{L}{2R}\,RI^2\left[e^{-\frac{2R}{L}t}\right]_{t=0}^{t=\infty} = +\frac{1}{2} L I^2$$

Il y a donc tout lieu de dire que l'énergie magnétique emmagasinée est

$$\boxed{A = \frac{1}{2} L I^2}$$

puisque c'est ce que nous avons payé pour vaincre la force contre-électromotrice d'induction lors de l'établissement du courant, et que c'est aussi ce que nous avons reçu en chauffage lors de l'épuisement de cette énergie par extinction du courant lors du courtcircuitage de la bobine.

Cette formule est souvent rapprochée de $1/2MV^2$ et de $1/2K\Omega^2$ énergies cinétiques de translation et de rotation pour marquer l'analogie entre la self et l'inertie.

Le lecteur peut retrouver l'expression de l'énergie magnetique en donnant une forme énergétique à l'équation différentielle en multipliant les abvolts par des abcoulombs idt

$$Ri \qquad\qquad - L\frac{di}{dt}$$

$$(Ri)idt \quad = \quad (E)idt \;-(L\,\frac{di}{dt})idt$$

ou $E\,i\,dt \qquad R i^2 dt \; + \; L i\,di$

énergie fournie par le génerateur pendant la durée dt.	*chauffage (effet Joule) énergie perdue pendant dt analogue au frottement.*	*augmentation d'énergie magnétique réserve d'énergie cinétique analogue à l'énergie cinétique de l'inertie.*

Dans tout ceci, L a été considéré comme constant ce qui signifie qu'il n'y a *pas de fer, ni de déformation du circuit* ni de variation de flux due au voisinage; autrement, il faudrait tenir compte du terme $\left(\frac{dL}{dt}\right) i^2\, dt = (dL) i^2$

No 198. Le galvanomètre balistique et les courbes d'hystérésis. *(fig. 160 et 161)*

Lorsqu'un galvanomètre est *alourdi (en disposant par exemple deux billes de plomb à un décimètre chacune de l'axe de suspension)* il ne donne plus une déviation instantanée en suivant les variations du courant, mais *une déviation unique proportionnelle à la charge d'électricité qui le traverse.*

Comme les artilleurs appelaient *balistique* le pendule qui leur donnait *"la quantité de mouvement" d'un balistique,* les électriciens ont baptisé de *balistique* le galvanomètre à grand moment d'inertie qui leur donne *"la quantité d'électricité" que l'on décharge à travers l'appareil.*

(On appelle oscillographe les galvanomètres qui à l'opposé ont une très faible inertie et qui peuvent suivre les variations des courants de grande fréquence, ces appareils sont aujourd'hui détrônés par les oscillographes cathodiques dont l'inertie est bien inférieure aux suspensions les plus délicates.

Le galvanomètre balistique est l'appareil indispensable pour mesurer le vecteur induction *(champ dans l'air)* qui règne dans l'entrefer d'un circuit magnétique et ceci parce que ce qui ne dépend pas de la rapidité avec laquelle s'opère une variation donnée de flux c'est la quantité d'électricité induite que donne le balistique.

Une bobine plate comprenant Z' tours de fil d'aire moyenne a est électriquement connectée aux bornes d'un galvanomètre balistique et mécaniquement peut tourner autour d'un axe de façon à pouvoir sauter de l'entrefer où règne un vecteur induction magnétique B à une région pratiquement non magnétique.

Un ressort est chargé de faire ainsi "sauter" la bobine de l'entrefer à l'extérieur. Si l'on utilisait un galvanomètre ordinaire, il faudrait savoir exactement la durée de ce "saut" pour pouvoir intégrer graphiquement Q induite $= \int_0^t i \cdot dt$ et la connaissance de cette durée du saut ne peut être fixée une fois pour toutes vu que le ressort perd à la longue de son élasticité.

C'est ce qui fait préférer le galvanomètre très inerte dit "balistique". Le flux total qui passe dans la bobine lorsqu'elle est dans l'entrefer est Z' a B; après être sortie de l'entrefer, la bobine n'embrasse plus de flux.

Donc $\quad \Delta\Phi = 0 - Z' a B$

$$v_{moyen.} : -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad \frac{Z' a B}{\Delta t}$$

$$i_{moyen.} \quad \frac{Z' a B}{\Delta t(\rho + \rho' + \rho'')}$$

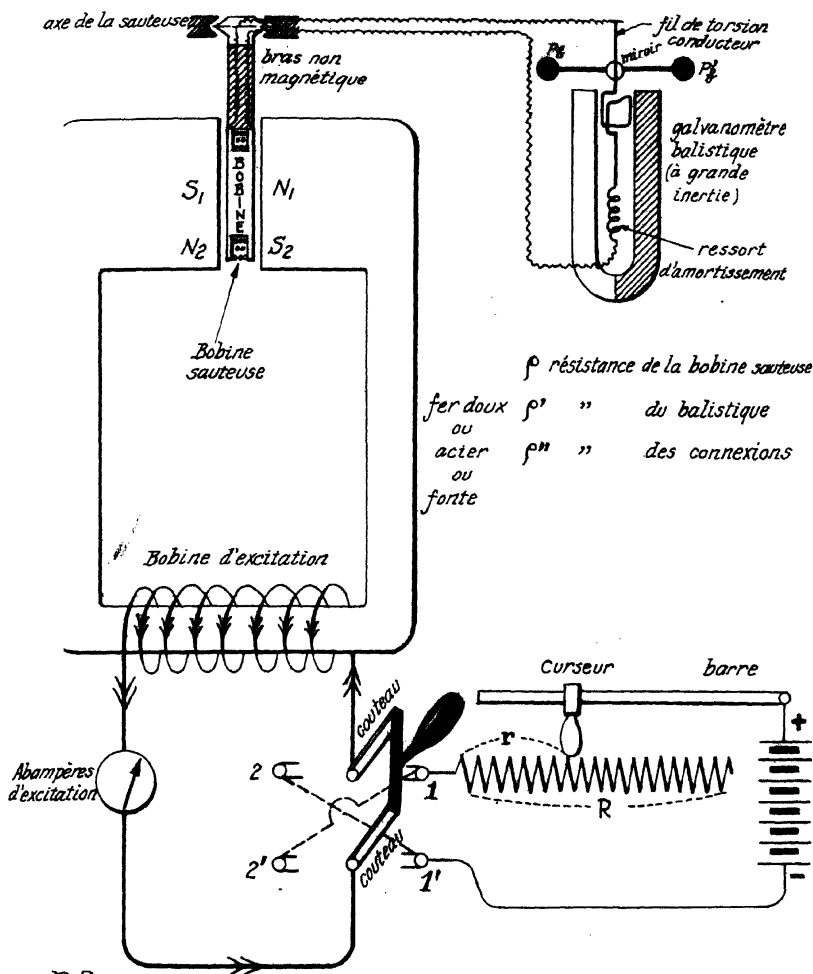
$$Q_{induite} = \int dQ = \int i\,dt = \frac{Z' a B}{\rho + \rho' + \rho''} = \left(\frac{Z' a}{\rho + \rho' + \rho''}\right) B$$

axe de la sauteuse
bras non magnétique
fil de torsion conducteur
miroir
galvanomètre balistique (à grande inertie)
ressort d'amortissement
BOBINE
S_1
N_1
N_2
S_2
Bobine sauteuse
ρ résistance de la bobine sauteuse
fer doux ou acier ou fonte
ρ' " du balistique
ρ" " des connexions
Bobine d'excitation
Curseur
barre
couteau
couteau
Abampères d'excitation
2
2'
1
1'
r
R
+
−
Parcours de l'électricité induite si les couteaux en 1 et 1' et la bobine sautant de l'entrefer à l'extérieur.
2 appareils pou. faire varier le courant d'excitation de +I à −I dans le sens désiré.
1) Voir tome I page 272 pour le fonctionnement de l'inverseur (reversing switch)
2) Le curseur de la barre permet à volonté de faire varier (r) la résistance en série de 0 à R.

Fig. 160

Avec un balistique étalonné, d'après la déviation globale on connaîtra Q, d'où B, et cela pour chacune des valeurs de B.

Quant *au sens de l'électricité induite*, si les couteaux sont en 1 et 1', le pôle nord N_1 se trouve à droite de l'entrefer et l'électricité induite devant tendre lors du saut à s'opposer à la diminution du flux, le sens de son parcours doit être [symbole] tel qu'il compense la variation de flux en produisant un flux de même sens que celui qui diminue.

Le champ magnétisant est celui de la bobine d'excitation; il est parfaitement connu en grandeur et en sens de par les lectures de l'ampèremètre d'excitation. Si l'ampèremètre est un thermique *(non polarisé)* il n'y a pas d'ambiguité puisque grâce à l'inverseur on sait parfaitement dans quel sens on le fait passer.

Ex: position 1,1' des couteaux sens ⇛ du courant.

Sachant bien calculer B *(induction)* et H *(champ)* passons à l'hystérésis.

Les courbes d'hystérésis (cycle d'aimantation).

Il faut dépenser un certain travail pour magnétiser le fer *(et un plus grand pour l'acier)*. *Quand on le magnétise électriquement* en lançant un courant continu dans un solénoïde dont il est le noyau, une force contre-électromotrice est induite dans la bobine magnétisante par le fait de l'accroissement de l'aimantation du barreau, et *le travail accompli en maîtrisant cette force contre-électromotrice en forçant le courant à passer malgré elle* est précisément le travail dépensé pour magnétiser le fer,.

(Ceci comprend aussi en général le travail accompli pour produire les courants de Foucault dans le barreau de fer; nous supposerons que l'action démagnétisante des courants de Foucault est négligeable ce qui suppose que le barreau au lieu d'être en fer massif est un paquet d'aiguilles de fer isolées les unes des autres par du papier, du coton, de la soie ou du vernis, cet isolement a le même avantage que le feuilletage des induits).

(Au tome I, pages 309, 310) nous avons vu que pour un barreau court *(donc ici pour un paquet de vermicelle de fer isolé court)* l'action démagnétisante était notable; on doit donc pour éviter cette autre complication supposer ou bien le barreau *(ou paquet de fils) très long* devant son diamètre moyen et la bobine aussi longue et régulièrement enroulée, ou bien l'échantillon de fils de fer recourbé en fer à cheval ou comme un anneau de chaîne légèrement ouvert, la bobine magnétisante étant régulièrement enroulée et aussi longue.

Quant on connectera la bobine d'excitation à la batterie *(ou à toute autre source continue)*, le courant dans la bobine part de zéro, et s'élève pendant que le fer se magnétise; le flux magnétique *(d'induction)* qui traverse le fer *s'accroît* à un taux $\frac{d\Phi}{dt}$ *(à un instant donné)* où le courant a la valeur i et si le nombre total de spires de la bobine d'excitation est Z, on a $- Z\frac{d\Phi}{dt}$ pour expression de la force contre-électromotrice d'induction, de sorte que la puissance consommée par l'excitation *(puissance que l'on doit ajouter à l'effet joule $R\,i^2$)* est

$$\left(+ Z \frac{d\Phi}{dt}\right) i = W_{magnétisante} = \frac{dA_{magnétisante}}{dt}$$

Et le travail d'aimantation qu'il faut dépenser *(en plus de l'effet joule $R\,i^2 dt$)* a pour expression pendant la durée dt

$$dA = Z\, i\, d\Phi$$

Mais $\Phi = B\,a$ d'où $d\Phi = a\,(dB)$

Et pour le fer de longueur importante comparée au diamètre du paquet,

$$H = \frac{4\pi Z i}{L}$$

(L longueur commune du fer et de la longue bobine d'excitation).

Le travail d'aimantation prend donc la forme

$$dA_{aimantation} = Z \underbrace{\left(\frac{HL}{4\pi Z}\right)}_{i_{excitation}} \underbrace{(a \cdot dB)}_{d\Phi}$$

$$= \frac{La}{4\pi} H \cdot dB$$

[*Nous supposons implicitement pour ne pas compliquer la formule que l'entrefer a la même section droite que le paquet de fils de fer isolés; autrement (s'il y avait un épanouissement comme sur la figure) on mesurerait une induction différente de celle qui intervient dans le travail d'aimantation: vu que le flux d'induction se conserve si l'épanouissement était en fer de surface 10 fois la section droite en fer dans la bobine, il faudrait multiplier par 10 les indications du balistique:*

$$d\Phi = (\underbrace{10\,a}_{\text{section commune d'entrefer et de bobine sauteuse}})\left(\frac{dB}{10}\right) = \underbrace{a}_{\text{section en fer du noyau de la bobine d'excitation}}(dB)$$

si l'on prenait trois différentes sections droites: l'une "a" de noyau, l'autre "a'" d'entrefer, l'autre "a"" portion de section de l'entrefer qui est embrassée par la spire moyenne ce que mesure le balistique est

$$a'' \, dB \text{ entrefer} = (dQ \text{ induite})\left(\frac{\rho + \rho' + \rho''}{Z'}\right)$$

et le flux d'induction varie dans tout le circuit de la quantité:

$$a' \, dB \text{ entrefer} = a \, dB \text{ noyau}$$

$$dA \text{ aimantation} = \frac{L_{bobine\ excit.} \, H_{excitation} \; a\,(dB)_{noyau}}{4\pi}$$

$$= \frac{L\,H\,a'\,(dB_{entrefer})}{4\pi}$$

$$= \frac{L\,H}{4\pi}\, a''\, dB_{entrefer} \, \frac{a'}{a''}$$

$$= \frac{L\,a\,H}{4\pi}(a''\, dB_{entrefer}) \, \frac{a'}{a''\,a}$$

Nous n'avons plus affaire qu'à des quantités mesurables: L a volume "en fer" de l'échantillon magnétisé

$$H_{champ} = \frac{4\pi Z i}{L} = \left(4\pi \frac{Z}{L}\right) i_{excitation}$$

$$a'' \, dB_{entr.} = dQ_{induite} \, \frac{\rho + \rho' + \rho''}{Z'}$$

et au besoin le facteur de correction $\frac{a'}{a''\,a}$]

No 199. Représentation graphique du travail d'aimantation.

Représentons sur un papier quadrillé rectangulaire **1** gauss par d largeurs de carré *(échelle horizontale des champs H* et par δ hauteurs de carré **1** gauss *(echelle verticale des inductions B)*

$$H = \left(\frac{1}{d}\right) x = \frac{x}{d}$$
$$B = \left(\frac{1}{\delta}\right) y = \frac{y}{\delta}$$
$$\int dA_{aimantation} = \frac{(\text{volume de fer})}{4\pi(d)(\delta)} \int x \cdot dy$$

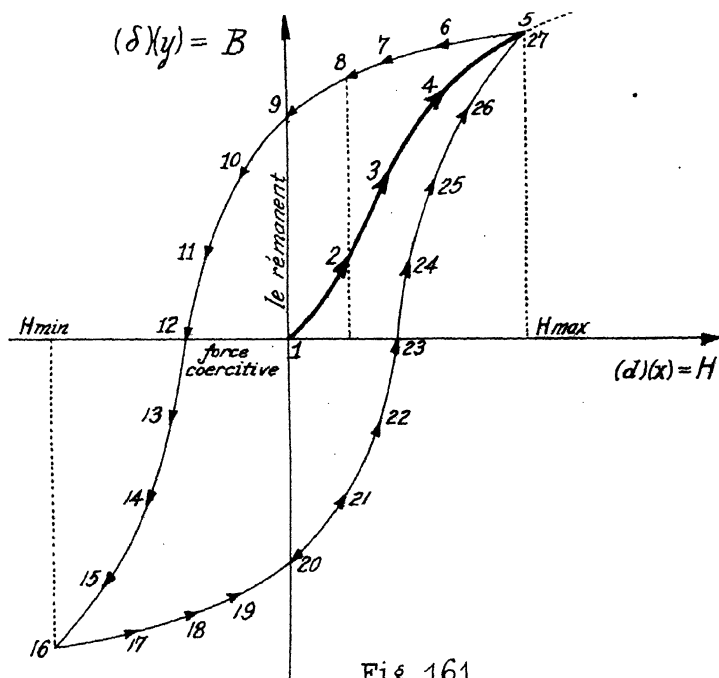



Fig. 161

En manipulant le curseur du rhéostat *(vers la gauche)* nous faisons croître progressivement le courant de zéro à i max. et par suite le champ de zéro à H max.

Pour chacune des positions du curseur, faisons sauter la bobine (de l'entrefer à l'extérieur), nous connaîtrons ainsi B pour chacune des valeurs du champ et nous tracerons la courbe 1,2,3,4,5, portion de la courbe "en genou" que l'on obtient si le fer *a été chauffé jusqu'au "point de Curie" avant l'expérience (de façon à être vierge de tout magnétisme).*

Sans inverser le courant, augmentons la résistance et diminuons le champ; nous obtenons la courbe 5, 6, 7, 8, 9, et, quand le champ a été ainsi annulé, la sauteuse indique un *magnétisme remanent (faible pour le fer, grand pour l'acier trempé).*

Inversons le courant puis diminuons la résistance, nous obtenons la courbe 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Le champ antagoniste qui a annulé le magnétisme est dit *"la force coercitive"*; diminuons le courant, 16, 17, 18, 19, 20.

Inversons à nouveau et supprimons progressivement la résistance, nous obtenons la courbe 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.

Comme $\oint x\,dy$ *(ou* $-\oint y\,dx$*)* représente l'aire de la courbe fermée *(cycle)*, en l'évaluant au planimètre, ou en comptant les petits carrés, ou en pesant le papier limité par l'aire après l'avoir découpée aux ciseaux, on aura la *perte par hystérésis par cycle*

$$\frac{\text{volume du fer en cm}^3}{4\pi(\delta)(d)} \quad (\textit{aire du cycle})$$

Exemple: un échantillon de fils de fer a été soumis à un essai pour voir la perte par hystérésis dans les limites de variation de champ auquel le fer est soumis dans un transformateur.

Les échelles du graphique sont: $5\,\frac{gauss}{pouce}$ en abscisses et

$2000\ \frac{maxwells}{cm^2} \div$ pouce en ordonnées. $(d = \frac{1}{5}\ ,\ \delta = \frac{1}{2000})$

L'aire de la boucle est 1.382 *(pouces)*^{2}

Le volume du fer est de 600 pouces cubes "en fer" *(déduction faite des isolants)*

La fréquence est de $60\,\frac{périodes}{seconde}$; trouver que la puissance

consommée par hystérésis est de **64.9 *watts.***

*Note I: La théorie des potentiels magnétiques.

Nous allons développer *sous forme analytique* le No 230 du tome I et commencer par les notions de champ de vecteur et notions annexes.

En un point un vecteur H par exemple a trois composantes par projection sur trois axes rectangulaires H_x, H_y, H_z

$$|H| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} \quad (\textit{théorème de Pythagore})$$

Ligne de force: C'est une ligne qui est la trajectoire du mouvement spontané d'une quantité positive *(un pôle Nord en magnétique)* En tout point cette ligne est tangente au champ; donc son équation différentielle est

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z}$$

Sens d'une ligne de force: celui du vecteur champ auquel elle est tangente.

Tube de force: surface latérale délimitée par la gerbe des lignes de force qui rencontrent un contour fermé donné.

Travail (ou circulation, ou intégrale curviligne).

Pour une petite trajectoire de longueur d'arc dl de projections dx, dy, dz; $(dl)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
le travail du vecteur est le produit scalaire du vecteur par l'arc

$$d\,A = \mathbf{H} \cdot dl = (H)\ (dl)\ \cos\ (\widehat{H,\ dl})$$

soit encore $\quad = H_x dx + H_y\,dy + H_z\,dz$

Pour toute une ligne, $A = \int_{Ligne} \mathbf{H} \cdot dl$

et ce travail dépend généralement de la ligne suivie et non seulement de ses extrémités.

Quand ce travail ne dépend que des extrémités et non du chemin qui relie les extrémités on dit avoir affaire à un potentiel uniforme et que *le champ dérive d'un potentiel uniforme*

$$H_x = -\frac{\delta V}{\delta x}; \quad H_y = -\frac{\delta V}{\delta y}; \quad H_z = -\frac{\delta V}{\delta z}$$

Alors $\quad d\,A = -\,dV \quad$ et $A = V_A - V_B$

Flux de force: à tout élément d'aire d a, dans une région où règne le vecteur H, si N est la normale positive de l'aire da, correspond un *flux* de vecteur

$$d\Phi = H\,.\,d\,a = (H)\,(da)\,\cos\,(\widehat{H,\,N})$$

Analytiquement, si l, m, n sont les cosinus directeurs de la direction positive de normale *(généralement vers l'extérieur de la surface fermée)*

$$d\Phi = (H_x l + H_y m + H_z n\,)\,da$$

Conservation du flux (revoir d'abord le No 222, tome I)

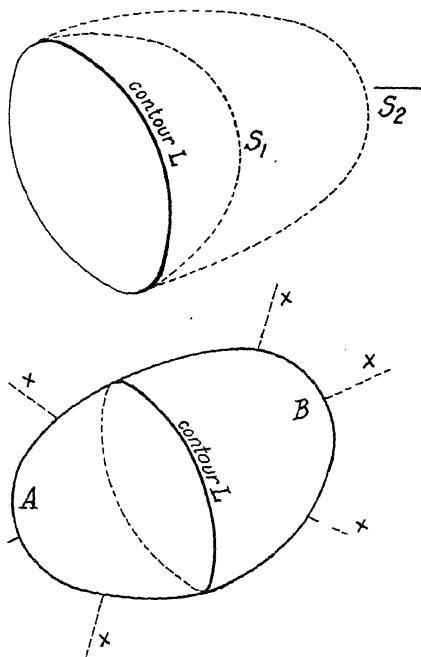



Fig. 162

Lorsque le flux de vecteur est le même pour toutes les surfaces S_1, S_2...etc...limitées par le même contour L, "on dit que le champ obéit à la loi de conservation du flux".

Si la surface considérée est fermée et que le flux se conserve, le flux Φ qui entrera par la partie A, à gauche du contour L, sera le même en valeur absolue que celui Φ qui entrera par la partie B à droite du même contour L et comme on compte positivement les normales vers l'extérieur on aura

$$-(\Phi_A) + (\Phi_B) = 0$$

(le flux qui entre égalant celui qui sort, algébriquement parlant le flux qui sort négativement et celui qui sort positivement ont une somme nulle)

On exprime analytiquement ce fait en disant que la divergence du vecteur est nulle

$$\frac{\delta H_x}{\delta x} + \frac{\delta H_y}{\delta y} + \frac{\delta H_z}{\delta z} = 0$$

Démontrons cette proposition sur un exemple simple.

Soit un contour fermé ABCD rectangulaire. Considérons deux surfaces qu'il limite

1) l'aire ABCD = (dy)(dz)

2) le reste de la boîte pointillée *(prisme droit rectangle)*

Fig. 163

flux qui sort de ABCD: $-(H_x)\,dy\,dz$ si le sens positif de normale est à gauche.

flux qui sort

:de ABKG : $(H_{y+dy})\,dz\,dx = (H_y + \frac{\delta H_y}{\delta y} dy)\,dz\,dx$

:de CDEF: $-H_y\,dz\,dx$

:de KGFE: $(H_{x+dx})\,dy\,dz = (H_x + \frac{\delta H_x}{\delta x} dx)\,dy\,dz$

:de AKED: $+(H_{z+dz})\,dy\,dx = (H_z + \frac{\delta H_z}{\delta z} dz)\,dy\,dx$

:de BGFC: $-H_z\,dy\,dx$.

Flux total sortant des cinq côtés de la boîte non hachurés

$$\frac{\delta H_y}{\delta y} dy\,dz\,dx + H_x\,dy\,dz + \frac{\delta H_x}{\delta x} dx\,dy\,dz + \frac{\delta H_z}{\delta z} dz\,dy\,dz$$

Ecrivons que ce flux compté positivement pour
n de vecteurs vers la droite est égal à celui
urée avec le même sens positif à droite du con

$$+H_x\,(dy\,dz) = \left(\frac{\delta H_y}{\delta y} + \frac{\delta H_x}{\delta x} + \frac{\delta H_z}{\delta z}\right) dx\,dy\,dz + H_x\,dy\,dz$$

d'où la divergence nulle

$$\frac{\delta H_y}{\delta y} + \frac{\delta H_x}{\delta x} + \frac{\delta H_z}{\delta z} = 0$$

On aurait eu le même résultat en écrivant que le flux total qui sort de toute la boîte est nul.

$$-H_x\,dy\,dz + (H_y + \frac{\delta H_y}{\delta y}\,dy)\,dz\,dx - H_y\,dz\,dx + (H_x + \frac{\delta H_x}{\delta x}\,dx)\,dy\,dz +$$
$$+ (H_z + \frac{\delta H_z}{\delta z}\,\delta z)\,dy\,dx - H_z\,dy\,dx = 0$$

Potentiel vecteur et rotationnel: Si l'on a un champ du vecteur H à flux conservé, on peut lui associer un autre champ d'un vecteur E tel que *le flux du vecteur H à travers une surface quelconque S soit égal au travail du vecteur E le long d'un contour L délimitant la surface.*

$$H\begin{cases}H_x\\H_y\\H_z\end{cases}\left(\text{rotationnel de } E\right) \quad \text{et} \quad \begin{cases}E_x\\E_y\\E_z\end{cases}\left(\text{potentiel vecteur de } H\right)$$

Les composantes de ces deux vecteurs sont liées par les relations:

$$H_x = \frac{\delta E_z}{\delta y} - \frac{\delta E_y}{\delta z}$$

$$H_y = \frac{\delta E_x}{\delta z} - \frac{\delta E_z}{\delta x} \qquad H_y = \frac{\delta E_x}{\delta z} - \frac{\delta E_z}{\delta x}$$

en symboles vectoriels: H = rot E

Nous utiliserons ceci dans la Note IV.

Convention de signe:

Pour fixer *le sens positif du parcours le long du contour L relativement au côté positif de la surface* S on convient de tourner un tire-bouchon *(vis à droite)* dans le sens positif du contour et de prendre pour normale positive le sens de la translation qui en résulte pour le tire-bouchon.

Champs newtoniens: Nous avons vu *(Nos 222 a 232 tome I)* que pour un champ obéissant à la loi de l'inverse du carré de la distance $H = \frac{m(1)}{r^2}$, qu'il y avait un potentiel $\Upsilon = \frac{m}{r}$ et que le flux à travers une surface fermée entourant le centre de forces m valait

$$\Phi = 4\pi m$$

Si L est un contour fermé, lui, et S une surface non fermée limitée au contour L telle qu'un *observateur voie sa face négative, lorsqu'il se trouve au centre de force* sous un angle solide ω

$$\Phi = \left(\omega_{\text{omega angle solide}}\right) m$$

Densité cubique: Pour l'électricité, il peut y avoir des charges positives par exemple en plus grand nombre que les charges négatives, on appelle alors *densité cubique ou volumique* $\rho = \frac{dm}{dv}$ le quotient de la somme algébrique des charges par le volume qui les contient

(pour le magnétisme comme il y a toujours autant de pôles nord que de pôles Sud $\rho \equiv 0$ *)*

Traduisons analytiquement le théorème de Gauss:

No 222 tome I $\quad \Phi = 4\pi m = 4\pi \rho \; dv$

$$= 4\pi \rho (dx)(dy)(dz)$$

Mais nous avons vu tout à l'heure que $\Phi =$ *(divergence de H)* dx dy dz.

En égalant les deux expressions du flux qui sort de l'élément de volume dx dy dz, après avoir divisé par dx dy dz, on a:

$$\frac{\delta H_x}{\delta x} + \frac{\delta H_y}{\delta y} + \frac{\delta H_z}{\delta z} = 4\pi \rho$$

(en magnétisme $\rho=0$ donc la divergence de l'induction magnétique est toujours nulle, donc le flux d'induction magnétique est conservatif)

Action du champ magnétique produit par un pôle nord unité (supposé isolé) sur un circuit rigide.

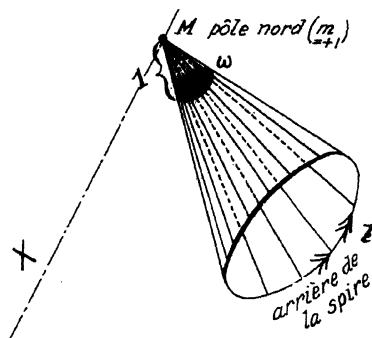



Fig. 164

De M pour le sens du courant indiqué, on voit *la face négative du circuit.*

Le flux à travers le circuit a pour valeur $\Phi = -\omega$

(m= +1); cette relation est algébrique à condition de *regarder l'angle solide comme positif si de M on voyait la face positive du circuit.*

(Ici $\omega<0$ $-\omega>0$ et les lignes de champ étant dans le sens de la translation du tire-bouchon qui tourne comme le courant, le flux est positif).

Cette expression ne change pas si pôle et circuit conservent leur même position relative *(ex: faire tourner le circuit autour d'un axe MX passant par M ne change rien)*

Puisqu'un tel déplacement ne produit aucun travail des forces électromagnétiques

$$\Delta A = i\Delta\Phi = i \quad \textit{(zéro)}$$

donc la somme des couples des forces appliquées au circuit relativement à tout axe de rotation passant par M est nulle.

Donc le système des forces se réduit à une force*(sans bras de levier)* passant par M

(Revoir pages 339 et 340, tome I)

Si le circuit passe d'une position où l'angle solide est ω à une autre où il est ω', les forces qui agissent sur le circuit exercent un travail par unité de pôle ou potentiel

$$\mathcal{V} = i(\omega - \omega')$$

[*s'il y avait un pôle nord de m unités le travail serait*

$$A = m\, i(\omega - \omega')$$]

on exprime ceci en disant que *le champ magnétique a pour potentiel $i\,\omega$*

Force magnétomotrice déduite de la théorie des potentiels.

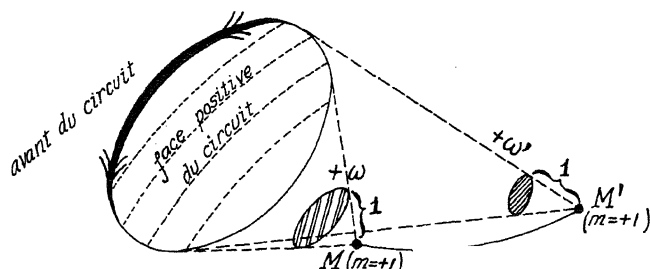



Fig. 165

Si un pôle nord unité va de M en M', ce pôle est à chaque instant soumis à une force qui est numériquement égale*(en dynes)* à ce que l'on appelle le champ*(en gauss)* produit par le circuit.

Quel est le travail de ce self champ du circuit sur ce pôle nord unité *(ou encore quelle est la différence de potentiel magnétique $\Delta\mathcal{V} = \mathcal{V}_{M'} - \mathcal{V}_M$)*

Le problème est résolu si l'on réfléchit que *seulement les différences de position relative du circuit et du pôle* influent sur le travail.

Supposons alors M fixe et déplaçons le circuit de façon que les positions successives du circuit soient relativement au pôle les mêmes*(que lorsque le circuit était immobile et le pôle mobile de M en M')*

Mais alors ce sont les forces agissant sur le circuit de par le flux émis par le pôle nord unité qui effectuent un travail, et ce travail vaut

$$+ i\,\Delta\Phi = + i\left[(-\omega') - (-\omega)\right] = i\,(\omega - \omega')$$

Donc que ce soit le pôle qui bouge ou le circuit, le self champ magnétique du circuit a pour potentiel $\boxed{\mathcal{V} = i\,\omega}$

Le reste est de la géométrie *(voir le cours d'Analyse pour la démonstration)* .

De même que l'angle plan en un point n'est défini qu'à K 2π radians près (K entier)

ex : $\theta = 12° \pm K(2\pi)$

y|

zθ=

(K désignant le nombre de tours accomplis autour de l'axe des z, le nombre de boucles comprenant l'axe oz).

De même aussi *l'angle solide en un point n'est défini qu'à K (4π)stéradians près* et par suite

$$\oint d\mathcal{V} = i\,(0 \pm K4\pi)$$

Les angles solides diffèrent d'une sphère de rayon 1 alors que les angles plans différaient d'un cercle de rayon 1).

"L'intégrale de ligne du champ magnétique ou "force magnétomotrice est *nulle le long de tout parcours fermé de pôle nord unité qui ne boucle pas le circuit,* elle est égale à $+4\pi i$ fois le nombre de fois que le parcours du pôle nord $+1$ boucle le circuit dans le sens des lignes de force et serait égale à $-4\pi i$ fois le nombre de boucles dans le sens opposé aux lignes de force".

La formule de Neumann et le coefficient d'induction mutuelle. Nous avons exprimé plus haut le coefficient d'induction mutuelle en passant par le flux et le travail c'est-à-dire par une intégrale de surface là où logiquement, physiquement, il n'y a que deux lignes en présence. On perd de vue la symétrie entre les deux circuits.

Avec l'utilisation du potentiel vecteur on va pouvoir faire intervenir *les deux lignes* c'est ce qu'a fait Neumann*(dont la formule a sur celle tirée des flux la même supériorité que nous trouverons à celle d'Ampère sur celle de Biot-Savart-Laplace.)*

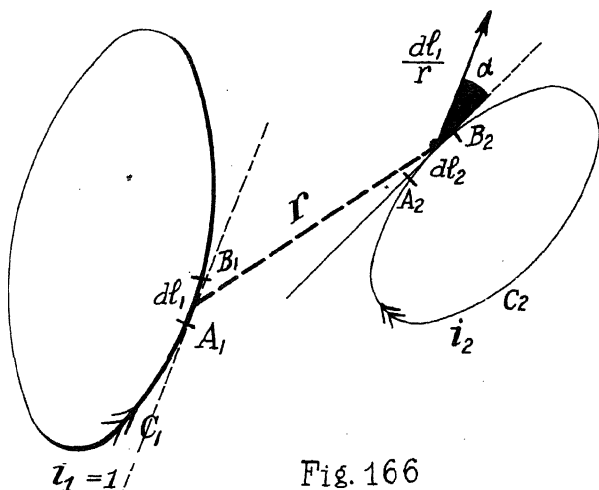
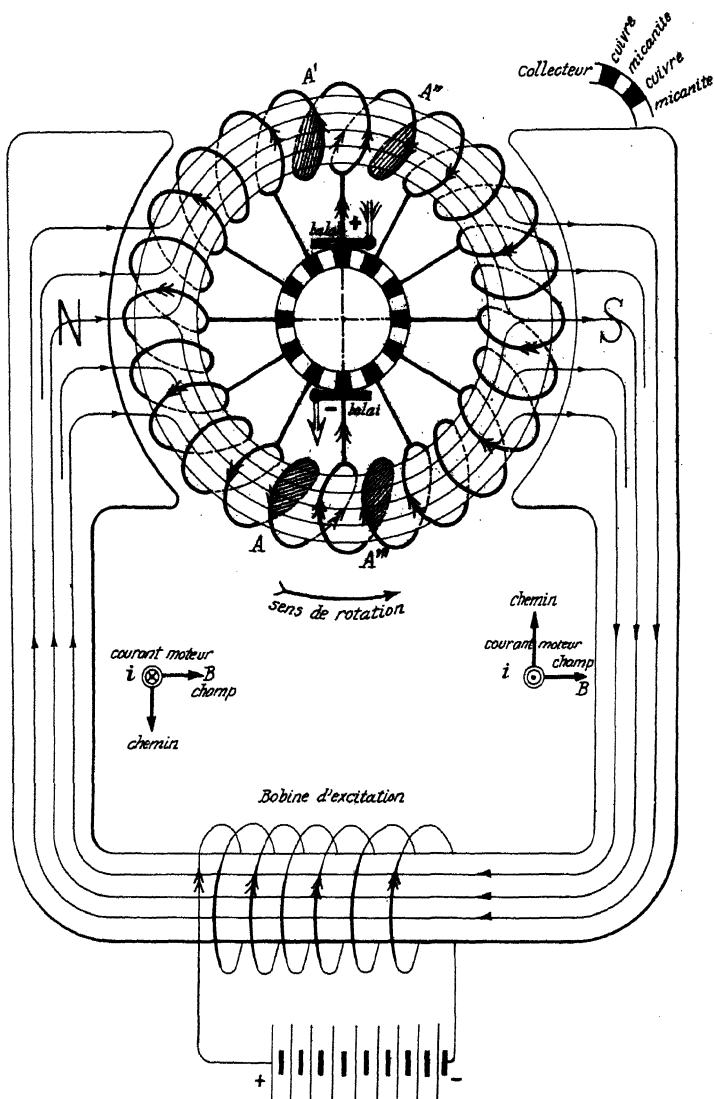



Fig. 166

Rappelons que M a été défini comme étant le quotient du flux Φ qu'envoie l'un des courants (1) à travers l'autre circuit (2) par son propre courant i_1 $M = \frac{\Phi}{i_1}$

Si nous supposons $i_1 = 1$ *(soit 10 ampères)* alors M sera numériquement égal au flux qui traverse le circuit C_2 de par la présence de C_1

Tout élément tel que A_1B_1 de longueur dl_1 donne en A_2 un potentiel vecteur égal à $\frac{dl_1}{r}$ parallèle à dl_1

Pour avoir le flux du champ de dl_1 à travers C_2 il suffit de prendre l'intégrale de ligne de ce potentiel vecteur le long de C_2 ce qui fait *(appelant α l'angle de dl_1 avec dl_2)*

en A, $\phi = +\frac{\varphi}{2}$

en A', $\phi = -\frac{\varphi}{2}$

$\Delta\phi = +\varphi$ (de A' en A)

en A'', $\phi'' = +\frac{\varphi}{2}$

en A''', $\phi''' = -\frac{\varphi}{2}$

$\Delta\phi = +\varphi$ (de A''' en A'')

Fig. 167

Et pour avoir le flux produit par tout le circuit C_1 $(i_1=1)$ à travers C_2 il faut totaliser l'action des éléments tels que dl_1 qui composent C_1 *(le flux étant scalaire pas de souci)*

$$\frac{\Phi}{i_1} = M = \int_{C_1}\int_{C_2} \frac{\cos\alpha}{r} \cdot dl_1 \cdot dl_2 \qquad \textit{(formule de Neumann)}$$

Cette quantité a un signe qui change en inversant le sens positif de l'un des circuits.

Note II: Illustrations industrielles de l'électromagnétisme.

Nécessité d'un rhéostat de démarrage pour les moteurs.

La moitié du flux induit $\frac{\varphi}{2}$ passe par le haut de l'anneau et l'autre moitié $\frac{\varphi}{2}$ par le bas; les signes de ces $\frac{\varphi}{2}$ sont donnés par le tire-bouchon qui tourne comme le courant *(voir fig.167)*

Entre les deux balais, une spire éprouve une variation de flux $+\varphi$

Donc *en moyenne et par demi-tour une spire* éprouve une variation de flux $\Delta\phi = +\varphi$ et est donc le siège d'une force électromotrice

$$\frac{-\Delta\phi}{\Delta t} : \frac{-\varphi}{\text{durée d'un demi-tour}} \quad \frac{-\varphi(2N)}{60} \text{ abvolts}$$

(C'est bien une force contre-électromotrice puisque négative; il serait d'ailleurs trop beau pour être vrai d'avoir du travail mécanique et en même temps une force électromotrice qui accélérerait)

$$N \frac{\text{tours}}{\text{min}} \; ; \; \frac{2N}{60} \; \frac{\text{demi-tours}}{\text{sec.}} ; \; \frac{60 \text{ sec.}}{2N} : \text{durée d'un demi-tour.}$$

Comme la moitié des spires $\frac{Z}{2}$ *(puisque toutes ces spires en série)* chacune étant le siège de cette force contre-électromotrice moyenne, la force contre-électromotrice de la moitié de l'enroulement est

$$\frac{Z}{2}\left(\frac{-\varphi(2N)}{60}\right) \; - \frac{NZ\varphi}{60} \text{ abvolts}$$

$$\text{soit } \frac{-NZ\varphi}{60} \times 10^{-8} \text{ volts}$$

Remarquons que cette force contre-électromotrice est proportionnelle à la vitesse *(ce que nous avions affirmé au No 203, tome I).*

Et c'est pour cette raison que l'on doit mettre un rhéostat de démarrage au lancer d'un moteur et le supprimer peu à peu à mesure que "la réaction de défense du moteur" croît et prévient "le grillage de l'enroulement induit".

Appelons R la résistance de tout le fil de l'induit s'il était mis bout à bout, les deux moitiés étant en série la résistance ohmique de l'induit est $\frac{R}{4}$

Chute ohmique de tension $\left(\frac{I}{2}\right)\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{RI}{4}$

Soit R' la résistance intérieure de la batterie et R" celle de la partie du rhéostat qui est en série. Négligeons la résistance des connections et des contacts.

La loi *(des boucles)* de Kirchhoff donne:

$$\underset{\text{amp.}}{I}\;\underset{\text{ohms}}{\underbrace{(R' + R'')}} + \left(\underset{\text{ohms}}{\frac{R}{2}}\;\underset{\text{amp}}{\frac{I}{2}}\right) = \underset{\text{volts}}{E} \; - \underset{\text{volts}}{\underbrace{\frac{NZ\varphi}{60 \times 10^{8}}}}$$

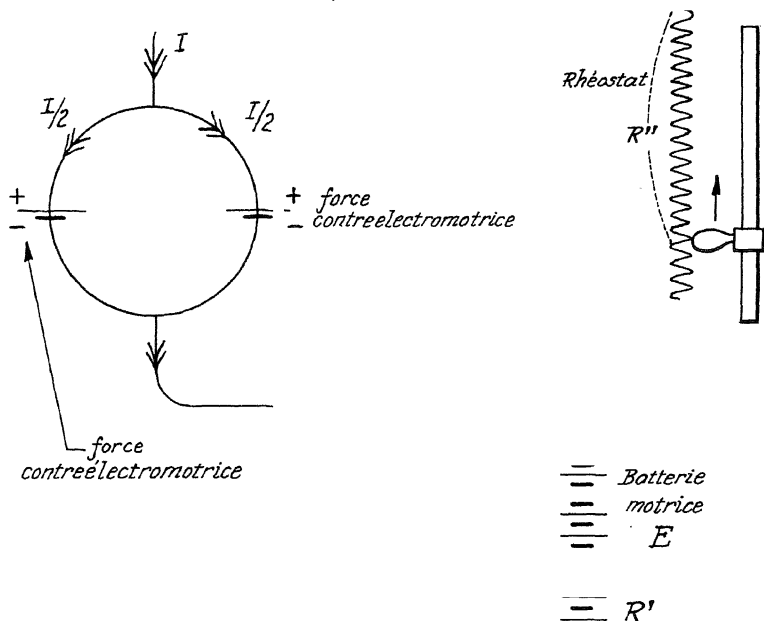



Fig. 168

Nous conseillons au lecteur de relire maintenant l'exercice numérique No 203 du tome I.

Soufflage des arcs continus par un champ magnétique (représenté schématiquement par un champ d'aimant bien que ce soit toujours un électroaimant). (fig.169)

Dès l'éloignement des contacts, l'arc continu chauffant l'air a tendance à s'élever avec la colonne d'air chaud et son chemin de corne à corne augmentant à mesure qu'il s'élève il finit par se briser.

Pour éviter que cette rupture d'arc ne soit trop longue et ne ronge les contacts, on place un champ magnétique normal à l'arc et au chemin vertical dans le sens voulu pour que la règle de l'effet moteur indique une poussée de l'arc vers le haut, vrai "soufflage magnétique".

Électroaimants:

L'électroaimant porteur donne une force portante $F=\frac{B^2S}{8\pi}$ tout comme l'aimant porteur *(p.342, tome I)*; nous n'en dirons pas plus.

L'électroaimant plongeur mérite plus d'attention vu son emploi dans les minuteries, aiguillages et signaux.

Nous supposerons pour faciliter le calcul que *la bobine* qui avale et *le noyau* avalé sont *tous deux très longs* et qu'il y a toujours une partie notable du noyau qui dépasse de la bobine

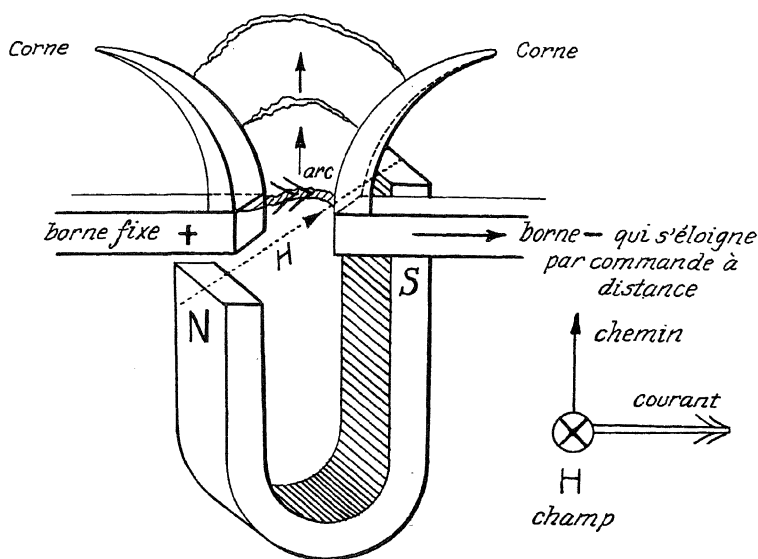



Fig. 169

Champ: $H = 4\pi \frac{Z}{L} i$
Aimantation du noyau $\mathfrak{J} = K\, i$ *(K étant la susceptibilité magnétique)*

K est relié à H, B, μ par

B induction $= \mu$ perméabilité H champ $=$ H champ $+ 4\pi k\, H$
$= H + 4\pi \mathfrak{J}$

Force qui fait avaler le plongeur

$$F = m\ H$$

Mais $\mathfrak{J} = \sigma\ ,\ \frac{\mathfrak{m}}{v} = \frac{m}{s}$ *(page 331, tome I)*

d'où $m = \mathfrak{J}\, S$ *(S étant la section droite du barreau, aire de plage polaire)*

$$F = \mathfrak{J} S\, H = \mathfrak{J}\, S\quad 4\pi \frac{Z}{L}\, i$$
$$= 4\pi \frac{Z}{L} S\ K\ i^2$$

plongeur de fer

bobine

Bobine d'induction, polarités, fonctionnement (inventé par Ruhmkorff).

Le faisceau de fils de fer ou noyau peut être aimanté par l'enroulement primaire d'où induction de courants démagnétisants dans le secondaire.

Mais lorsque le noyau est aimanté il attire le fer doux trembleur *(voir tome I, pages 335 et seq.)* ce qui provoque une rupture du courant primaire, une désaimantation du noyau et induction de courants remagnétisants dans le secondaire.

En C, il y aurait alors étincelle et les contacts seraient vite oxydés. Pour y obvier, on dispose un condensateur qui se charge au lieu de laisser éclater l'étincelle nourrie que donnerait le courant de self induction qui tend à prolonger le courant inducteur.

Le condensateur a un autre avantage que celui de préserver les contacts, *il permet une désaimantation complète du noyau* par ce qu'aussitôt que le courant primaire a cessé et que le condensateur s'est chargé, *le condensateur envoie une décharge* de sens inverse au courant qui l'a chargé et *désaimante presque complètement le noyau* en un temps extrêmement petit.

De fait, si l'on supprimait le condensateur, après que l'étincelle a jailli il resterait encore une aimantation notable.

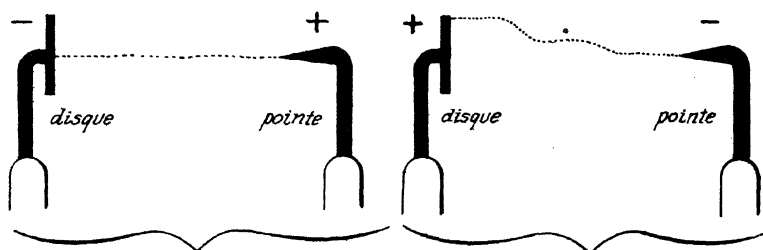
(Voir Franklin McNutt, pages 113 à 115, Electricity and Magnetism, Constable).

si la pointe est le pôle positif du secondaire, l'étincelle va de la pointe au centre du disque | *si la pointe est le pôle négatif du secondaire, l'étincelle aborde toujours le bord du disque et non plus le centre (elle se promène et n'aborde pas toujours le bord supérieur mais toujours un point du bord du disque.)*

Fig. 170

Quand le noyau a été ainsi privé de son courant magnétisant et purgé de son aimantation résiduelle par la décharge du condensateur *(décharge qui a lieu par le chemin MNQLN)*, le ressort R ramène le fer doux à sa position première.

Et tout recommence.

Nous avons déjà plusieurs fois signalé que ce qui est indépendant de la rapidité ou lenteur de variation du flux c'est la quantité d'électricité induite dans le secondaire.

$$Q = \int i_s \, dt = \frac{\Delta \Phi}{R}$$

Lors de l'attraction du marteau, le flux du noyau passe de zéro à Φ et lors de l'attraction du ressort le flux passe de Φ à zéro ***donc les mêmes charges induites en des sens oppo-***

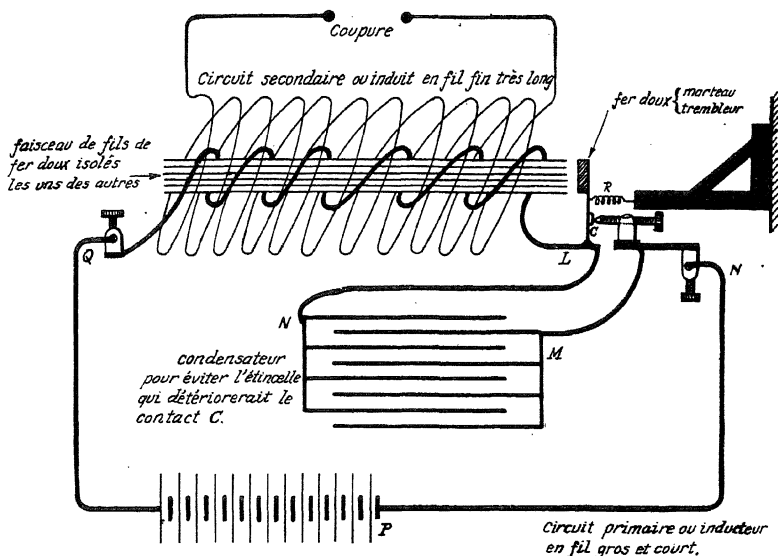



Fig. 171

Si les deux opérations fermeture du circuit et rupture du circuit étaient d'égale durée, il y aurait même intensité de courant induit dans les deux sens pendant les deux alternances et l'on ne pourrait utiliser la bobine d'induction comme source de courant toujours dans le même sens.

Mais l'attraction du fer doux d'abord très lente met ***beaucoup plus de temps à produire la fermeture du circuit*** que ne met le ressort R, bandé d'avance, ***à décoller le fer doux*** aussitôt la suppression du courant inducteur suivie de la purge d'aimantation par le condensateur.

Nous renverrons le lecteur au livre de Monsieur Turpain, Leçons de Physique, tome II, pages 742 à 754 pour plus amples détails et nous lui empruntons les graphiques qui illustrent la ***constance de l'électricité induite*** et le pourquoi d'une plus grande tension à la rupture.

Noter que bien que I direct max. $\gg$ I inverse max., les ***aires hachurées*** $Q = \int i \, dt$ sont égales, elles représentent en effet les quantités d'électricité induites alternativement dans un sens puis dans l'autre

$$\frac{-(\Phi - \text{zéro})}{R}, \quad \frac{-(\text{zéro} - \Phi)}{R}, \quad \frac{-(\Phi - \text{zéro})}{R}$$

Il suffit maintenant pour avoir une seule onde directe de donner à la coupure ***(entre pointe et disque)*** une distance

Courant primaire i_p
fermeture
rupture
fermeture
rupture
fermeture
aimantation
désaimantation
courant secondaire i_s
+Q
+Q
+Q
i direct max.
-Q ind
-Q
-Q
-Q
i inverse max.
courant induit
courant induit
démagnétisant
magnétisant

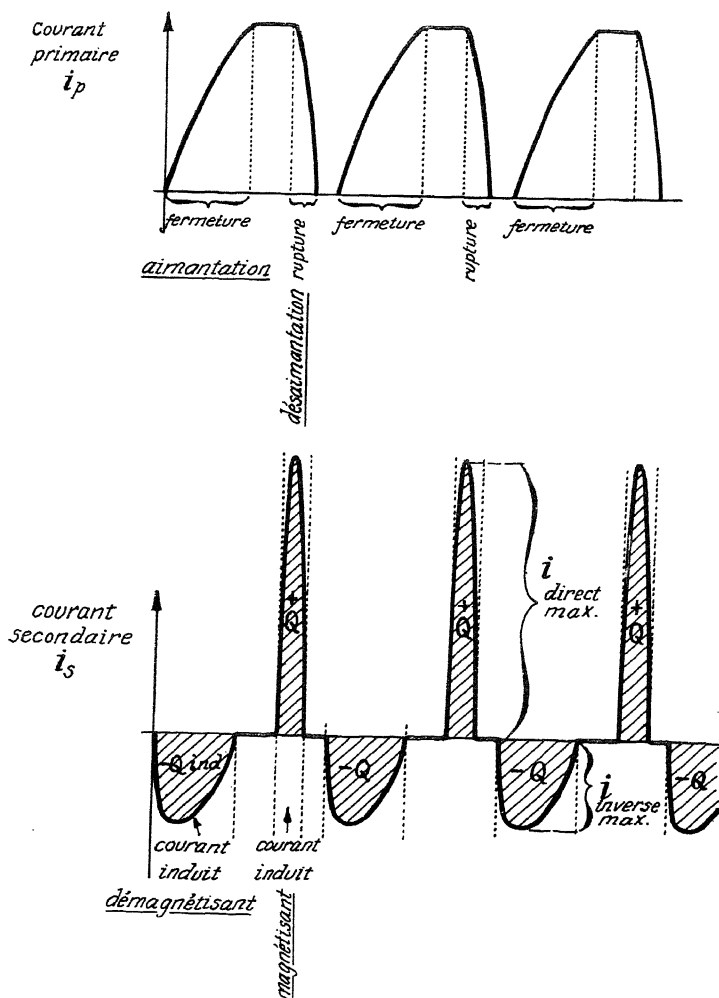



Fig. 172

telle que l'onde directe puisse aisément passer alors que l'onde inverse ne puisse passer.

Calcul d'un circuit magnétique: quelle est la force magnetomotrice requise pour obtenir une force électromotrice d'induction donnée E, avec une vitesse de rotation donnée

$N \frac{tours}{min}$ et un nombre de spires toutes en série Z.

(Moteur ou dynamo bipolaires)

(volts) E

Ceci détermine Φ le flux dans l'induit.

On majore ce flux en le multipliant par le coefficient d'Hopkinson ν pour tenir compte des pertes de corne à corne et dans la carcasse $\nu\Phi = 1.2\Phi$ par exemple sera le flux alors que dans l'induit vu les pertes il n'y aura que Φ

Suite des opérations:

a) Diviser le montant de flux qui passe dans chaque portion par la section droite en fer *(déduction du papier)*

Ceci donne l'induction B de cette partie du circuit *(s'il y a bifurcation comme dans les deux moitiés d'induit, diviser la moitié du flux par la section droite en fer)*

b) Prenant l'une des courbes de la page 330, tome I, celle qui correspond au matériau ferromagnétique de la partie du circuit magnétique considérée, de l'ordonnée B qu'on vient de calculer on tire l'abscisse H valeur du champ *(pour l'entrefer $B = H$)*

c) Multiplier la valeur de H ainsi obtenue par (l) la longueur *(lue à l'échelle sur le bleu)* de cette portion considérée de circuit magnétique. Ceci donne la différence de potentiel magnétique nécessaire à l'entretien de l'excitation dans la partie de fer considérée - ne pas oublier d'exprimer l en centimètres. -

d) Additionner les diverses différences de potentiel requises dans les parties qui sont toutes en série *(ne prendre qu'une moitié d'induit par exemple)*. Ceci va nous donner

$$\Sigma H \,.\, l = \mathcal{Y}$$, la force magnétomotrice.

e) D'après les quatre démonstrations du théorème d'Ampère le lecteur sait fort bien que cette force magnétomotrice égale

$$4\pi Z' I'$$

Z' I' étant les abampères tours d'excitation.

Exemple numérique: Φ induit = 1,500,000 maxwells *(déduit de* N, Z et E); coefficient d'Hopkinson 1.2 donc

Φ inducteur = 1.2 (1,500,000) = 1,800,000 maxwells.

Induit en tôle, carcasse en fonte.

partie en tôle: longueur 50 cms; section droite en fer, 120 cm²

partie en fonte: longueur 40 cms; " " 200 cm²

entrefer : " 2.5cms; " " 300 cm²

Φ		Iue p.330 tome I H		Hl	
1.5×10^6	12500	12	50		induit
1.5×10^6	5000	5000	2.5	12500	entrefer
1.8×10^6	9000	108	40	43	carcasse
				17420	

$Z'I'$ abampères×tours $= \frac{17420}{4\pi} = 1386$

soit 13860 ampère tours.

*<u>Note III: Les particules électrisées dans un champ magnétique et dans un champ électrostatique</u>.

Champ magnétique (entre pôles d'électroaimant)

$(-q) \quad \overrightarrow{V_0}$

$\overleftarrow{\text{courant}}\times$longueur équivalents $\quad i\ l$

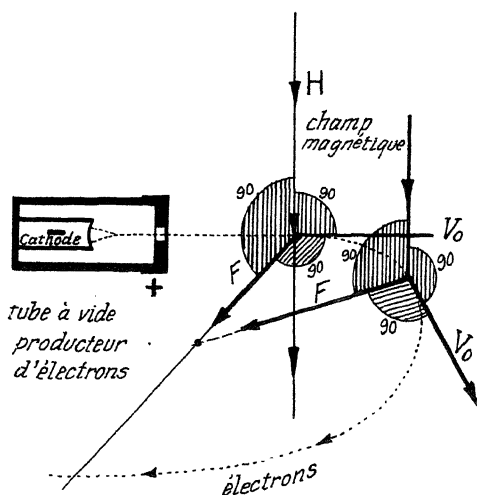



Fig. 173

Soit un tube à vide produisant des électrons *(nous verrons la thermo-ionie en troisième année)*.

Ces électrons accélérés par ΔV la différence de potentiel de plaque entre cathode et feuille d'aluminium arrivent avec

une vitesse V_0 *(donnée par la transformation d'énergie potentielle en cinétique:* $q\ \Delta V = \frac{1}{2}\ m\ V_0^2$

abcoulombs — gr.

abvolts — $\left(\frac{cm}{sec.}\right)^2$

dans un champ magnétique normal.

Le champ magnétique exerce une force normale à la vitesse donc l'intensite du vecteur vitesse va rester la même *(same speed)* et alors le mouvement est un mouvement à force axipète constante, mouvement circulaire de rotation uniforme.

$$\overset{\odot}{F} = il \times H_n = -q\overleftarrow{V_0} \times \downarrow H_n$$

Le rayon r de la circonférence de cercle le long de laquelle s'enroulent tous les électrons de même vitesse si le champ est uniforme est obtenu en égalant *la force axipète électromagnétique à la force axifuge d'inertie.*

$$q V_0 H = \frac{m V_0^2}{r} \qquad \frac{m V_0}{qH}$$

Si les rayons cathodiques arrivaient obliquement, la vitesse tangentielle au champ serait conservée, celle normale au champ produirait l'enroulement comme ci-dessus et l'on aurait une trajectoire hélicoïdale.

Champ électrostatique(entre les plateaux d'un condensateur).

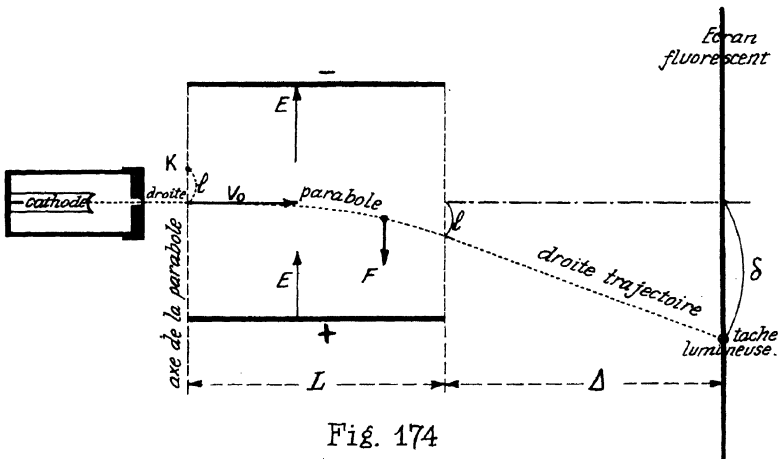



Fig. 174

Des électrons accélerés par la différence de potentiel du tube à vide arrivent avec une vitesse V_0 dans le champ electrostatique uniforme qui règne entre les plateaux d'un condensateur.

La force $\downarrow F = -q \uparrow E$ est dirigee dans le sens opposé au champ puisque la charge est négative.

L'accélération $\downarrow a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}$ est constante puisque la charge q est constante et la masse pratiquement constante, V ne changeant pas beaucoup de valeur.

On a donc un mouvement parabolique comme nous en avons étudié plusieurs au tome I.

Mais, dès que le champ a cessé, la trajectoire est droite

$$\left.\begin{array}{l} l = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2}\left(q\frac{E}{m}\right)t^2 \\ V_0 t \end{array}\right\} \quad l = \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m}\right)\frac{L^2}{V_0^2}$$

En vertu des propriétés geométriques de la parabole le prolongement de la droite trajectoire *(tangente)* coupe l'axe de la parabole en K, l cms plus haut que la tangente au sommet V_0

$$\frac{L}{L+\Delta} = \frac{2l}{l+\delta} \; ; \qquad \delta = l\frac{L}{L+2\Delta}$$

étant plus grand que l, il est plus facile à mesurer.

Des deux experiences précédentes on tire

la quantité de mouvement par abcoulomb $\quad \dfrac{m_{\text{gramme}} \; V_0 \frac{\text{cm}}{\text{sec.}}}{q_{\text{abcoulomb}}} \quad H_{\text{gauss}}\; r\; \text{cm}$

et

l'énergie cinetique par statcoulomb . $\quad \dfrac{m_{\text{gramme}} \; V_0^2 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2}}{q_{\text{ statcoulomb}}} \quad \dfrac{\text{statvolts}\; L^2\; \text{cm}^2}{4l}$

On pourra de ces deux equations tirer le quotient

$\boxed{\frac{q}{m}}$ charge par gramme et la vitesse $\boxed{V_0}$

C'est le moment d'indiquer au lecteur un tableau de passage d'un système d'unités à l'autre. Ce tableau est *très symétrique et l'ordre des unités etant alphabétique,* il est facile à retrouver.

nombre d'unités	*Ampères Coulomb*	*Farad*	*Henry Ohm*	*Volt*
nombre d'ab-unités	10^{-1}	10^{-9}	10^{+9}	10^{+8}
nombre de stat-unités	C^{+1}	C^{+2}	C^{-2}	C^{-1}

Fig. 175

Les deux cases hachurées, les seules qui ne soient pas parfaitement symétriques sont déjà familières au lecteur: nous avons souvent parlé *d'abampères ou déca-ampères* donc il faut bien multiplier par 10^{-1} le nombre d'ampères pour avoir le nombre d'abampères.

De même lors de l'expression en volts de la force électromotrice d'induction nous avons dû diviser par 10^{8} le nombre d'abvolts pour avoir les volts.

Donc inversement, il faudra bien multiplier par 10^{+8} le nombre de volts pour avoir le nombre d'abvolts.

Une autre chose connue dès le collège, c'est que l'unité électrostatique de potentiel vaut 300 volts; ou inversement le *nombre de statvolt égale 1/300 le nombre de volts.*

Comme 1 volt $= 10^{+8}$ abvolts, il faudra multiplier ce nombre par $c^{-1} = \frac{1}{3 \times 10^{10}}$ inverse de la vitesse de la lumière pour avoir le nombre de statvolt

$$1 \text{ volt} \times 10^{+8} = 10^{+8} \text{ abvolts}$$

$$10^{+8} \text{ abvolts} \times C^{-1} = \frac{1}{300} \text{ statvolt}$$

Tous les coefficients de passage sont faciles à déduire comme nous l'avons fait nous-même au collège dans le désir de pouvoir enfin jongler aisément avec les unités sujet d'ordinaire rébarbatif et difficile à retenir quand il n'y a ni ordre alphabétique ni symétrie.

Ainsi retrouvons que le nombre d'abohms doit bien être 10^{+9} fois le nombre d'ohms.

$$R = \frac{\Delta V}{I} \; ; \quad \text{n. d'ohms} = \frac{\text{n. de volts}}{\text{n. d'ampères}} \; ; \quad \text{n. d'abohms} = \frac{\text{n. d'abvolts}}{\text{n. d'abampères}}$$

$$\text{nombre d'abohms} = x \text{ nombre d'ohms} = x \, \frac{\text{n. de volts}}{\text{n. d'ampères}}$$

$$= x \, \frac{10^{-8} \text{ fois le nombre d'abvolts}}{10^{+1} \text{ fois le nombre d'abampères}}$$

$$= x \, 10^{-9} \text{ fois le nombre d'abohms}$$

$$\boxed{\text{donc} \quad x = 10^{+9}}$$

Deux remarques pour permettre un emploi judicieux du tableau:

le temps étant exprimé avec la même unité dans les trois systèmes d'unités

Les quantités *(coulomb)* et les débits *(ampères)* subissent les mêmes transformations.

De même les résistances *(ohms)* et les selfs *(henrys)* subissent aussi les mêmes transformations.

Les deux systèmes ab- et stat- sont C.G.S. donc utilisent l'erg et l'erg- par seconde comme énergie et puissance; alors que le système des praticiens emploie le joule et le watt qui sont 10^{7} fois plus gros que l'erg et l'erg par seconde.

Pour passer dans l'ordre inverse des flèches, changer le signe des exposants des coefficients de passage.

Nous renverrons à ces lignes à propos de problèmes et de questions plus complexes.

*Note IV: Le courant de déplacement de [Maxw]ell et la traduction analytique de la loi d'induction [de] Faraday et du théorème d'Ampère .

On ne peut réaliser le passage de courants constants que dans les corps conducteurs *(métaux): ce sont les courants de conduction.*

Dans les isolants, il est toutefois possible de produire des *variations de flux d'induction électrostatique auxquelles Maxwell attribue les mêmes propriétés magnétiques qu'aux courants des conducteurs; on appelle courants de déplacement ces variations de flux électrostatique.*

Considérons le cas simple: charge et décharge d'un condensateur.

Les armatures étant A et B; soit un contour L fermé sur lequel s'appuient diverses surfaces S_1 , S_2, S_3

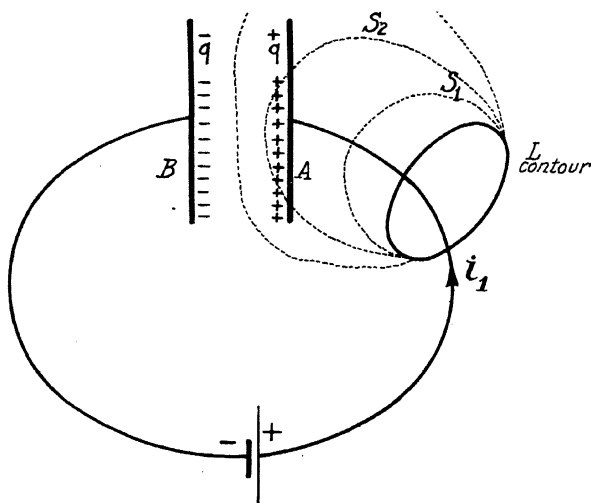



Fig. 176

La surface S_1 est traversee par un courant i_1

A travers la surface S_3 il y a un flux φ d'induction électrostatique D égal d'après le théorème de Gauss à $4\pi q$

$$\varphi = \iint D \cdot da \cdot \cos(D, N)$$
$$= 4\pi q$$

(D est en électrostatique ce que B est en magnétisme)

$$\frac{d\varphi}{dt} = 4\pi \frac{\delta q}{\delta t} = 4\pi i_2$$

"tout se passe donc comme si cette surface S_3 était traversée par un courant de déplacement

$$i_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi}{dt}$$

ce qui correspond à une *densité de courant*

densité de courant $u_2 = \frac{i_2 \text{ courant}}{S \text{ section droite}}$; de même l'induction électrostatique $D = \frac{\Phi \text{ flux électrost.}}{S \text{ aire d'une armature}}$

(S aire d'une armature)

$$\boxed{i_2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta D}{\delta t} \quad \frac{}{4\pi}$$ densité de courant de déplacement.

Traduction analytique du phénomène de l'induction magnétique des courants (de Faraday).

$$e = - \frac{d\Phi_{magn.}}{dt} \quad \frac{(\text{maxwells})}{(\text{seconde})}$$

abvolts

il est d'usage d'exprimer tout en unités électrostatiques, alors *(voir tableau de passage)*

$$c\,(e_{\text{statvolts}}) = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \frac{\text{maxwells}}{\text{seconde}}$$

Mais la force électromotrice e est l'intégrale du champ électrostatique le long d'un contour fermé L, contour limitant la surface traversée par le flux magnétique Φ magn.

$$e \int_0^L E \;\frac{\text{statvolts}}{\text{cm}} \cdot dl = \int (E)(dl) \cos \widehat{E, dl}$$

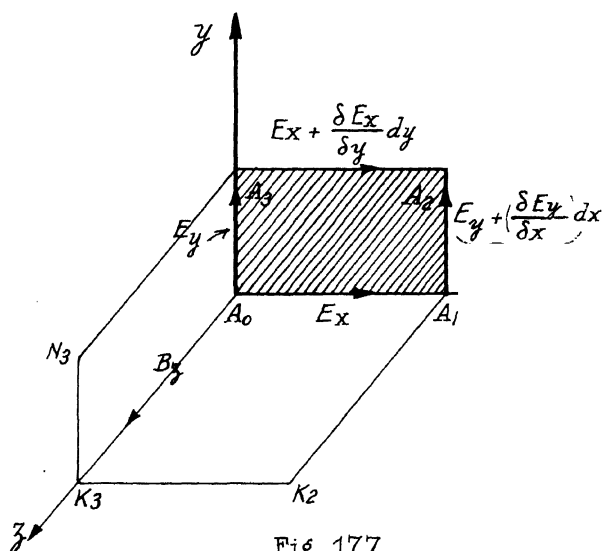



Fig. 177

De même le flux d'induction magnétique est le produit de l'induction B, par da l'aire de la surface et par le cos de B avec la normale positive.

$$\Phi = \int B \cdot da$$

$$= \int (B)\ (da) \cos\ (\widehat{B,N})$$

$$\overline{A_0 A_1} = dx \ ; \ \overline{A_1 \ A_2} = dy$$

Considérons le contour $A_0 A_1 A_2 A_3$

la force électromotrice le long de ce contour est l'intégrale de ligne du champ électrostatique prise dans le sens ↺ les flèches sur la figure 177 indiquant le sens positif des champs et non le parcours

$$e = (E_x)(dx) + \left(E_y + \frac{\delta E_y}{dx} dx\right)(dy) - \left(E_x + \frac{\delta E_x}{\delta y} dy\right)(dx) - (E_y)(dy)$$

$$= \left(\frac{\delta E_y}{\delta x} - \frac{\delta E_x}{\delta y}\right) dx\ dy$$

Le flux d'induction magnétique qui traverse une surface limitée par ce contour *(L'air hachurée par exemple)* est B_z dx dy; d'où

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt}(dx\ dy) = -\dot{B}\ dx\ dy$$

La formule de l'induction devient *(en supprimant le facteur dx dy)*

$$C\left(\frac{\delta E_y}{\delta x} - \frac{\delta E_x}{\delta y}\right) = -\dot{B}_z$$

ou en notation vectorielle $$\frac{-\dot{B}}{C} = \text{rot } \mathbf{E}$$

Au lecteur le soin par permutation de trouver les deux autres relations analogues, nous lui conseillons de les vérifier directement en prenant les contours $A_0 K_3 K_2 A_1$ et $A_0 A_3 N_3 K_3$

Traduction analytique du théorème d'Ampère (force magnétomotrice)

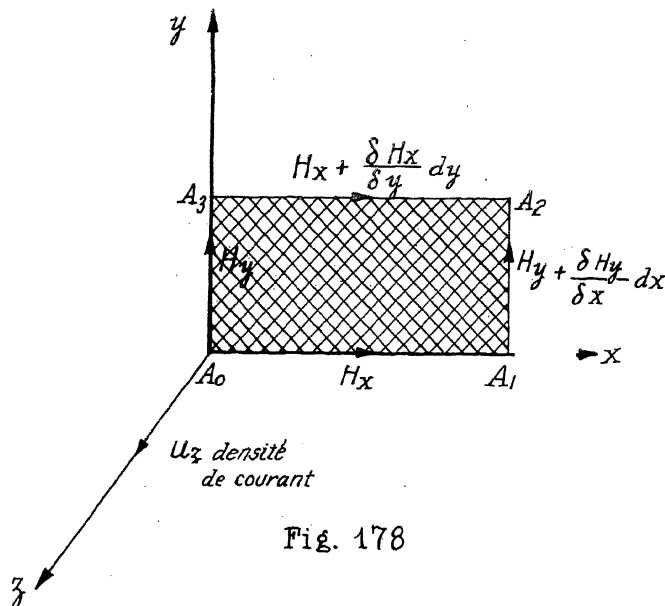



Fig. 178

Contour $A_0 A_1 A_2 A_3$ dans le sens ↺

La force magnétomotrice ou intégrale de ligne du champ magnétique le long de ce contour est

$$\mathcal{V} = (H_x)(dx) + \left(H_x + \frac{\delta H_y}{\delta x} dx\right) dy - \left(H_x + \frac{\delta H_x}{\delta y} dy\right)(dx) - (H_y)(dy)$$

$$\left(\frac{\delta H_y}{\delta x} - \frac{\delta H_x}{\delta y}\right) dx\, dy$$

Le courant qui traverse une surface limitée par le contour, par exemple l'aire hachurée d'aire (dx)(dy) est le produit de la densité de courant normale par l'aire

$$i = u_z\ (dx)\ (dy)$$

Soit en appliquant la formule du théorème d'Ampère

$$\mathcal{V} = 4\pi i \text{ ab-ampères}$$

$$\left(\frac{\delta H_y}{\delta x} - \frac{\delta H_x}{\delta y}\right) dx\, dy = 4\pi (u_z)\, dx\, dy.$$

il est également d'usage d'exprimer la densité de courant en $\frac{\text{stat-ampères}}{cm^2}$ alors *(voir tableau de passage)* après suppression du facteur dx dy commun aux deux membres

$$\text{rot } H = 4\pi \frac{u}{c}$$

Tout l'électromagnétisme tient donc analytiquement dans les deux formules où tout est en *stat-unités*

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} B \qquad \text{rot } H = \frac{4\pi}{c} u \qquad \text{en stat-unités}$$

Et, si tout est en *ab-unités* ce qui n'est pas classique mais infiniment plus pratique

$$\text{rot } E = -B \qquad \text{rot } H = 4\pi u \qquad \text{en ab-unités.}$$

Ce sont ces équations fondamentales de Faraday et Ampère qui ont permis à Maxwell de prévoir les ondes électromagnétiques qu'a découvertes Hertz.

Nous les verrons en troisième année.

Note V: "Les étapes de l'élaboration de l'Electrodynamique (avec applications de la formule qui en a résulté. Les quatre façons d'opérer avec un problème d'électrodynamique)".

"L'Etude expérimentale par laquelle Ampère a établi les lois de l'action mécanique qui s'exerce entre les courants électriques constitue l'un des plus brillants exploits de la science".

"Il semble que cet ensemble de théorie et d'expérience ait jailli dans toute sa puissance, avec toutes ses armes, du cerveau du Newton de l'électricité. La forme en est parfaite, la rigueur inattaquable et le tout se résume en une formule, d'où peuvent se déduire tous les phénomènes et qui devra toujours rester la formule fondamentale de l'Electrodynamique".

James Clerk Maxwell *(T. de l'E. & du M.)*

§ I: La formule d'Ampère, ses applications.
§ II: La formule de Biot-Savart et Laplace, ses applications en électrodynamique.
§ III: Le moment magnétique d'un solénoïde, utilité.
§ IV: Le feuillet magnétique d'Ampère, utilité.

Note V: (§ I) La Formule d'Ampère.

Après qu'André-Marie Ampère eut montré qu'il fallait considérer
"non pas les conducteurs comme des assemblages d'aimants transversaux, mais au contraire les aimants comme devant leurs propriétés à une disposition de l'électricité autour de chacune de leurs particules, identiques à celle de l'électricité dans les fils conducteurs, disposition que j'ai désignée-dit-il- sous le nom de courant électrique", Ampère trouve de plus que
"si les aimants ne doivent leurs propriétés qu'à des courants électriques entourant chacune de leurs particules, il faudrait, pour pouvoir calculer les effets qu'ils doivent produire, que l'on sût s'ils ont la même intensité près de la surface de l'aimant et dans son intérieur ou suivant quelle loi varie cette intensité; si les plans de ces courants sont partout perpendiculaires à l'axe du barreau aimanté, comme je l'avais d'abord supposé, ou si l'action mutuelle des courants d'un même aimant leur donne une situation d'autant plus inclinée à cet axe qu'ils en sont à une plus grande distance, et qu'ils s'écartent davantage de son milieu, comme le prouve la différence qu'on remarque entre la situation des pôles d'un aimant et celles des points qui jouissent des mêmes propriétés dans un fil conducteur roulé en hélice".
"C'est donc par l'observation des *cas d'équilibre indépendants de la forme des conducteurs* qu'il convient de déterminer la force dont nous cherchons la valeur. J'en ai reconnu trois".
1) les effets du courant changent de sens avec lui"deux portions égales d'un même fil conducteur recouvertes de soie pour en empêcher la communication, tordues ensemble de manière à former l'une autour de l'autre deux hélices dont toutes les parties sont égales et parcourues par un même courant électrique l'une dans un sens, l'autre en sens contraire, *n'exercent aucune action* soit sur un conducteur mobile, soit sur un aimant;...."
D'où deux courants égaux en intensité, mais opposés en sens ont des effets qui se neutralisent
"l'égalité des moments rend nécessaire celle des forces", ..."les distances étant toujours égales entre elles".

2) le courant électrique est une quantité vectorielle
"Le second des trois cas généraux d'équilibre est celui que j'ai remarqué à la fin de l'année 1820; il consiste dans l'égalité d'action sur un conducteur rectiligne mobile de deux conducteurs fixes, situés à égales distances du conducteur mobile, l'un rectiligne et l'autre plié et contourné d'une manière quelconque, quelles que soient d'ailleurs les sinuosités formées par ce dernier".
Ce second cas fit voir à l'analyste et au mécanicien qu'était Ampère qu'un courant électrique est une quantité qui peut être résolue comme les déplacements, les vitesses ou les accélérations puisque le courant résultant *(ayant même origine que le premier vecteur courant et même extrémité que le dernier vecteur courant)* avait les mêmes propriétés

que le conducteur sinueux formé par l'ensemble des vecteurs composant le serpent galvanique.

MT tangente en M à l'arc ds
MT' tangente en M' à l'arc ds'

(les arcs Mm et M'm' étant de longueur infinie sont en pratique confondus avec leur tangente donc Mm et MT sont une seule et même ligne en réalite par exemple)

Soient $\overline{Mm}$ l'élément de courant i de longueur ds et $\overrightarrow{M'm'}$ l'autre élément de longueur dS' parcouru par i'.

Soient α et β les angles que forment les courants considérés avec le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ compté positivement de M' vers M.

e m" = (ds) sin α (cos γ) est dans le plan de l'angle β la projection de la composante du premier courant perpendiculairement à la charnière M'M.

Puisque les courants sont des vecteurs, il est tout naturel de penser avec Ampère qu'il y a lieu de distinguer l'action des composantes dirigées suivant M'M {action de ds' (cos β) sur ds (cos α)} et l'action des composantes perpendiculaires à M'M soit donc l'action de ds (sin α) sur ds' (sin β), composantes qui forment un angle γ et ne sont plus sur une même droite comme les deux premières.

Ampère démontra *expérimentalement* que le facteur d'interaction des courants était

$$\rho = \sin\alpha \ \sin\beta \ \cos\gamma + k \cos\alpha \ \cos\beta \qquad (1)$$

La force s'exerçant entre les conducteurs étant

$$i \, i' \ ds \ ds' \qquad (2)$$

3) Détermination de la constante k

"Il me restait à déterminer la valeur de ce coefficient (k); je n'y réussis pas dans le temps, je vis seulement que cette valeur paraissait être d'autant plus petite que les expériences que je faisais pour la déterminer étaient plus exactes. Comme je ne soupçonnais pas alors que cette valeur fut négative, j'en conclus seulement qu'elle pouvait être regardée comme nulle".

"J'ai trouvé depuis un troisième cas d'équilibre indépendant de la forme du fil conducteur, d'où résulte une relation entre k et l'exposant (n) de la puissance de la distance (r) de deux portions infiniment petites de courants électriques, à laquelle leur action mutuelle est réciproquement proportionnelle quand cette distance varie".

....Ce fait peut être énoncé ainsi:

"Un circuit fermé circulaire ne peut jamais produire de mouvement continu toujours dans le même sens, en agissant sur un conducteur mobile d'une forme quelconque qui part d'un point de l'axe élevé perpendiculairement sur le plan de ce circuit par le centre du cercle dont il forme la circonférence, et qui se termine à un autre point du même axe, lorsque le conducteur mobile ne peut se mouvoir qu'en tournant autour de cet axe".

On a: $\cos\alpha = \frac{dr}{ds}$; $\cos\beta = -\frac{dr}{ds'}$ (car $\overrightarrow{M'M} = r$ décroit lorsque β croît

$\cos\alpha \cos\beta = \cdot\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$; en différentiant cos β par rapport à S

on trouve $-\sin\beta \frac{d\beta}{ds} = -\frac{d^2 r}{ds\, ds'}$ mais $d\beta \begin{cases} = -\widehat{MM'm} \cos\gamma \\ = -\widehat{e M'm''} \end{cases}$

$\overrightarrow{M'M} = \vec{r}$
$-dr = \overrightarrow{M'e'} = ds' \cos\beta$
$+dr = \overrightarrow{Me} = ds \cos\alpha$
T
m(s+ds)
ds(sin α)
α°
m"
e
M
(S)
i
O(o)
γ (angle des deux plans M'MT et MM'T')
90°
90°
e'
dβ
γ
T'
m'(s'+ds')
β°
ds'(sin β)
O'(o)
M' (s')
i'
M T tangente en M à l'arc ds
M'T' " " M' " " ds'

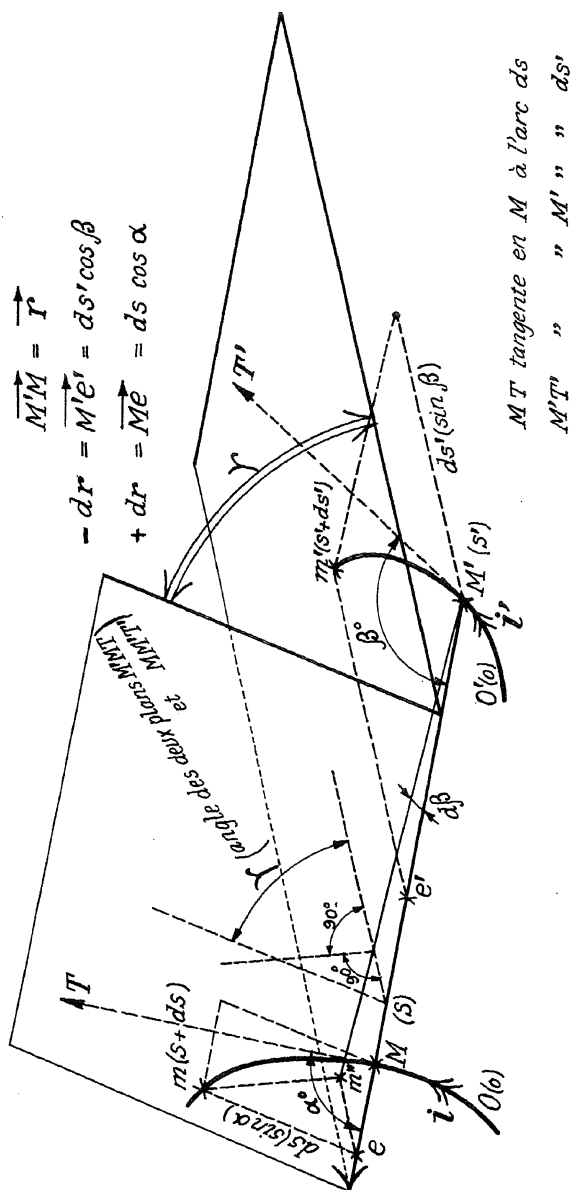



Fig. 179

L'angle $\widehat{MM'm} = \frac{ds(\sin\alpha)}{r}$

d'où $\frac{d\beta}{ds} = -\frac{(\sin\alpha)\cos\gamma}{r}$ et par suite en vertu de (3),

$(\sin\alpha)\sin\beta(\cos\gamma) = -r\frac{\quad}{ds\,ds'}$;

ayant transformé les produits des fonctions circulaires en fonction des différentielles dr, ds et ds', il vient

$$\boxed{\rho = -(r\frac{d^2r}{ds\,ds'} + k\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'})}$$

ou encore

$$\rho = -r^{1-k}(r^k\frac{d^2r}{ds\,ds'} + kr^{k-1}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'})$$

$$= -r^{1-k}\frac{d(r^k\frac{dr}{ds'})}{ds}$$

$$= -\frac{r^{1-k}}{1+k}\frac{d^2(r^{1+k})}{ds\,ds'} \qquad (4)$$

L'expression de la force *(en admettant qu'elle soit inversement proportionnelle à r^n et directement à ρ) sera donc vu (1) et (4)*

$$d^2f = \begin{cases} -r^{1-k-n}\dfrac{d(r^k\frac{dr}{ds})}{ds}\,ii'\,ds\,ds' \\[2ex] -\dfrac{r^{1-k-n}}{1+k}\dfrac{d^2(r^{1+k})}{ds\,ds'}\,ii'\,ds\,ds' \end{cases}$$

Ayant ainsi transformé l'expression de la force, Ampère appelle *(selon une notation qu'il emprunte à Poisson)*

dr la différentielle de r relative au déplacement de M
et d'r " " " " " de M'

donc $\begin{cases} dr = \frac{dr}{ds}ds & \textit{(nous écririons aujourd'hui } \frac{\delta r}{\delta s}ds) \\ d'r = \frac{dr}{ds'}ds' & \textit{(nous écririons aujourd'hui } \frac{\delta r}{\delta s'}ds') \end{cases}$

L'expression de la force se simplifie alors et devient

$$d^2f = \begin{cases} -ii'r^{1-k-n}\,d(r^k d'r) \\[1ex] -\dfrac{ii'r^{1-k-n}\,d[d'(r^{1+k})]}{1+k} \end{cases}$$

Ampère applique la première de ces deux formules au troisième cas d'équilibre *(figure 180)*

Le courant circulaire de rayon a est contenu dans le plan horizontal x o y *(nous conservons ici par exception le trièdre des anciens géomètres tel que dans le mémoire)*

Le courant BM *(infiniment court)* est assujetti à tourner autour de l'axe des z *(c'est le seul degré de liberté compatible avec les liaisons)*

Soient ON=u ; $\widehat{xoN} = t$; $\widehat{xoM'} = t'$

r désignant toujours la longueur MM' qui sépare les éléments agissant l'un sur l'autre, on a:

$r^2 = \overline{MM'}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NM'}^2 = z^2 + a^2 + u^2 - 2\,a\,u\cos(t'-t)$

Si M' seul se déplace, t' seul varie *(nous considérons BM comme constant et nous totalisons l'effet dû à BM et a tout le cercle de rayon a)*

$2\,r\,d'r + 2\,a\,u\sin(t'-t)(d't')$, par différentiation de r^2 en regardant comme constantes les variables u et t qui fixent BM.

$$d'r = \frac{au\,\sin(t'-t)}{r}(d't')$$

Fig. 180

L'expression $d^2 f = - i i' r^{1-n-k} d(r^k d'r)$ devient alors

$$d^2 f = - a i i' r^{1-n-k} d[r^{k-1} u \sin(t'-t)] (d't')$$

Pour avoir le moment élémentaire de rotation de cette force autour de Oz, il faut prendre la composante de $(d^2 f)$ normale au plan OMN *(où parallèle à M'K)*

$M'K \ a \sin(t't)$, $\frac{M'K}{M'M} = \frac{a \sin(t'-t)}{r}$

$$d^2 f \frac{M'K}{M'M} = - a^2 i i' \sin(t'-t) r^{-n-k} d[r^{k-1} u \sin(t'-t)] (d't')$$

Et le moment de rotation ***(couple élémentaire)*** sera, le bras de levier étant (u) pour cette composante normale à (u) et à l'axe Oz,

$$d^2 M = -a^2 i i' (d't') r^{-n-k} u \sin(t'-t) d[r^{k-1} u \sin(t'-t)]$$

Tel est le couple exercé par "le petit arc ds' du conducteur fixe horizontal pour faire tourner le petit arc ds du conducteur mobile autour de cet axe; en l'intégrant relativement aux différentielles désignées par d ***(sans accent)*** on aura le "moment" résultant exercé par le petit arc ds' sur tout le conducteur mobile; or, ***d'après l'expérience qui prouve que ce moment (Ampère dit action au lieu de moment) est nul, toutes les fois que ses deux extrémités sont dans l'axe,*** il faudra que l'intégrale soit nulle toutes les fois qu'elle sera prise entre ***deux limites pour lesquelles u = o,*** quelle que soit d'ailleurs la forme du conducteur mobile et sa position relativement au petit arc ds' situé en M', c'est-à-dire, ***quelles que soient les valeurs de r et de t*** en fonction de u, qu'il faudrait substituer à r et à t pour intégrer de u = o à = o, si cette quantité n'était pas une différentielle exacte

par rapport aux trois quantités r,t,u, qui varient avec la position du point M; or, on sait que pour que *la valeur d'une intégrale soit ainsi indépendante des relations des variables qui y entrent, et reste toujours la même entre les mêmes limites, il faut qu'elle se présente sous la forme d'une différentielle exacte entre les variables considérées comme indépendantes, ce qui ne peut avoir ici lieu à moins que"*

$$k - 1 = -n - k \quad \text{ou}$$

$$k = \frac{1-n}{2} \quad \text{ou} \quad n = 1 - 2k$$

L'expression de la force prend donc la forme de différentielle exacte qu'exige l'expérience:

$$- i\, i'\, r^k\, d\, (r^k d' r) \qquad \text{ou l'équivalente}$$

$$- \frac{i\, i'\, r^k\, d\, d'(r^{1+k})}{1+k}$$

"Quand $n = 2$, on a $k = -\frac{1}{2}$; mais quelle que soit la force des analogies qui portent à penser que n est en effet égal à 2, on n'en a aucune preuve déduite directement de l'expérience, puisque toutes les expériences faites à ce sujet l'ont été en faisant agir un conducteur voltaïque sur un aimant, et ne s'appliquent par conséquent que par une extension qu'on ne peut regarder comme une démonstration complète, à l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de courants électriques".

4) La constante k est réellement négative

"En vertu de l'équation $k = \frac{1-n}{2}$, la valeur *de k n'est pas négative qu'autant que (n) est plus grand que (1)* c'est pourquoi, avant d'avoir vérifié que cette valeur est en effet négative, je m'étais assuré que celle de *n est plus grande que 1.* Pour cela, après avoir trouvé, par un calcul très simple que, quand on suppose $n = 1$, un conducteur fixe, de quelque forme qu'il soit, ne peut exercer aucune action sur un conducteur circulaire situé dans le même plan, et que l'action entre ce conducteur circulaire et un conducteur rectiligne doit *être attractive* ou répulsive, suivant que n *est plus grand* ou plus petit que 1,..., j'avais constaté que l'action dont il s'agit n'est pas nulle, et qu'il résulte du sens dans lequel elle a lieu que n est plus grand que 1 et que k est par conséquent négatif."

5) Il est raisonnable d'admettre $n = 2$ et par suite $k = -\frac{1}{2}$

Si le courant passe successivement dans trois bobines *géométriquement semblables (traversées "en série")* bobines telles qu' on les obtiendrait en les bobinant toutes sur des portions d'un même cône à différentes distances du sommet et que la bobine intermédiaire occupe un bras de la balance astatique d'Ampère, elle se trouve toujours en équilibre sous l'action des bobines extrêmes tant que ses distances aux autres bobines sont dans le même rapport que leurs autres dimensions, *le sens du courant étant le même dans* les bobines extrêmes et celui du courant de la bobine intermédiaire étant quelconque.

Les *distances et les dimensions* des arcs des bobines grande et moyenne sont *p fois plus grandes* que les distances et les dimensions des arcs correspondants des bobines moyenne et petite. Si la distance était la même entre grande et moyenne et moyenne et petite, les forces *(donc les couples)* qui s'ex-

erceraient entre les deux premières seraient p^2 fois plus grandes que celles qui s'exerceraient entre la seconde et la troisième. Or l'expérience *montre qu'il y a toujours équilibre* ce qui exige, vu que les premières sont à une distance *p fois plus grande* que la distance séparant la moyenne de la petite que l'action dépende *réciproquement de* p^2 pour compenser les produits (ds) (ds') qui sont *directement proportionnels* à p^2.

Donc n doit bien égaler 2 et par suite k égale bien $-\frac{1}{2}$

Expérimentalement, il faut placer les plans des spires des trois bobines parallèlement à la direction du méridien magnétique du lieu, car les bobines n'étant plus de même surface on ne peut songer à réaliser un équipage rigoureusement astatique dans toutes les directions

6) L'action que subit un élément quelconque d'un circuit de par la présence de tout un circuit fermé quelconque est *normale à cet élément (ce sera la base de la loi de Biot-Savart-Laplace; Ampère la tire de sa formule le 24 juin 1822)*

$$\cos\beta = -\frac{d'r}{d's'} \qquad \textit{(voir figure 179)}$$

Décomposons "la force que l'élément ds exerce sur l'élément ds', dans la direction de ce dernier, en la multipliant par cos β" donc

$$\cos\beta\, d^2f = \frac{i\,i'}{d\,s'}\, r^{k}(d'r)\, d\,(r^{k} d'r),$$

dont l'intégrale par rapport à d est

$$\frac{i\,i'(r^{k} d'r)^2}{2\,d's'} + C^{te} = \frac{1}{2}\, i\,i'\, r^{2k}\, d's' \cos^2\beta + C^{te}$$

qu'il faut prendre entre les limites marquées par les deux extrémités du conducteur BM *(figur 180)*. Si ce conducteur BM forme un circuit complètement fermé, les valeurs de r et de cosβ seront les mêmes aux deux limites *(les deux limites étant un même point)* et l'intégrale sera nulle, d'où il suit que: "la résultante de toutes les actions exercées par un circuit fermé sur une petite portion de conducteur est toujours perpendiculaire à la direction de cette petite portion".

On vérifie aisément cette déduction de par cet autre cas d'équilibre.

Lançons un courant dans un arc de cercle conducteur qui peut se mouvoir aisément autour d'un axe coïncidant avec son axe géométrique, quels que soient les aimants ou les circuits fermés qu'on approche de l'arc de cercle, l'absence de composante tangentielle de la force agissante fait que le cercle est immobile quelle qu'intense que soit la force *(tout entière normale à l'élément rigide de courant)*

7) Toutes les parties d'un même courant rectiligne se repoussent mutuellement.

$$d^2f = \frac{i\,i'(\sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma + k\,\cos\alpha\,\cos\beta)}{r^n}\, ds\, ds'$$

Cette force $k = -\frac{1}{2}$ "devient négative quand on suppose que

les deux angles α et β *(fig.179)* tournés du même côté sont nuls, en sorte que les deux petites portions doivent se repousser quand elles se trouvent sur une même droite, et qu'elles sont dirigées vers le même point de l'espace;...... le moulinet électrique est donc le premier phénomène électrodynamique observé....."la répulsion a lieu en effet entre un courant établi dans le mercure, et ce même courant prolongé dans

un fil conducteur flottant, soit qu'il passe du mercure dans le fil ou du fil dans le mercure"

$$\alpha = \beta = 0 \quad \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma = 0 \quad \cos\alpha \cos\gamma = 1$$

$$d^2f = -\frac{1}{2}\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2} < 0 \quad \text{donc répulsion}$$

comme le veut l'expérience.

Nous dirions aujourd'hui que les électrons constituant le courant se repoussent.

Si nous appelons ω l'angle des *deux vecteurs courants*, γ étant l'angle des deux plans MM'T' et M'MT, soit donc

$\omega = \widehat{MT, M'T'}$, nous savons que $\cos\omega = \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta$ *(formule fondamentale de la géométrie analytique à trois dimensions)* et il est quelquefois plus facile d'employer la formule suivante *(obtenue en remplaçant* $\cos\gamma$ *par*

$$\frac{\cos\omega - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta}$$

dans la formule des mémoires d'Ampère.

$$d^2f = \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\beta\right)$$

Il manque évidemment le facteur constant *qui change avec tout système d'unités.* Aujourd'hui il existe des unités internationales en électricité. En exprimant *i et i' en abampères (ou décaampères)* et toutes les longueurs ds, ds', r en cm; d^2f *sera en dynes* si le second membre est multiplié par la *constante 2*

$$d^2f = 2\,(i\,i')\,\left(\frac{ds\,ds'}{r^2}\right)\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\beta\right)$$

dynes ↓ (abampères)^2 ↓ facteur purement numérique sans dim.

Le courant est donc homogène à la racine carrée d'une force dans le système électromagnétique ou électrodynamique *(des ab-units abrégé de absolute units)*

Conventions de signes: Si $d^2f > 0$ attraction des deux éléments ds et ds' suivant la droite qui les joint.

Si $d^2f < 0$ répulsion.

Applications:

Premier problème (le même énoncé ne sera pas répété à propos des solutions utilisant d'autres formules)

Un cadre rigide rectangulaire et vertical *(figures 181, 182, 187)* repose par le milieu de son côté supérieur A sur un couteau de balance normal à son plan. Dans le plan du cadre on dispose un fil vertical indéfini parcouru par un courant I de sens opposé au courant qui traverse la partie verticale du cadre qui est la plus rapprochée du conducteur rigide fixe et indéfini.

Dans quel sens faudra-t-il déplacer le couteau et de quelle quantité x? La masse du cadre est a, l'accélération de la pesanteur g.

Solution par la formule d'Ampère:

ici, $\omega = \pi$; $\alpha + \beta = \pi$; $\cos\alpha\cos\beta = -\cos^2\beta$

$$d^2f = 2\,i\,I\,\frac{dl\,dl'}{r^2}\left[-1 + \frac{3}{2}\cos^2\beta\right]$$

Par raison de symétrie, seule la composante normale aux courants va subsister; on peut en effet associer à tout courant dl un élément de même longueur s'écartant également du

pied de la perpendiculaire abaissée de dl' sur I; les deux forces forment alors les côtés adjacents d'un losange dont la résultante est bien normale aux courants; il suffira donc de ne tenir compte que des composantes normales, puisque l'on peut toujours associer les éléments de I symétriquement deux à deux.

$$d^2f \sin\alpha = 2\ i\ I\ dl\ dl' \left[-1 + \frac{3}{2} \cos^2\alpha \right] \frac{\sin\alpha}{r^2}$$

Comme toutes ces différentielles secondes sont parallèles, on peut intégrer une première fois par rapport à dl *(en considérant dl' comme une constante)* pour avoir l'action du conducteur indéfini sur le conducteur vertical qui en est le plus proche.

$$\vec{df} = \int_{\alpha=\pi}^{\alpha=0} (2\,i\,I\,dl') \left\{ -1 + \frac{3}{2}\cos^2\alpha \right\} \frac{\sin\alpha\, dl}{r^2}$$

or $l = \frac{a}{tg\,\alpha}$; $dl = -a\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}$; $r = \frac{a}{\sin\alpha}$;

$\sin\alpha \frac{dl}{r^2} = \sin\alpha \frac{-a\,d\alpha}{\sin^2\alpha} \quad \frac{n^2\alpha}{a^2} = -d\alpha \frac{\sin\alpha}{a}$;

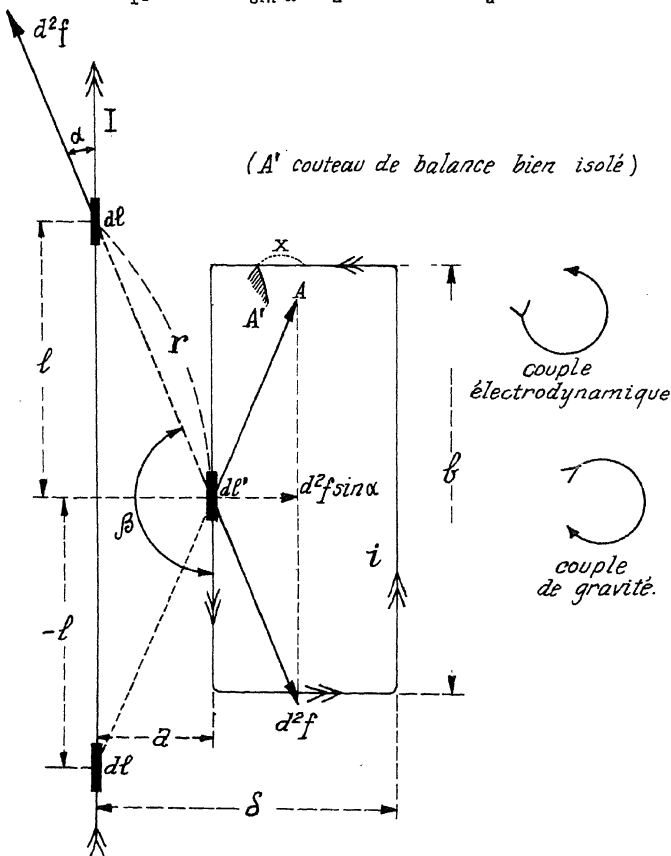



Fig. 181

$$\vec{df} = \frac{2iIdl'}{a}\int_{\pi}^{0}(1-\frac{3}{2}\cos^2\alpha)\sin\alpha\, d\alpha = \frac{-2iIdl'}{a}$$

Une deuxième intégration relative à dl' donnera *(le signe moins indiquant la répulsion entre courants)*

$$\vec{f} = \frac{-2iI}{a}\int_0^b dl' = \frac{-2iIb}{a};$$

pour le courant plus éloigné: de $\delta > a$, on aurait:

$$\vec{f'} = \frac{+2iI}{\delta}\int_0^b dl' = \frac{-2iIb}{\delta}$$

et la force résultante sera

$$F = \vec{f} + \vec{f'} = -2iIb\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\delta}\right)$$

les courants horizontaux étant à la même distance et en sens inverse ont des effets interférant.

Le signe moins indique que la résultante est une *répulsion.*

Couple électrodynamique (autour de A'): $\frac{b}{2}$ *(bras de levier)* x $2iIb\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\delta}\right)$ tendant à faire tourner le cadre dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre.

Couple gravifique: (bras de levier x*)* x mg*(poids du cadre)* dans le sens des aiguilles d'une montre.

Condition d'équilibre $x = \frac{b^2 iI\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\delta}\right)}{mg}$

(Nous ne répéterons pas ce calcul de la position d'équilibre à propos des autres méthodes).

Deuxième problème (figure 182)

Un cadre rigide formé de n spires est carré, de côté a, il a une masse de m grammes, une période d'oscillation de T secondes et le courant qui le traverse est de i abampères *(u.e.m.c.g.s' d'intensité de courant)*

Deux conducteurs verticaux indéfinis sont parcourus par un même courant I = I'*de sens contraires.* Au repos les plans IAD et I'AD étant rectangulaires, de quel angle faudrait-il tourner le tambour R pour maintenir l'équipage dans la position d'équilibre définie.

Ici $\omega = o$ *(pour A D et I courants parallèles)*

$$\alpha = \beta\,;\quad d^2f = \frac{2Ii}{r^2}\left(1-\frac{3}{2}\cos^2\alpha\right)dl\, dl'\,;$$

c'est certainement une attraction et comme dans le problème précédent la force s'obtiendra par deux intégrations avec la différence que l'effet sera n fois plus grand vu qu'il y a n spires.

$$\vec{df} = \int_{\pi}^{0} d^2f \sin\alpha = \frac{2iI\,dl'}{a:\sqrt{2}};\quad \vec{f} = \frac{2iI}{a:\sqrt{2}}\int_0^{na} dl' = \frac{2iIna}{a:\sqrt{2}}$$

Le couple électrodynamique aura pour expression le produit du bras de levier a par la valeur de chacune des résultantes de I et I' sur AD et BC c'est-à-dire *(2 f cos 45°)* a dirigé dans le sens opposé aux rotations des aiguilles d'une montre posée sur la table supportant le galvanomètre, *(le lecteur à la seule vue de la fig. 182 a reconnu l'équilibre galvanométrique usuel)*

Couple *(électrodynamique)* $= 2\,\frac{2iIna}{a:\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,a$

$= 4\,i\,I\,n\,a$ *(moteur)*

Inertie de l'équipage: $K = \frac{ma^2}{}$

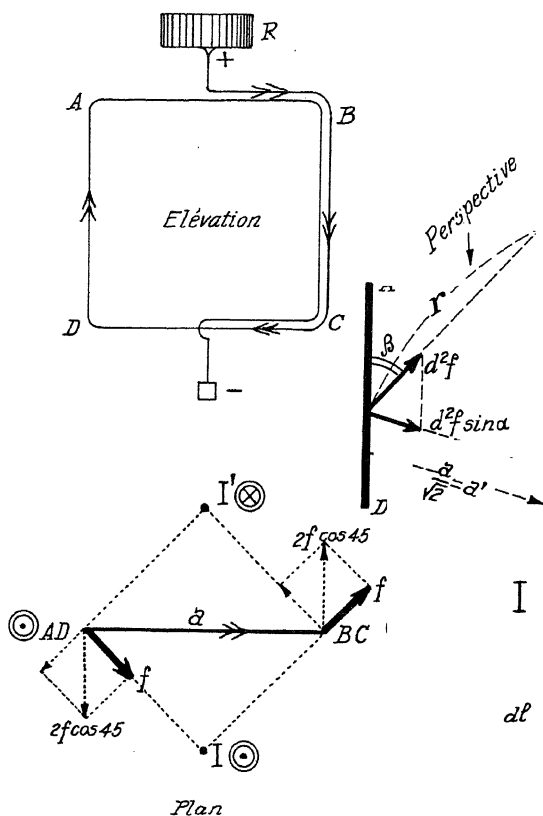



Fig. 182

$$(\text{En effet} \quad K = 2\,\frac{m}{4}\,\frac{a^2}{4} + 4\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{m}{4a}\,dx\;x^2$$

$$= \frac{m a^2}{8} + \frac{m}{a}\,\frac{a^3}{24} = \frac{m a^2}{6})$$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{C}}$;d'où la constante de torsion $C = \frac{4\pi^2\, m\, a^2}{6\,T^2}$

Le couple de torsion qui doit s'opposer au mouvement est égal au produit de la constante de torsion dont nous avons rappelé le calcul par la déviation imprimée au tambour R. Il doit être dans le sens des aiguilles de la même montre ou négatif.

$$-\,4\;i\;I\;n\;a\;=\;C\,\alpha$$

Tous les appareils électriques de haute précision *(galvanomètres, voltmètres, ampèremètres et wattmètres)* ne contiennent pas de fer et peuvent se calculer à la façon dont nous avons traité ces deux problèmes électrodynamiques.
Mais qui connaît à l'usine la formule d'Ampère?

Note V: (§ II) La formule de Biot-Savart et Laplace.

Avant OErsted *(Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam)* et les mémoires magistraux d'Ampère sur l'Electrodynamique on ne connaissait aucun lien entre les phénomènes voltaïques ou galvaniques et les phénomènes magnétiques; *mais séparément ces phénomènes avaient déjà exercé la sagacité des physiciens.*

Pour comprendre pleinement ce qui va suivre, le lecteur est prié de se reporter page 316 tome I si les lignes qui suivent sont déjà loin de sa mémoire:

La force $\vec{F}$ subie par une masse magnétique $+m$ dans un champ $\mathcal{H}$ est $\vec{F} = m\,\vec{\mathcal{H}}$.

Si $+m$ et $-m$ sont les masses terminales hypothétiques d'un petit barreau aimanté, l la distance qui est censée séparer ces masses terminales de magnétisme libre, on appelle "moment magnétique" $\mathcal{M}$ de ce petit barreau le produit de m par l.

(Le moment magnétique est d'ailleurs la seule quantité calculable).

Le couple C qui s'exerce sur ce barreau lorsqu'il est plongé dans un champ uniforme où il peut se mouvoir autour d'un axe normal à la direction du champ magnétique est $\mathcal{M}$ = bras de levier*($l\sin\alpha$)* x force $m\mathcal{H}$ soit: $C = -\mathcal{M}\mathcal{H}\sin\alpha$*(le couple tend à diminuer l'angle)*la stabilité ayant lieu pour $\alpha = 0$ [*α étant l'angle que forme le vecteur moment magnétique dirigé de la masse - m (sud) à la masse +m (nord) avec la direction du vecteur $\mathcal{H}$ champ magnétique extérieur uniforme*]

Pour de petites oscillations autour de la position d'équilibre stable, la période d'oscillation complète est d'après la mécanique
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{-\left(\frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}}}$$
K étant le moment d'inertie(que nous ne pouvons désigner par I en électricité)
du barreau par rapport à l'axe de suspension, $\alpha = 0$ la position d'équilibre ici puisque nous ne supposons aucun couple antagoniste de torsion ou autres *(barreau libre dirons-nous).*

Vu l'expression du couple, T devient *(N fréquence étant son inverse)*
$$T = \frac{1}{N} = 2\pi\sqrt{\frac{K}{\mathcal{M}\mathcal{H}}}$$

Ce barreau libre plongé dans un autre champ uniforme $\mathcal{H}'$ aura pour période nouvelle d'oscillations infiniment petites
$$T' = \frac{1}{N'} = 2\pi\sqrt{\frac{K}{\mathcal{M}\mathcal{H}'}}$$

Ayant un champ étalon $\mathcal{H}$ *(et au XIXe siècle, ce n'était pas aussi difficile que depuis l'électrification universelle)*, Biot et Savart prenaient pour étalon $\mathcal{H}$ le *champ terrestre* alors invariable et uniforme en chaque point de l'espace *(lorsqu'il n'y avait pas d'orage)* et ils déduisaient
$$\mathcal{H}' = \frac{N'^2}{N^2}\,\mathcal{H},$$
de la méthode des oscillations.

Pour avoir le moment magnétique de l'aiguille aimantée, le plus simple est de modifier son inertie d'une quantité connue, sans modifier le couple magnétique, par deux surcharges *non magnétiques* μ et μ' disposées à des distances λ et λ' de l'axe de façon à ne pas modifier l'équilibre gravifique $\mu\lambda = \mu'\lambda'$, les deux masses se trouvant de part et d'autre de l'axe comme deux enfants qui jouent à la balançoire le plus léger se pla-

çant plus loin de l'axe que son compagnon.

Avant les deux surcharges la période était

$$\frac{1}{N} = T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{\mathfrak{M}\mathcal{H}}}$$

Après, elle est devenue par suite de l'alourdissement du barreau et de la constance du couple *(substances non magnétiques comme surcharges)*

$$\frac{1}{N'} = T' = 2\pi\sqrt{\frac{K+\mu\lambda^2+\mu'\lambda'^2}{\mathfrak{M}\mathcal{H}}} \;;\; K = \frac{N^2}{N'^2-N^2}(\mu\lambda^2+\mu'\lambda'^2)$$

puis $\mathfrak{M} = \dfrac{4\pi^2 K}{\mathcal{H} T^2}$

La mécanique et un champ étalon permettent donc de déterminer le moment magnétique d'un barreau et d'avoir ainsi un appareil pour étalonner les champs uniformes.

Si le barreau est assez petit pour que le champ ne varie pas sensiblement dans la région qu'il occupe, on dira qu'il nous permet de mesurer le champ magnétique en un point *(que le champ soit uniforme ou non dans une région étendue de l'espace)*.

Opérant ainsi, les physiciens *Biot* et *Savart* trouvèrent que pour un conducteur coudé MNP, en plaçant une aiguille aimantée en divers points du prolongement de la bissectrice intérieure, le champ magnétique dû au conducteur coudé suivait la loi

$$\mathcal{H} = \frac{2i}{b}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

b étant la distance du petit aimant au coin N, 2φ l'angle intérieur du coude.

N'étant pas mathématiciens comme Ampère, qui était le vrai physico-mathématicien de l'époque, Biot et Savart vinrent confier à Laplace leur loi globale expérimentale et le mathématicien Laplace flaira aussitôt une formule élémentaire que la postérité a baptisée de "formule de Laplace", oubliant Biot et Savart qui avaient opéré la trouvaille expérimentale.

Aujourd'hui, cette formule élémentaire s'exprime vectoriellement ainsi:

$$d\vec{\mathcal{H}} = \frac{i\,\vec{ds} \times \vec{r}}{r^3}$$

ce qui s'énonce produit du quotient du courant par le cube de la distance *(facteur scalaire $\frac{i}{r^3}$)* par l'axe "produit vectoriel de la distance $\vec{r}$ et de l'élément de courant $\vec{ds}$".

Ceux qui ignorent les formules vectorielles sont comme les élèves d'Ampère de 1820 obligés de s'aider du bonhomme d'Ampère pour savoir disposer le vecteur champ élémentaire en direction et en sens. La formule de Biot-Savart-Laplace s'écrivait alors

$$d\mathcal{H}_0 = \frac{i\,ds\,\sin\alpha}{r^2}$$

α étant l'angle formé par les directions de r et de ds et $d\mathcal{H}$ étant dirigé suivant le bras *gauche* d'un bonhomme *(dont le bras est étendu latéralement et horizontalement)*, le bonhomme étant couché dans la direction du courant *(le courant lui entrant par les pieds et sortant par les cheveux)* et regardant le point O où s'exerce le champ $d\mathcal{H}_0$ de par la présence du conducteur ds.

Vérifions ensemble que la loi élémentaire de Laplace entraîne la loi expérimentale de Biot et Savart.

Comme on le voit aisément en plaçant des bonshommes en divers points du circuit coudé, *tous les champs élémentaires produits par les différents éléments ont même direction et*

sens, donc nous pourrons intégrer à l'aide du calcul infinitésimal ordinaire et le champ résultant sera du même sens que tous les $d\mathcal{H}$ composants.

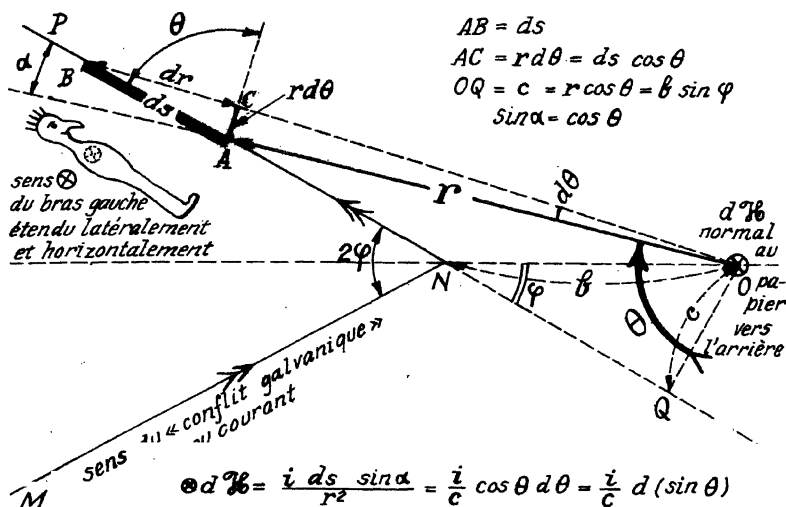



Fig. 183

$$\otimes\ \mathcal{H} = \frac{2i}{c}\int_{\frac{\pi}{2}-\varphi}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{2i}{c}(1-\cos\varphi) = \frac{2i(1-\cos\varphi)}{b\sin\varphi}$$

$$\otimes\ \mathcal{H} = \frac{2i\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}{2b\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2i}{b}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$$ formule de Biot-Savart.

Pour faire un problème d'*électrodynamique* à l'aide de la formule de Biot-Savart-Laplace, il faut après avoir calculé le champ ($\mathcal{H}$) produit par le premier des courants (i), savoir trouver quel sera l'effet de ce champ ($\mathcal{H}$) sur le second courant (i') c'est-à-dire connaître ce qu'on appelle ordinairement la seconde formule de Laplace

$$df = i\ \overline{(ds)} \times \mathcal{H}n$$

La force qui s'exerce sur un élément de conducteur plongé dans un champ magnétique uniforme est égale à un vecteur dont l'intensité est le produit du courant par la longueur du conducteur et par la composante du champ qui est normale au conducteur.

La direction et le sens de la force sont donnés par le bras droit du bonhomme *(ayant le bras étendu latéralement et horizontalement)* le bonhomme étant couché sur le conducteur, le courant lui rentrant par les pieds et les flèches du champ magnétique normal lui arrivant en plein visage.

Cette seconde loi de Laplace peut se déduire logiquement de la première en se basant sur la loi de Coulomb en magnétisme. C'est une preuve de plus que l'électromagnétisme est une science cohérente et logique.

Application: Traitons le premier problème *(énoncé plus haut)* comme l'aurait fait Laplace les jours qui suivirent la trouvaille que lui occasionnèrent Biot et Savart *(fig. 184)*

1) Champ créé en A par le courant indéfini:

$$\mathcal{H} = \int d\mathcal{H} = I \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2} \; ; \quad r = \frac{a}{\cos\theta} \; ; \quad dl = \frac{r}{c}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \; ; \qquad \otimes \mathcal{H} = \frac{I}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = \frac{2I}{a}$$

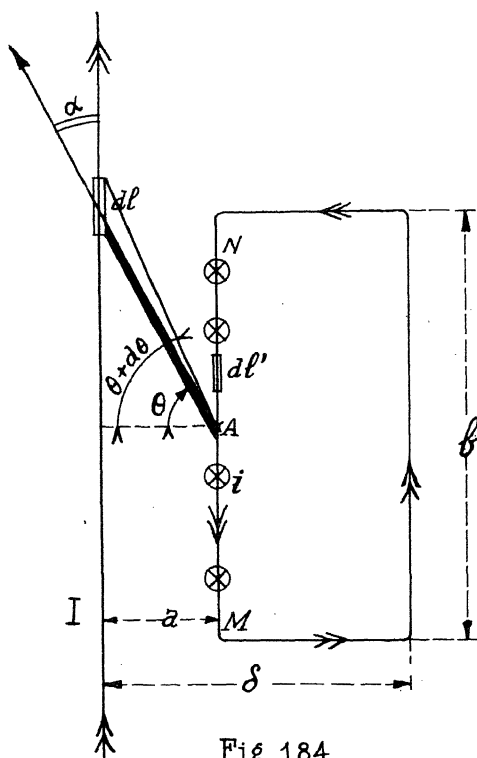



Fig. 184

2) Ce champ est sensiblement le même en tous les points du conducteur fini; en tous les points de MN le champ a donc pour valeur $\frac{2I}{a}$ et est normal au papier, d'avant vers l'arrière ⊗; la force exercée sur tout élément d'I est *(2e formule de Laplace)*

$$\vec{df} = i \, \vec{dl'} \times \vec{\mathcal{H}_n} \; ; \qquad \mathcal{H}_n = \frac{2I}{a}$$

$$\vec{f} = \frac{2Iib}{a} \qquad \text{car} \quad \int dl' = b$$

tout comme la formule d'Ampère, mais quels détours! Il a fallu calculer le champ *(donc ajouter cette notion étrangère au problème)* puis après avoir eu un champ dirigé comme une flèche qui tomberait du plafond, reprendre un bonhomme d'Ampère pour trouver le sens de la force qui est à nouveau à angle droit du champ. On aurait comme plus haut

$$\vec{F} = 2 I i b \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\delta}\right)$$

pour tout le circuit.

Note V: (§III) Le Moment Magnétique d'un Solénoïde (méthode dérivée de celle de Laplace).

Nous nous engageons davantage encore dans le postulisme symbolique et les notions de *flux* de vecteur, de *moment magnétique et d'énergie* deviennent nécessaires, ce qui nous éloigne de plus en plus du phénomène physique élémentaire *(fig. 185)*.

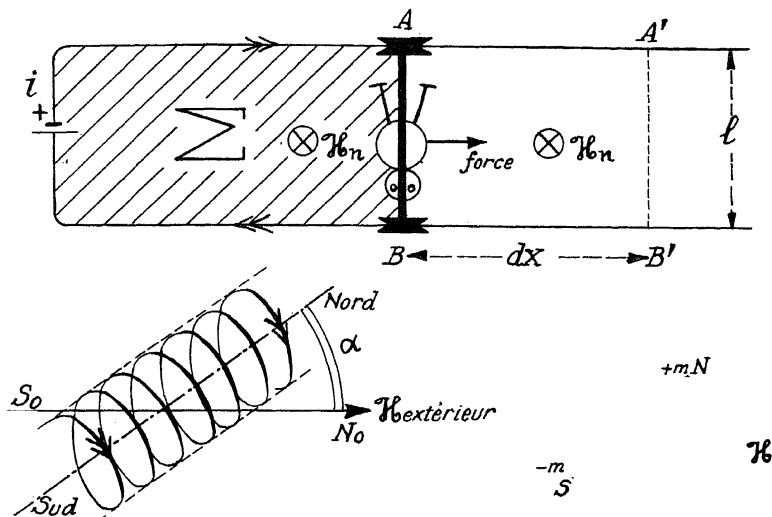



Fig. 185

Cette méthode déjà vue au No 173 est chère aux techniciens, elle est particulièrement commode dans les schémas pour remplacer plusieurs bobines par de petits aimants coaxiaux.

Soit un circuit de pile fermé par un petit chariot conducteur AB; et un champ magnétique $\mathcal{H}_n$ dirigé comme une pluie de flèches frappant le circuit.

On appelle *"flux du vecteur champ $\mathcal{H}$"* l'intégrale de surface $\int \mathcal{H}_n d\sigma$ étendue au circuit *($d\sigma$ désignant un élément de surface)* $\mathcal{H}_n$ la composante du champ qui est normale au plan du circuit et qui est comptée comme positive si, comme ici, le sens du champ normal coïncide avec le sens de translation d'un tire-bouchon ordinaire que l'on ferait tourner dans le sens de circulation du courant.

Si l'aire hachurée est Σ , et le champ uniforme, le flux *(magnétique)* de champ est initialement:

$$\Phi = \int \mathcal{H}_n \, d\sigma = + \Sigma \, \mathcal{H}_n$$

(grandeur positive puisque partout le champ est positif relativement au sens du courant)

La force *(deuxième loi de Laplace)* est dirigée vers la droite *(bras droit du bonhomme d'Ampère)* et vaut

$$f = \mathcal{H}_n \, l \, i$$

Si nous prenons deux positions successives du petit chariot mobile, A B et A'B'; le flux va varier de

$$d\Phi = + \mathcal{H}_n \,(d\sigma) = + \mathcal{H}_n \,(\, l \; dx \,)$$

dx étant le déplacement, l la longueur du chariot.

Le travail de la force électromagnétique est alors:

d A = f dx *(vu que la force est parallèle au déplacement et de même sens)*

$d\,A = (\mathcal{H}_n \, l \, i)\, dx = + i \,(\, d\Phi \,)$

En comparant les expressions de l'énergie et du flux, on trouve cette phrase qui revient sans cesse sur les lèvres de l'électricien: "le travail des forces électromagnétiques dans un moteur est égal au produit du courant par la variation du flux d'induction magnétique".

(L'induction étant simplement le champ dans l'air ou entrefer pour le différencier du champ dans l'intérieur du fer)

Nous allons appliquer cette règle pour comparer une bobine à un aimant: nous ne connaissions de l'aimant que le moment magnétique $\mathcal{M}$, nous allons trouver qu'une bobine est équivalente à un aimant de moment magnétique $\mathcal{M} = n \; S \; i$ *(n nombre de spires, S aire de la spire moyenne, i nombre de décaampères)*

Le flux magnétique à travers la bobine se compose de deux parties: une partie due "à la self" c'est-à-dire au passage du courant lui-même dans la bobine, partie qui ne dépend pas de l'orientation du solénoïde; l'autre partie due aux lignes de forces qui traversent les spires.

$$\underbrace{\Phi}_{\text{flux total}} = \underbrace{Li}_{\text{self flux}} + \underbrace{n\mathcal{H}S\cos\alpha}_{\text{flux extérieur}}$$

La mécanique nous apprend que le travail d'un couple est

$$d\;A = C \,.\, d\alpha$$

Nous avons vu d'autre part que le travail des forces électromagnétiques est

$d\;A = + i\; d\,\Phi$; le couple qui s'exercera lors d'une variation $(d\alpha)$ de (α) sera donc

$$C = + i \,\frac{d\Phi}{d\alpha} = - n S i \mathcal{H} \sin\alpha$$

Le signe moins indique seulement que l'angle α tend à diminuer pour que la bobine occupe la position d'équilibre stable $N_o \; S_o$ où $\alpha = o$

En comparant l'expression de ce couple à l'expression du couple qui agit sur un aimant

$C = - \mathcal{M}\mathcal{H} \sin\alpha$, nous sommes conduits à admettre l'équivalence de l'aimant de moment "nSi" et de la bobine au point de vue des effets à l'extérieur, l'aimant étant disposé suivant l'axe de la bobine et son pôle nord du côté où s'enfoncerait un tire-bouchon que l'on tournerait dans le sens du courant.

Application: Reprenons le premier problème avec cette manière d'assimiler tout circuit à un "moment magnétique d'aimant coaxial équivalent".

Le champ magnétique créé par le courant indéfini I étant le même en tous les points équidistants *(de x)* du courant, décomposons la surface du circuit en rectangles de largeur horizontale dx et de hauteur b.

D'après le premier cas d'équilibre d'Ampère, nous pourrons ajouter par la pensée deux courants en sens inverse le

long de chaque côté vertical de tous ces rectangles *(puisque nous n'ajoutons rien et que nous ne modifions pas les effets)*

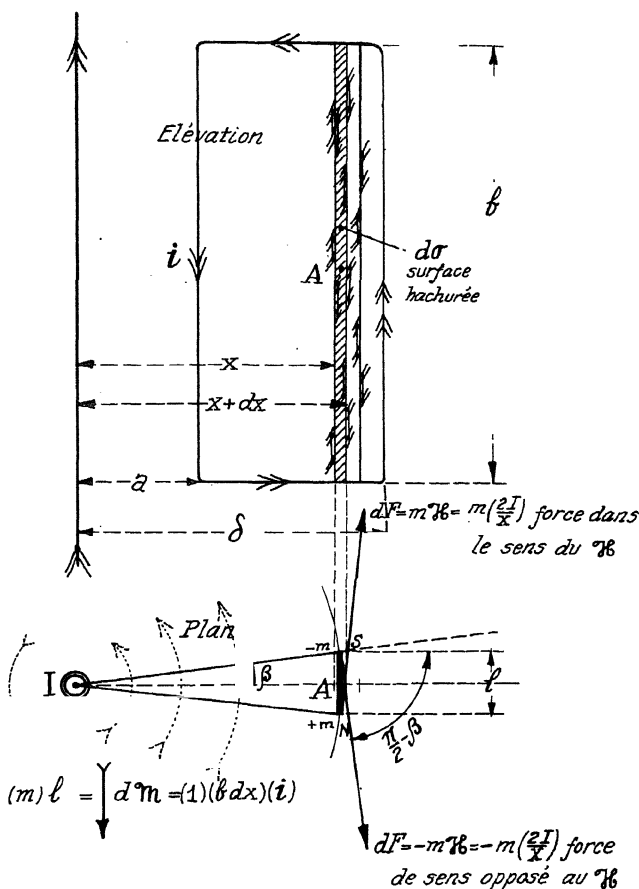



Fig. 186

Nous remplaçons ainsi le grand circuit unique par une infinité de petits circuits *(tels que celui hachuré sur la figure 186)* qui ont pour surface $d\sigma = b\ dx$ chacun et qui sont alignés côte à côte.

Mais chacun de ces circuits est assimilable à un aimant A de moment magnétique perpendiculaire au plan d. circuit dont le pôle nord serait à l'avant du papier *(en élévation)*. Le moment vaut: $d\mathcal{M} = 1\ (b\ dx)\ i$

La force que le champ magnétique de valeur $\mathcal{H}_n = \frac{2I}{x}$ produit sur chacun des pôles de l'aimant équivalent au circuit hachuré est: $dF = m\,\mathcal{H}_x = m\left(\frac{2I}{x}\right)$

La composante utile de cette force est d F $\sin\beta = m\left(\frac{2I}{X}\right)\sin\beta$,

puisque les deux pôles ici encore ont des forces également inclinées sur le plan IA;

Mais $\sin\beta = \frac{1:2}{X}$ *(on peut confondre le sinus avec la tangente)* et l'expression de la composante de la force qui restera dans l'intégration devient

$$dF \sin\beta = m\left(\frac{2I}{X}\right)\frac{1}{2X} = d\mathfrak{M}\left(\frac{I}{X^2}\right) = b\,i\,I\,\frac{dx}{X^2}$$

Les deux forces qui agissent sur les deux pôles du petit aimant ont donc pour résultante *(répulsion)*

$$\longrightarrow 2\,b\,i\,I\,\frac{dx}{x^2}$$

Et la résultante totale de toutes les forces parallèles à la précédente qui s'exerceront sur tous les petits rectangles analogues est *(répulsion totale)*

$$F = 2\,b\,i\,I\int_a^\delta \frac{dx}{x^2} = 2\,b\,I\,i\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\delta}\right)$$

comme nous l'avons eu déjà par deux autres méthodes.....

Note V: (§IV) Le feuillet magnétique d'Ampère.

C'est une méthode qui ressemble beaucoup à la précédente mais qui a sur le moment magnétique du solénoïde l'avantage *d'être plus conforme aux faits.* En effet, comme Ampère l'a montré le premier le magnétisme libre d'une bobine est situé sur ses joues terminales *(au lieu que dans un aimant réel ou équivalent le magnétisme libre n'est pas localisé aux deux extrémités).*

Au chapitre précédent nous remplacions une bobine par un aimant de masses polaires inconnues "m" séparées par une distance inconnue "l" mais dont le produit m l = $\mathfrak{M}$ devait égaler n S i *(connu).*

Pour une spire, on peut dire que nous la remplacions par une masse magnétique $\frac{Si}{l}$ située à l d'une autre masse magnétique $-\frac{Si}{l}$

Ampère prescrivait d'une manière analogue de remplacer un circuit par deux feuillets *(magnetic shell)* séparés par une distance l=ε, feuillets ayant la même aire que le circuit et portant la charge magnétique $\frac{Si}{\varepsilon}$ par tour ou ce qui revient au même, "une densité de magnétisme $\frac{i}{\varepsilon}$ par tour".

Applications: Traitons le deuxième problème selon cette autre façon de voir d'Ampère.

Comme il y a n spires sur l'équipage galvanométrique, la densité sera $\sigma = \frac{ni}{\varepsilon}$

(ou comme le disait Ampère, la "puissance" du feuillet est $\sigma\varepsilon = ni$ *)*

Le rectangle de hauteur a et de largeur dx qui porte la charge négative - (a dx)σ = - a$\frac{ni}{\varepsilon}$ dx subit de par le champ magnétique produit par le courant indéfini I *(champ* $\mathcal{H} = \frac{2I}{r}$ *)* la force dirigée en sens inverse du champ *(parce que négative)*

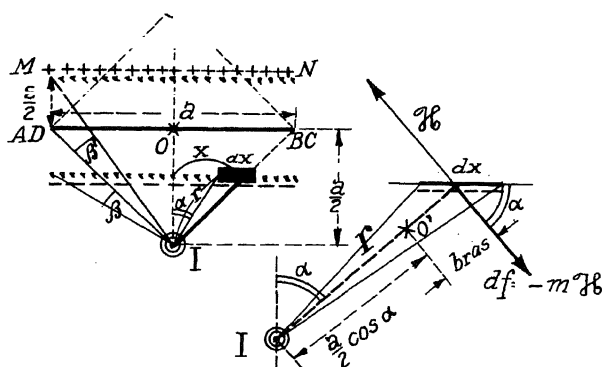
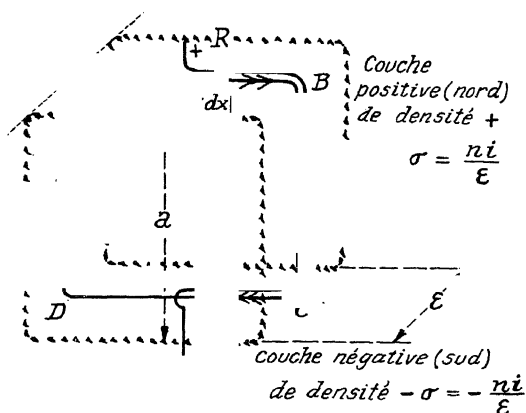



Fig. 187

$$\overrightarrow{df} = (-m)\overleftarrow{\mathcal{H}} = (-\sigma)(a\,dx)\,\frac{2I}{r}$$

dont le bras de levier du couple qu'elle produit autour du point O est *(IO' étant la projection orthogonale de OI sur r)*

$$b = \left(r - \frac{a}{2}\cos\alpha\right)$$

Le moment de la force est donc:

$$dC = -\left(\frac{2I\sigma a\,dx}{r}\right)\left(r - \frac{a}{2}\cos\alpha\right)$$

$$= -2I\sigma a\,dx + I\sigma a^2\,d\alpha$$

(vu que $dx\cos\alpha = r\,d\alpha$)

Nous devons intégrer x de $-\frac{a}{2}$ à $+\frac{a}{2}$ et α de

$$-\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right) \text{ à } +\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$$

Ce qui pour la face négative seule porte le couple *(dans un sens opposé à celui de la rotation des aiguilles d'une montre)* à la valeur

$$C = -2I\sigma a\left[\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right] + I\sigma a^2\left[\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right) - (-)\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\right]$$
$$= -2I\sigma a^2 + I\sigma a^2\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right)$$

Pour la face positive du feuillet on aurait

$C' = +2I\sigma a^2 + I\sigma a^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta'\right)$ et comme

$\beta' = \beta$ *(au second ordre près)* le couple total est

$$C + C' = +4I\sigma a^2\beta$$

Le triangle M I A donne $\dfrac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\beta} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 135°} = a$

d'où $\varepsilon = 2a\beta$ ou $\beta = \dfrac{\varepsilon}{2a}$

$$C'' = C + C' = +4I\left(\frac{ni}{\varepsilon}\right)a^2\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right) = +2Iian$$

On verrait que le conducteur indéfini I' produit un effet analogue C''' = C'' =+2 I i a n également dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre.

Et le couple total que contrebalance le couple de torsion est bien C =+4 I i a n comme nous l'avions trouvé ci-dessus.

Le couple de torsion sera le même mais négatif
C = - 4 I i a n dans le sens des aiguilles d'une montre.

Nous avons placé le feuillet magnétique d'Ampère après le moment magnétique d'un solénoïde pour éviter des redites.

Le lecteur nous excusera d'avoir donné de plus amples explications à propos de la formule d'Ampère*(qu'on ne trouve plus guère dans les manuels)* qu'à propos des formules dites de Laplace qui sont partout et que nous avons développées au début du chapître.

Cette note a été rédigée surtout à l'intention de ceux qui "apprennent" la physique; nous espérons que tous les amis de l'histoire des sciences et ceux qui admirent la beauté de l'Electrodynamique où des points de vue très différents conduisent au même résultat quantitatif partageront notre enthousiasme pour le "Newton de l'Electricité".

D'ailleurs de jeunes physiciens comme G. Bruhat remettent le feuillet magnétique en vogue.

Si j'ai pu décider quelques lecteurs à lire les mémoires d'Ampère, je serai satisfait d'avoir aidé à faire connaître un trésor incomparable de méthodologie positive.

Problème 38:

L'armature d'un moteur continu a une résistance de 0.064 ohm $\left(\frac{R}{4}\text{ du texte}\right)$ et quand le moteur marche attelé, il absorbe 81 ampères d'une distribution à 110 volts.

a) Quelle est la puissance empruntée au réseau?

b) Quelle puissance , fraction de la précédente, est gaspillée par effet joule?

c) A quoi sert la différence?

Exprimer en volts au lieu d'en watts les questions b et c; quelle fraction du voltage aux bornes sert à vaincre la résistance ohmique de l'enroulement, et à quoi sert le reste *(110 volts - la chute ohmique de tension)*?

Rép: 8 Kilowatts 91 ; 420 watts; à travailler,à surmonter la force contre-électromotrice; 5 volts 18; le reste 104.82 sert à vaincre la force contre-électromotrice du moteur.

Problème 39:

L'enroulement d'un électroaimant a une résistance de 22 ohms, et quand cet enroulement est connecté à des barres omnibus à 110 volts, le courant continu s'élève rapidement de zéro à la valeur de régime- *(laquelle?)*

A l'instant où le courant vaut 2 ampères, quelle puissance est fournie par le secteur, quelle puissance est consommée en chauffage, et qu'advient-il de la différence?

Comme précédemment, traduire en volts ce qui a été demandé en watts: volts employés pour vaincre la résistance ohmique, volts de force contre-électromotrice due à l'augmentation de l'aimantation.

Et si l'enroulement est de 1000 tours de fil, quel est le taux de variation du flux magnétique.

Réponse: 5 ampères; 220 watts; 88 watts; 132 watts servent à aimanter l'électro; 44 volts de chauffage; 66 volts de force contre-électromotrice à vaincre; $6.6 \times 10^6 \frac{\text{maxwells}}{\text{seconde}}$

Problème 40:

Une bobine a une résistance de 20 ohms et une self de $\frac{6}{10}$ henry connectée à une source de 110 volts continu le courant va s'élever encore à 5 ampères comme dans le problème précédent, mais cette fois ***si nous supposons qu'il n'y a pas de fer*** nous pourrons effectuer tous les calculs.

a) Taux de variation du courant initialement?

b) durée que mettrait le courant à atteindre sa valeur de régime s'il gardait le taux de variation initial *(constante de temps du circuit)*

Réponse: a: $\frac{E}{L} = \left(\frac{550}{3}\right) \frac{\text{amp}}{\text{sec}}$; b: $\frac{L}{R} = \frac{3}{100}$ sec.

Problème 41:

Quel est le taux de variation du courant dans le problème précédent quand le courant passe en croissant par la valeur 3 ampères?

Réponse détaillée:

$$\begin{cases} i = 3 = 5\left(1 - e^{-\frac{200}{6}t}\right) \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_{i=3} = \frac{110}{6/10}\, e^{-\frac{200}{6}t} \end{cases}$$

de la première on tire $e^{-\frac{200}{6}t} = 0.4$

portant dans la seconde $\left(\frac{di}{dt}\right)_{i=3} = \frac{1100}{6}\, 0.4 = \frac{220}{3}\, \frac{\text{amp.}}{\text{sec.}}$

Problème 42:

Exprimer le travail *(en ergs, puis en livrexpieds)* requis pour aimanter un paquet de fils d'acier coulé isolés, le paquet est de forme prismatique: section droite 3 poucesx3 po.; longueur 20 pouces; le supposant vierge de tout magnétisme au début et porté à un état d'aimantation d'induction B=18000 *(donc H=140, d'après la courbe b acier coulé tome I, page 330)*

Réponse: d'après le graphique tome I, page 330,

$\frac{\text{volume}}{4\pi} \int H.\ d\,B = 8.15 \times 10^7$ ergs ou 6.1 livre × pieds

(l'aire évaluée à 38.5 carrés de ▩ *1000* $\frac{\text{maxwells}}{\text{cm}^2}$
10 gauss

soit $\int H\, d\, B = 385000\ \frac{\text{gauss} \times \text{maxwells}}{\text{cm}^2}$)

Remarquer que $\int H\, d\, B$ est l'aire entre la courbe et l'axe vertical des inductions. Ne pas confondre avec $\int B\, d\, H$.

Problème 43:

Sachant que l'énergie du champ magnétique est $A = \frac{1}{2} L\, I^2$

Montrer qu'il y a 10^{+9} abhenrys dans un henry et $\frac{10^9}{3^2 \times 10^{20}}$ stathenrys dans un henry.

Les problèmes sur l'électronique, l'électrostatique... seront dans le cours de troisième année.

CHAPITRE VIII

Systèmes dioptriques centrés. Microscope et Lunettes.

Sommaire :

Théorème de Fermat sur le chemin optique.- Théorème de Malus sur les surfaces d'ondes, lieux des points équidistants "optiquement" de l'objet.- Stigmatisme.- Miroirs paraboliques (*phares d'autos*).-Le dioptre sphérique est stigmate pour tous les points de sa surface, pour son centre et pour tous les points situés à $\left(\frac{R}{n}\right)$ ou à (Rn) du centre.- Aplanétisme.- Condition des sinus traduisant l'aplanétisme pour les points connus comme stigmatiques.- Surface caustique et droites focales.- Etude de la déviation du prisme.- Variation de la déviation avec l'angle d'incidence; cas des petits angles.- Comment utiliser les propriétés aplanétiques du dioptre sphérique pour *éclairer sous de grands angles et recevoir des faisceaux de grande ouverture*.-Equation de Lagrange pour un système centré.- Plans principaux et foyers principaux, position et grandeur de l'image.- Points nodaux. Rapport des distances focales extrêmes. Détermination expérimentale des éléments d'un système optique centré (*Cornu*).- Lentille épaisse.- Association de lentilles minces dans l'air, foyers et plans principaux d'un doublet.- Systèmes afocaux. Collimateur et lentille astronomique.-Lentille de meilleure forme.- Lentille à échelons (*Fresnel*).-Le coma des rayons obliques.- Distorsions en croissant et en barillet: doublet symétrique. Achromatisme (*lentilles accolées*).-Intensité lumineuse et brillance. Bougie et lumen.- Lux ou bougie-mètre.- Champ, clarté. Loupes, oculaires positifs et négatifs.- Microscope. Cercle oculaire et point oculaire.- Puissance, grossissement.- Chambre claire. Parties d'un microscope.- Jumelles à prisme.- Objectif photographique. Goniomètre.- Spectroscope à prisme.-

Le Domaine de l'Optique géométrique (objet de ce

C'est celui des milieux (*transparents isotropes*) quand les *ouvertures ou les obstacles sont suffisamment grands* pour ne pas avoir à tenir compte de la diffraction.

Les milieux isotropes sont les corps amorphes et les cristaux cubiques, les liquides et les gaz.

La vitesse de la lumière y est la même dans toutes les directions *(il n'y a "qu'un seul indice ordinaire de réfringence pour chaque radiation)*.

En troisième année, nous verrons l'optique cristalline et la diffraction, nous aurons quitté le domaine de l'optique géométrique et pénétré dans l'optique "physique".
(Tout ce qui est du domaine de l'optique physique tel que "pouvoir séparateur", ultra-microscopie, etc, sera réservé pour la troisième année).

No 201. Théorème de Fermat sur le chemin optique.

I: Notion de chemin optique.

On appelle *chemin optique* la somme des chemins géométriques multipliés respectivement par l'indice de réfringence de chacun des milieux. Ainsi deux mètres de parcours dans l'eau *(d'indice $\frac{4}{3}$)* suivis d'un mètre de parcours dans un verre *(d'indice 1.5)* forment un *chemin optique:*

$$\Sigma(n\,l) = \frac{4}{3}(200)\text{cms} + 1.5(100)\text{cms} = (417)\text{ centimètres}$$

alors que le *chemin géométrique* n'est que (200)+(100)=(300) cms.

On peut interpréter physiquement le chemin optique en disant que "c'est le *chemin dans le vide* qu'une onde monochromatique parcourrait pendant la même durée qu'elle met à parcourir les chemins géométriques réels des milieux de réfringences diverses".

II: Enoncé du théorème de Fermat: " La longueur optique d'une trajectoire suivie par la lumière pour aller d'un point (objet) à un autre point (image), après des réflexions et des réfractions, est maximum ou minimum, relativement aux longueurs optiques des trajectoires infiniment voisines ".

a) Cas du miroir plan: Dire que le rayon émané de O et passant par I semble venir du point O' symétrique de O par rapport au miroir plan *(égalité des angles i et i' et plan commun pour rayon incident, rayon réfléchi et normale au point d'incidence M)* n'est-ce pas équivalant à la proposition "le plus court chemin de O' à I est la ligne droite"?

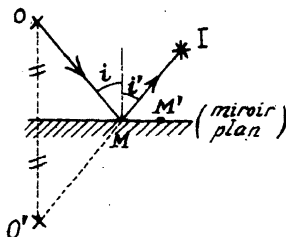



Fig. 188

Donc le *chemin suivi par la lumière pour aller* de O en I est *plus petit que tout chemin voisin OM'I, puisque(scalairement parlant)* un côté d'un triangle O'I est inférieur à la somme arithmétique des deux autres: O'M'+M'I et par suite OM+MI < OM'+M'I.

Comme les deux parcours ont lieu dans l'air en multipliant par n = 1 tous les chemins géométriques, on les transformerait en chemins optiques sans rien changer et la proposi-

tion de Fermat est vraie dans ce cas particulier.

b)Réfraction: soit un milieu d'indice 1 *(le vide)* et un milieu d'indice 1.5 *(un verre)*; les lois de Snell-Descartes donnent pour la réfraction:

loi scalaire $\{1 \sin i = 1.5 \sin r\}$

loi géométrique {le parcours du rayon indicent, (OI) le parcours du rayon réfracté (IR) et la normale au point d'incidence, (NI) sont trois droites coplanaires}

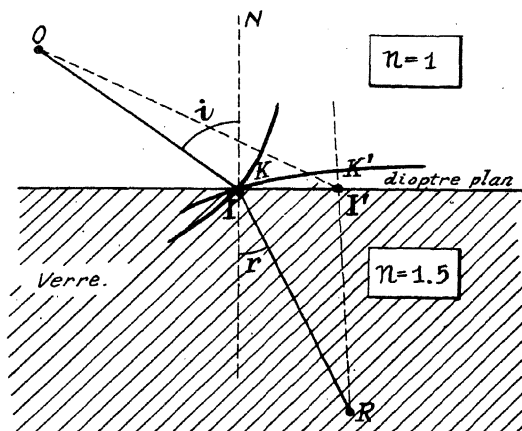



Fig. 189

il s'agit de montrer que O I R est minimum ou maximum par rapport à tout autre parcours infiniment voisin tel que OI'R

donc: $1(OI)+1.5\ (IR) \lesseqgtr 1(OI')+1.5\ (I'R)$

Décrivons l'arc de cercle KI de centre O et de rayon OI; (OK=OI) et de même l'arc IK' de centre R et de rayon RI; (RK'=IR) la proposition à démontrer peut se ramener à une autre plus simple: en retranchant 1 (OI)+1.5 RI de part et d'autre de l'inégalité, et l'on obtient la suivante:

$$0 \lesseqgtr 1\ (K\ I') - 1.5\ I'\ K'$$

Comme par hypothèse *II' est très petit eu égard à OI et RI*, les triangles isoscèles IOK et IRK' sont pratiquement *birectangles* et les triangles infiniment petits IKI' et IK'I' sont respectivement rectangles en K et en K'; d'où

K I' = II' sin i ; *(car IN⊥ à II' et OI et OI'⊥ à IK, donc I'IK = i comme formé par des côtés respectivement perpendiculaires;*

de même K'I'=II' sin r *(car IN ⊥ à II' et RI et RK' ⊥ à IK'), donc I'IK'=r, côtés respectivement perpendiculaires)*

$0 \lesseqgtr 1\ (II')\sin i - 1.5\ (II')\ \sin r$ ou, en divisant par II', $0 \lesseqgtr 1 \sin i - 1.5 \sin r =$ zéro, d'après la loi scalaire de Snell-Descartes.

Dans notre approximation, *nous avons négligé les infiniment petits du second ordre* et nous voyons que *de supposer II' infiniment petit* nous donne *une variation nulle* de chemin optique au premier ordre; c'est bien la condition d'un maximum ou d'un minimum *(la dérivée première nulle,donc la différentielle première nulle)*.

Nous admettons que le théorème de Fermat est général, quel que soit le nombre de réflexions ou de réfractions, le lecteur trouvera dans l'optique de Paul Drude des démonstrations plus générales.

No. 202. Théorème de Malus sur les surfaces d'onde:

Au lieu de considérer les *rayons lumineux (hypothèse corpusculaire de Newton, de la théorie de l'émission d'où est dérivé"le photon" d'Einstein),* on peut considérer à la façon d'Huygens, Fresnel, Maxwell, Hertz les *possibilités de position à une même époque donnée* des photons, c'est "l'onde" ou ensemble des points en phase, où les photons sont censés se trouver lors du voyage.*(hypothèse ondulatoire de la lumière)*.

Venant d'une source ponctuelle, la théorie de l'émission suppose des rayons envoyés dans toutes les directions; celle des ondulations se préoccupe des positions probables de la lumière aux diverses époques consécutives au départ du centre des ondes. Malus a relié rayons et ondes en énonçant: qu'

"*Après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, les rayons issus d'un point sont normaux à toutes les surfaces d'onde*".

En analyse, on dit "les rayons sont les trajectoires orthogonales des surfaces d'onde".

N.B: (Remarquons de suite que ce ne sera plus vrai pour le rayon "extraordinaire" des cristaux qui n'appartiennent pas au système cubique; mais, en deuxième année, où l'étude est limitée aux corps isotropes par régularité parfaite (cristaux cubiques) ou isotropes par absence de toute trace de régularité (matière amorphe),le théorème de Malus n'aura pas encore d'exception).

La proposition plus générale qui s'appliquera également aux rayons extraordinaires des cristaux sera: que "le rayon lumineux est le lieu des points où l'ondelette lumineuse touche son onde enveloppe";or, à part les corps isotropes, les plans tangents de l'onde plane ne sont pas à angle droit des rayons de l'ellipsoïde ondelette de la surface d'onde extraordinaire.

I: Notion de surface d'onde: On appelle ainsi une surface dont tous les points qui la composent sont situés à une même *distance optique* du point objet.

Tous les points de cette surface d'onde sont des contemporains,*dans le même état vibratoire*, "en phase" dirons-nous en 3ième année,puisque la durée que met la lumière à aller de l'objet à l'un quelconque d'entre eux est la même.

Dans le langage de la radio, une surface d'onde serait l'ensemble des points qui entendraient au *même instant, en même temps, à la même "époque"*, une même émission irradiée par un poste unique.

II: Démonstration du théorème de Malus (basée sur le principe de Fermat).

Soit O un objet lumineux ponctuel *(arc de lampe pointolyte)*,et une série de bâtons lumineux brisés*(à la Snell ou à la Descartes)*, OABCDE, la figure 190 représentant des réfractions en A, B, D et une réflexion en C; il s'agit de

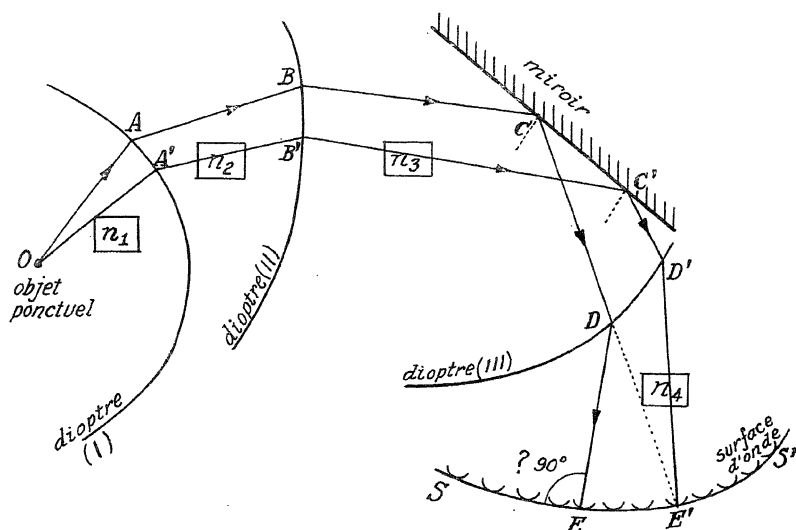
prouver que le dernier rayon DE est normal en E à la surface d'onde qui passe par ce point E.

SEE'S est une surface d'onde lieu des possibilités de position des points lumineux (photons) partis ensemble de O après avoir parcouru pendant la même durée des chemins optiques égaux.
Les surfaces (I),(II),(III) ne sont pas des surfaces d'onde mais les limites de séparation de milieux différents, (soit des "dioptres" par conséquent)

Fig. 190

Menons par O un rayon lumineux très rapproché de OA, *(AA' est infiniment petit)*; les rayons qui prolongent optiquement OA' étant A'B', B'C', C'D' et D'E'. *(E' sur la même surface d'onde que E)*les réfractions ayant eu lieu en A', B' et D' lors des changements de réfringence et la réflexion ayant eu lieu en C'.

Les distances BB'CC'DD' et EE' sont infiniment petites tout comme AA'.

Joignons D à E': les deux chemins OABCDE' et OA'B'C'D'E' ayant *même origine et même extrémité et, le second étant un trajet réel*, sont égaux au premier ordre puisque très rapprochés *(théorème de Fermat)*.

D'autre part les deux points E et E' appartiennent à la même surface d'onde donc les trajets *optiques*.

OABCDE et OA'B'C'D'E' sont égaux.

Donc, au premier ordre, *(puisque deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles)*,les trajets optiques OABCDE' et OABCDE sont égaux; ou, en détaillant; trajet

optique OABCD+$\boxed{n_4}$ DE =trajet optique OABCD+$\boxed{n_4}$DE'; ce qui exige DE=DE' .

Ceci est vrai *pour tout trajet voisin du trajet réel*; donc la sphère décrite de D comme centre avec DE pour rayon est identique au premier ordre avec la petite portion de surface d'onde qui comprend le point E; donc la surface d'onde de trace EE' est normale au rayon réel DE.

...es (sur laquelle est ba-
...me I, page 366).

Une conséquence du théorème de Malus est la construction des surfaces d'onde ultérieures *connaissant une surface d'onde donnée et les indices des milieux optiques à traverser s'ils sont isotropes)*.

Soit S_t la surface d'onde: lieu des probabilités de position d'un photon à l'époque t, tous ces photons venant d'un point 0 *(surface ponctuelle d'où ils ont été émis à l'époque zéro)*.

Où se pourront trouver les photons à l'époque $t+t_1$? Dans le vide, ils peuvent parcourir en t_1 secondes la distance

$3\times10^{10}\frac{cm}{sec}\times t_1$ sec = $(3\times10^{10})t_1$ cms; dans un milieu d'indice n, le

parcours serait (n) fois plus faible: $\frac{3\times10^{10}\,t_1}{n}$

Par l'un quelconque des points de S_t , le point E par exemple, menons une normale à la surface S_t; *d'après le théorème de Malus, cette normale est un rayon lumineux;* portons sur ce rayon la distance $\frac{3\times10^{10}t_1}{n}$ nous obtenons E_1 une position "possi-

ble" du rayon à l'époque t_1 et la surface d'onde d'époque $t+t_1$, soit: S_{t+t_1}, est normale en E_1 au rayon lumineux EE_1 *(th. de Malus)*.

On pourra donc, point par point, construire la surface S_{t+t_1} en prolongeant toutes les normales à S_t d'une *longueur optique* égale à $3\times10^{10}t_1$ c'est-à-dire en portant les longueurs géométri-

ques $\frac{3\times10^{10}t_1}{n_1}, \frac{3\times10^{10}t_1}{n_2}$,.....pour les parcours effectués en des milieux d'indices n_1, n_2,.... et en menant par tous ces points tels que E_1 des surfaces normales aux rayons tels que EE_1 on aura dessiné la surface S_{t+t_1}

Cette opération équivaut à construire l'enveloppe des

sphères de rayon: $\frac{3\times10^{10}t_1}{n_1}, \frac{3\times10^{10}t_1}{n_2}$,.....respectivement décrites

de chacun des points E et *tangentes chacune au point E_1 (où passe le rayon émané de E) à la surface S_{t+t_1}*.-

No 204.Stigmatisme: Lorsque d'un point 0 partent des rayons lumineux qui viennent tous "converger" en I et donner une *image parfaite I du point objet O*, on dit que le système optique traversé est *stigmate pour les points O et I qui* sont conjugués et réciproques *(O est l'image de I)*.

O est dit le centre des ondes incidentes, I le centre des ondes émergentes *(réfractées pour un dioptre, réfléchies pour un miroir)*.

On dit aussi souvent que O et I sont des points de " focalisation" des ondes lumineuses, des points où tous les photons passent; donc des foyers de lumière intense, vu la convergence de tous les rayons.

No 205. Un objet réel situé à l'un des foyers d'un *miroir elleptique* donne une image réelle parfaite située à l'autre foyer: *(le miroir elliptique est donc une surface stigmate pour ses foyers (ellipsoïde concave)).*

Si l'argenture est intérieure au lieu d'être extérieure, les objet et image seront virtuels tous deux, *(ellipsoïde convexe)* et tout rayon qui se dirige vers l'un des foyers est réfléchi comme s'il venait de l'autre foyer, quel que soit le point d'incidence puisque la portion de plan tangent qui sert de miroir fait toujours des angles égaux avec les rayons venant des foyers.

Ainsi *tout ellipsoïde* concave*(argenté ou doré à l'extérieur)* ou convexe *(argenté à l'intérieur)*est une surface *stigmate* pour ses foyers pourvu *qu'objet et image soient de* même *nature* tous deux réels *(ellipsoïde concave)*ou tous deux virtuels *(ellipsoïde convexe).*

Comme l'équation d'un ellipsoïde de révolution est OM+ MI = 2a si l'ellipsoïde est concave *(image réelle et objet réel)* on dit que la condition de stigmatisme par réflexion est

$$1\ (OM) + 1\ (MI) = \text{constante}$$

1 indice de l'air, M point quelconque du miroir elliptique.

Si l'ellipsoïde est convexe *(O et I virtuels)* on dit

$$1\ (-\ OM) + 1\ (-\ MI) = \text{constante}$$

C'est un autre cas particulier de la condition générale de stigmatisme

$$\boxed{n_1\,(l_1) + n_2\,(l_2)} = \text{constante}$$

n_1 fois la longueur du rayon incident $+ n_2$fois la longueur du rayon émergent doit être une constante *quel que soit le point où ait lieu la réflexion sur le miroir;*ou la réfraction sur le dioptre *(on affecte du signe moins les segments des distances à l'objet virtuel ou à l'image virtuelle du dioptre ou du miroir).*

No 206. Un miroir hyperbolique est stigmate pour les foyers de l'hyperboloïde complet dont il est la moitié pourvu que l'un des foyers soit l'objet réel et l'autre image virtuelle ou vice versa. Le lecteur polytechnicien qui sait que l'hyperbole a pour définition géométrique O M - M I = constante verra immédiatement que

$+1\ (OM) - 1\ (MI)$ ou
$-1\ (OM) + 1\ (MI)$ répondent à la condition de stigmatisme, les signes + correspondant comme toujours à la nature réelle et les - à la nature virtuelle de l'objet ou de l'image.

Nous n'insisterons pas plus sur ces miroirs elliptique et hyperbolique que les marins et les astronomes seuls emploient; au contraire, nous allons développer le cas du miroir parabolique des projecteurs *(phares d'autos).*

No 207. Miroir parabolique.

Dans un phare d'automobile, le miroir est un paraboloïde de révolution. Si l'on mettait *à la place du filament de la lampe:* de l'amadou ou du phosphore et que l'on dirigeât le miroir vers le soleil ou vers toute autre gerbe de rayons parallèles, les rayons parallèles viendraient se focaliser au foyer principal image et la substance inflammable brûlerait vite. *(C'est de cette propriété que vient le mot: foyer).* En vertu de la réversibilité de la lumière, si, inversement, nous disposons un filament de lampe à incandescence ou un petit arc *(pointolyte)* au point où les rayons solaires venaient se concentrer, ce foyer objet *(un miroir n'a qu'un*

foyer qui est tantôt foyer image, tantôt foyer objet) va envoyer des rayons sur le projecteur, rayons qui,*après réflexion, sortiront en gerbe parallèle à l'axe du paraboloïde.*

Les mathématiciens disent que la parabole *a* l'un de ses foyers à distance finie et l'autre à distance infinie pour rapprocher les propriétés de cette courbe de celles de l'ellipse ou de l'hyperbole.

Le projecteur d'automobile est un miroir parabolique concave *(argenture extérieure): (fig. 191 (a)).*

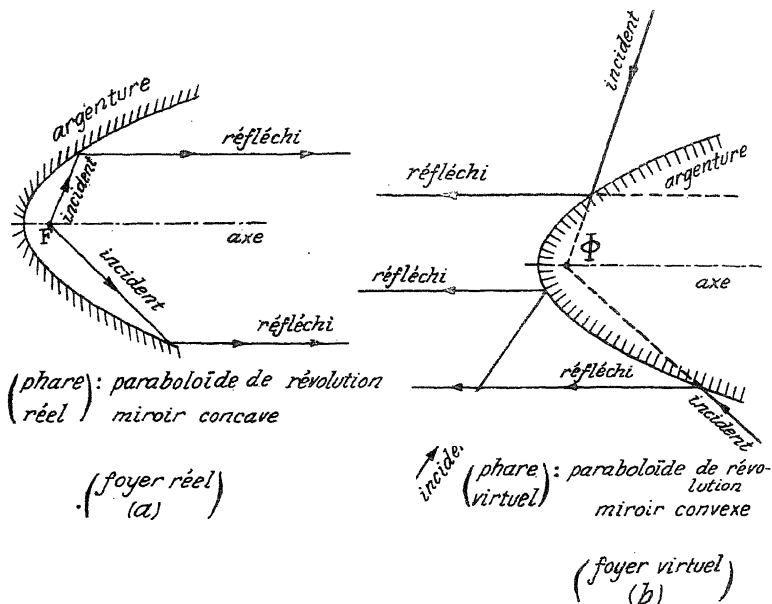



Fig. 191

Si l'argenture était intérieure, ce serait un miroir parabolique convexe donnant d'une gerbe allant au foyer comme objet virtuel un faisceau parallèle réfléchi du côté opposé où voyagent les rayons dans un phare d'auto: fig. 192 (b).

Par extension, on dit que le miroir parabolique a son foyer qui est stigmate pour "son conjugué à l'infini" c'est-à-dire pour la direction de l'axe de la parabole *(dans les deux sens).*

Ces miroirs se retrouveront comme condenseurs de lumière *(ultramicroscope)*, et objectifs de télescope.

<u>No 208</u>. Propriétés géométriques utiles pour l'étude des six miroirs "stigmates" pour leurs foyers.

a) la tangente à la parabole fait des angles α égaux avec le rayon qui vient du foyer et le réfléchi parallèle à l'axe *(la normale au miroir, perpendiculaire au plan tangent est donc aussi, elle, bissectrice de ces deux rayons).*

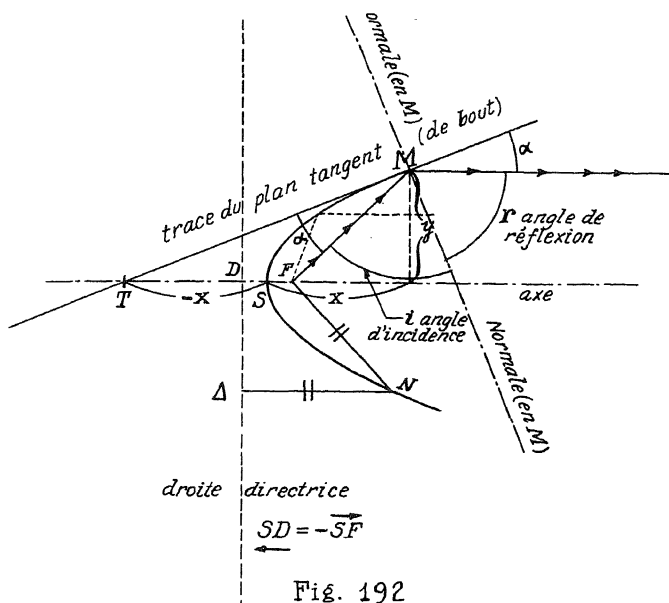



Fig. 192

b) ces propriétés sont vraies pour l'ellipse et l'hyperbole à condition de remplacer "le réfléchi parallèle à l'axe" par "le réfléchi qui s'en va-t-à l'autre foyer".

c) Pour déterminer la trace de l'axe sur un plan tangent au point $M\binom{x}{y}$ porter au delà du sommet S, une longueur $-\overrightarrow{x}$ égale et opposée à l'abscisse $\overrightarrow{x}$ ($\overrightarrow{ST} = -x$)

d) il existe une droite perpendiculaire à l'axe dite ***"directrice"*** située du côté de la convexité à une distance du sommet égale à FS et qui jouit de la propriété suivante: ***tous les points du miroir sont équidistants du foyer et de la directrice***

$$F\,N = N\Delta$$

e) ***l'équation Cartésienne*** de la parabole par rapport à deux axes x et y ayant le sommet S pour origine, Sy étant la tangente à l'origine et S x l'axe de la courbe dirigé vers la concavité est $y^2 = 4px$, 2p étant la distance DF

f) l'équation Pascalienne ***(coordonnées polaires)*** est

$$\rho = \frac{2p}{1-\cos\vartheta}$$

ϑ étant l'angle du rayon vecteur ρ avec l'axe concave de la courbe

$$\left[\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{Fm} = \overrightarrow{FM}\right.$$ d'après la propriété de la directrice;

$$p + p + \rho\cos\vartheta \cdot \quad \rho$$

$$\text{d'où} \quad \rho\,(1-\cos\vartheta) = 2\,p\ldots\ldots \textit{(fig.193)}$$

g) Pour une ***ellipse*** et pour une ***hyperbole*** il existe également une "directrice" mais le rapport des distances M F et M Δ n'est plus égal à l'unité.

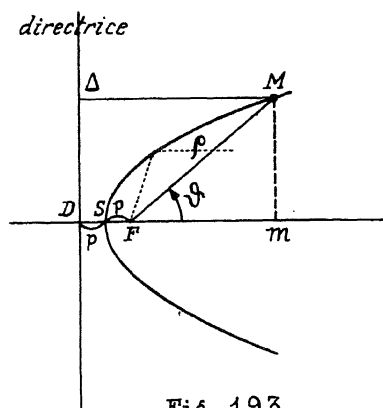



Fig. 193

On définit l'*"excentricité"* d'une conique comme le rapport des distances d'un même point M de la courbe à *l'un des foyers* F et à la *directrice correspondante* Δ *(celle du même côté que le foyer considéré relativement au centre de la courbe)*.

Ce rapport $\frac{(MF)}{(M\Delta)}$=*(excentricité*: ϵ) = $\frac{c}{a}$

Pour l'ellipse $\epsilon < 1$; pour la parabole $\epsilon = 1$; et, pour l'hyperbole $\epsilon > 1$; enfin, pour le cercle $\epsilon = 0$.
(c'est pourquoi il serait illogique de dire que $\frac{b}{a}$ *est l'excentricité, puisqu'alors le cercle serait excentrique d'excentricité 1 !!! et un "cercle excentrique est un non-sens")*

Remarquer que A l'extrémité de courbure maximum n'est *pas (pour l'ellipse) équidistante* de F et de D, puisque

$\epsilon < 1$ *(fig. 194)*

La *notion d'excentricité* est indispensable *pour étudier les coniques* et la voie la plus simple pour arriver à l'équation polaire de l'ellipse en vue de l'astronomie et de la spectroscopie où les équations cartésiennes *(du second degré)* ne sont pas maniables. De la définition de l'excentricité on tire pour l'ellipse:

$$\epsilon = \left\{\frac{\rho}{\rho\cos\vartheta + 2p}\right\},$$

ce qui donne de suite:

$$\frac{2p\epsilon}{1-\epsilon\cos\vartheta}$$

[*Le lecteur est prié de vérifier que si* $\epsilon = 1$ *(parabole) cette équation donne aussitôt le cas de la parabole; on aurait* $\frac{2p\epsilon}{1+\epsilon\cos\theta}$ *si l'origine des arcs était à gauche;* $\vartheta = \pi - \theta$]

No 209. Exfocalisation axiale d'un phare. Le lecteur en utilisant la loi de Snell*(Descartes)* $i = r$, est prié de faire la figure d'un miroir parabolique concave et de vérifier que *si la lampe est sur l'axe mais trop près du miroir ou trop loin* les réfléchis ne forment plus une gerbe parallèle mais une

$\overline{FM'}+\overline{M'F'}=\overline{FB}+\overline{BF'}=2a$

relation scalaire du jardinier qui pique 2 piquets en F et F' et avec une corde de longueur 2a trace ses platebandes

Fig. 194

gerbe divergente: d'où l'importance de bien fixer le filament de la lampe au foyer du miroir *(ne pas remplacer la lampe par une autre plus longue ou plus courte et employer une douille baïonnette et non à vis)*.

No 210. Surfaces stigmates par réfraction (dioptres stigmates)

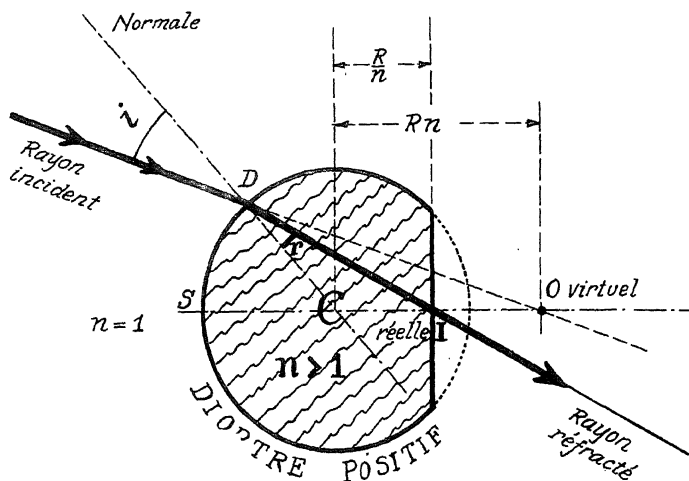
Tout dioptre qui donne d'un objet o *(réel ou virtuel)* une image I *(réelle ou virtuelle)* est de révolution autour de l'axe joignant O à I et admet pour ligne méridienne un ovale de Descartes de foyers O et I.

Soit D un point quelconque du dioptre *(surface de séparation des milieux n_o et n_i)*; pour que le *chemin optique soit indépendant de la position du point D*; et que, les *chemins optiques étant les mêmes pour tous les points du dioptre*, l'image soit parfaite, il faut donc:

$$n_o\,\overline{OD} + n_i\,\overline{DI} = \text{constante}$$

C'est l'équation d'un ovale de Descartes pour chaque valeur de la constante.

No 211. Surfaces sphériques (points stigmates des dioptres sphériques)

Si la constante des ovales de Descartes est nulle, l'ovale dégénère en sphère; l'objet et l'image sont alors de nature différente

$$1\,(-\overline{OD}) + n\,(+\overline{DI}) = \text{zéro}$$

(pour D dans la position particulière S, on vérifie que:

$$1\left[\underset{\text{obret virtuel}}{-}(R+nR)\right] + n\left[\underset{\text{image réelle}}{+}\left(R+\frac{R}{n}\right)\right] \equiv 0 \quad).$$

Fig. 195

En effet $n_0\,\overline{OD} + n_i\,\overline{DI} = 0$ donne

1) $\overline{OD}$ et $\overline{DI}$ de signes contraires et

2) $\frac{n_0}{n_i} = \left|\frac{ID}{OD}\right|$

or le lieu des points D, dont le rapport des distances à deux points fixes O et I est une constante, est une circonférence *(dans le plan)* et une sphère dans l'espace *(l'axe de rotation étant OI et la méridienne étant la circonférence)*.

I. Ainsi le dioptre sphérique est stigmate pour objet virtuel et image réelle *(ou encore objet-réel et image virtuelle) l'un des deux points étant dans le plan polaire de l'autre)*.

si $n_0=1$ *(premier milieu air ou vide)* les points conjugués pour lesquels la surface du dioptre sphérique est stigmate sont les couples de points à des distances $(\frac{R}{n})$ et (n R) *d'un même côté par rapport au centre* et cela du côté opposé à la surface réelle du dioptre S*(voir figure 195)*

C'est pour pouvoir approcher de cette condition que les condenseurs et objectifs de microscope ont une lentille sphérique tronquée par un plan situé à la distance $\frac{R}{n}$ du centre C.

II. La relation est également vérifiée lorsque l'image et l'objet coïncident *et se trouvent sur le dioptre* car

$$n_o\,(\text{zéro}) + n_i\,(\text{zéro}) \equiv o$$

et ceci n'est pas seulement vrai pour un ovale de Descartes mais *pour tout dioptre.*

III. Le dioptre sphérique est aussi stigmate pour image et objet confondus et tous deux au centre de la sphère.

Si l'objet est virtuel l'image est réelle et réciproquement puisque d'un même côté par rapport au dioptre.

Physiquement, c'est une conséquence du fait que tous les rayons normaux *(se dirigeant au centre)* ne subissent pas de réfraction et *passent donc tous au centre tout droit.*

On peut le démontrer à partir de la condition de stigmatisme: puisque objet virtuel et image réelle *(ou vice versa)* sont confondus, la condition s'écrit:

$$- n_o\,(DO) + n_i\,(DI) = \text{constante}$$

or $DO = DI$ ici

donc $(n_i - n_o)\,DO = \text{constante}$; ce qui montre que la surface stigmate est n'importe quelle sphère de centre O.

Résumé: le dioptre sphérique est stigmate rigoureusement

1) pour tout point objet de sa surface *(image confondue avec l'objet)*
2) pour tout point objet au centre *(image confondue avec l'objet)*
3) pour tout point situé à Rn ou à $\frac{R}{n}$ du centre *(images situées à $\frac{R}{n}$ ou à Rn du centre)*, mais au-delà du centre par rapport au sommet du dioptre.

No 212. Lentilles stigmatiques de Descartes:

Ces lentilles à méridienne hyperbolique, elliptique ou ovale, utilisent le théorème suivant *(donc le lecteur trouvera la démonstration dans tout traité d'optique géométrique)*: "Les dioptres qui donnent d'un point O *(objet réel ou virtuel)*, situé dans le milieu d'indice n_o, *une image à l'infini* dans le milieu d'indice n_i sont des ellipsoïdes si $n_i > n_o$ et des hyperboloïdes si: $(n_i < n_o)$; l'objet est un foyer de ces coniques et l'excentricité est le quotient $n_i \div n_o$".

C'est la difficulté de réaliser de telles lentilles qui fait qu'on n'utilise pas actuellement ces lentilles; d'ailleurs elles ne seraient rigoureusement stigmatiques que pour une seule couleur *(elles ne seraient pas achromatiques)*.

Voir par exemple LEMOINE et GUYOT, cours de Physique, tome I, page 31.

No 213. Le Stigmatisme approché du dioptre sphérique.

Si l'image d'un objet ponctuel n'est pas ponctuelle, mais donne une petite tache sur un écran, on dit que le *stigmatisme n'est qu'approché*, que le chemin optique est *au premier ordre seulement indépendant du point du dioptre où a lieu la réfraction.*

(Noter que les lentilles sphériques ne sont stigmatiques de façon approchée que si les rayons sont peu inclinés; tandis que les lentilles de Descartes le seraient rigoureusement pour un point donné quelle que soit l'inclinaison des rayons et l'épaisseur de la lentille).

Fig. 196

La condition idéale de stigmatisme *(chemin optique indépendant de la position du point D).*

$$n_o\,(OD) + n_i\,(DI) = n_o(OS) + n_i(SI)$$

ou $$n_o\,(OD - OS) + n_i\,(DI - SI) = 0$$

Mais $OD - OS \quad (\frac{1}{OS} + \frac{1}{SC})\,\frac{t^2}{2}$

t étant l'arc tangentiel SD; en effet

$$\overline{OD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{DC}^2 - 2\,\overline{OC}\,.\,\overline{DC}\,.\cos\alpha$$
$$= (\overline{OC} - \overline{DC})^2 + 2\,\overline{OC}\,.\,\overline{DC}\,(1 - \cos\alpha)$$
$$= OS^2 + 2\,(OS + SC)\,SC\,(1 - \cos\alpha)$$

d'où puisque

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\left(\frac{t/2}{R}\right)^2 = \frac{t^2}{2R^2} = \frac{t^2}{2(SC)^2}$$

et $$\cos\alpha = 1 - \frac{t^2}{2(SC)^2}$$

on a $$\overline{OD}^2 = \overline{OS}^2 + 2\,(\overline{OS} + \overline{SC})\,\overline{SC}\,\frac{t^2}{2(\overline{SC})^2}$$

$$= \overline{OS}^2\left[1 + \frac{\overline{OS} + \overline{SC}}{\overline{OS}^2 \times \overline{SC}}\,t^2\right]$$; extrayant la racine carrée, il vient:

$$\overline{OD} = \overline{OS}\quad\left(1 + \frac{\overline{OS} + \overline{SC}}{\overline{OS}^2 \times \overline{SC}}\,t^2\right)^{1/2} \simeq \overline{OS}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{\overline{OS} + \overline{SC}}{\overline{OS}^2 \times \overline{SC}}\,t^2\right]$$

en négligeant les ordres supérieurs du second terme qui est petit puisque de l'ordre de grandeur

$$\left(\frac{R + R}{R^3}\right) R^2 \sin^2\alpha = \boxed{2\sin^2\alpha}$$

donc du second ordre si α est du premier ordre

donc $(\overline{OD} - \overline{OS}) \simeq \frac{\overline{OS}}{2} \; \frac{\overline{OS}+\overline{SC}}{\overline{OS}^2 \times \overline{SC}} t^2 = \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{SC} + \frac{1}{OS}\right)$

De même le lecteur trouvera aisément

$$\overline{DI} - \overline{SI} \simeq \left(\frac{1}{SI} - \frac{1}{SC}\right)\frac{t^2}{2}$$

Et la condition de stigmatisme se réduit *au premier ordre* à $n_0 \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{SC} + \frac{1}{OS}\right) + n_i \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{SI} - \frac{1}{SC}\right) = 0$

Elle doit être approximative quel que soit t pourvu que t soit petit; donc le coefficient de $\frac{t^2}{2}$ doit être nul

$$\frac{n_0}{OS} + \frac{n_i}{SI} + \frac{n_0 - n_i}{SC} = 0$$

Posons $\frac{n_i}{n_0} = n$ *(pour retrouver les formules du dioptre vues en première année).*

la condition de stigmatisme devient

$$\frac{1}{OS} \quad \frac{n}{SI} = \frac{n-1}{SC} \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n-1}{R}}$$

Remarque: Si, comme le font les livres de physique théorique on prend *comme sens positif* le sens de propagation de la lumière et comme *origine* des *segments dirigés* le sommet du dioptre on a

$$\frac{1}{-p} + \frac{n}{+q} \quad \frac{n-1}{+R}$$

formule *algébrique* toujours vraie.

alors qu'en *ne s'occupant pas de segments dirigés (convention des opticiens)* ce qui fixe les signes c'est la *réalité* ou la *virtualité* ici $(p+)$, $(q+)$, $(R+)$

$$\frac{1}{\pm p} + \frac{n}{\pm q} \quad \frac{n-1}{\pm R}$$

formule *arithmétique,* les signes devant changer dans chacun des cas particuliers de figure, les longueurs n'étant pas orientées.

Problème: Montrer que le miroir concave est stigmatique de façon approchée pour tout objet lumineux qui n'envoie que des rayons peu inclinés *(et un pinceau limité par un diaphragme);* retrouver ainsi la formule des miroirs

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

démontrée en première année arithmétiquement.

No 214. Aplanétisme d'un système "centré".

Lorsque l'on fait passer un pinceau lumineux à travers une série de milieux transparents et homogènes séparés par des "dioptres" sphériques ou plans ayant *tous leurs centres sur une même droite,* on dit avoir réalisé un "système optique centré".

(Cette définition évidente pour les dioptres sphériques est vraie pour les dioptres plans qui sont normaux à l'axe du système, on peut en effet les confondre avec une portion de sphère de rayon immense ayant son centre sur l'axe du système optique).

En supposant le stigmatisme déjà réalisé pour *deux points O et I qui sont sur l'axe* du système *(tous les pinceaux en-*

voyés par O passent par I);si de plus le stigmatisme a encore lieu pour deux points O' et I' très près de l'axe et situés dans des plans normaux à l'axe *(OO' perpendiculaire à l'axe et II' aussi)*, on dit le système être *"aplanétique"* pour les deux conjugués O et I.

Physiquement, cela veut dire qu'un petit objet plan normal à l'axe donne une bonne image plane également normale à l'axe.

No 215. Condition d'aplanétisme:

Appelant u_o et u_i les angles des rayons incident et émergent *(avec l'axe)* h_o et h_i les grandeurs linéaires de l'objet et de l'image *(comptées normalement à l'axe)*, et n_o et n_i les indices des milieux extrêmes, pour que le système soit aplanétique, il faut et suffit que

$$n_o h_o \sin u_o = (n_i h_i \sin u_i)$$

(On appelle souvent cette condition: condition d'Abbe ou des sinus).

La condition de stigmatisme était la traduction analytique du fait que"*quel que soit le point d'incidence*" *un rayon parti de l'objet passait par l'image*;ce qui assurait la *"perfection" de l'image ponctuelle*, c'était *l'identité de tous les chemins optiques OMI ou ODI*.

En vue de l'optique physique, nous allons démontrer la condition d'aplanétisme pour faire ressortir qu'elle traduit l'identité des chemins optiques O M I et O'M'I' *(ou ODI et O'D'I')*et pour indiquer que seules les surfaces sphériques peuvent être aplanétiques, c'est-à-dire donner une image plane d'un objet plan normal à l'axe.

(Ainsi le miroir parabolique qui est si parfaitement stigmatique ne peut pas servir pour la microphotographie parce qu'il n'est pas aplanétique).

No 216. Démonstration de la condition d'aplanétisme *(trois étapes)*.

I- $n_o h_o \sin u_o - n_i h_i \sin u_i$ exprime la différence des chemins optiques OI et O'I'

II- Par l'hypothèse du stigmatisme pour les points O et I sur l'axe, le chemin optique OI est indépendant du point d'incidence donc de u_o et u_i

Si le stigmatisme a aussi lieu pour la couple des conjugués voisins de l'axe O' et I', il faut que le chemin optique O'I' soit, lui aussi, indépendant du point d'incidence donc de u_o et u_i; et, puisque séparément OI et O'I' sont des chemins optiques indépendants de u_o et u_i, leur différence doit en être indépendante.

III Or pour le rayon voyageant suivant l'axe $u_o = u_i =$ zéro donc $n_o h_o \sin u_o - n_i h_i \sin u_i =$ constante = zéro ce qui est la condition d'Abbe.

La première étape exige seule une figure et quelques lignes d'explication:

.....Expression de la différence des chemins optiques OI - O'I'. *(fig.197)*

D'après le théorème de Fermat, O'A' et B'I' étant un trajet réel *(suivi par un des rayons lumineux)*et O'A et BI' étant un trajet infiniment proche ayant les mêmes extrémités que le premier, les chemins optiques O'A'B'I' et O'ABI' ne diffèrent qu'au second ordre(*No 201)* donc le chemin optique réel O'I' peut être confondu avec l'autre:

ch. op. $O'I' = (O'A)\ n_o + n_s(AB) + n_i(BI')$

Le chemin optique réel des conjugués sur l'axe est, par ailleurs,

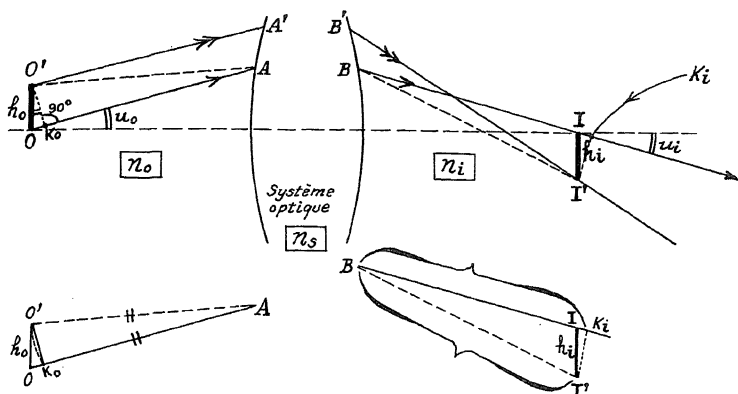



Fig. 197

ch.op. $OI = (OA)\ n_o + (AB)n_s + (BI)\ n_i$

Retranchons membre à membre ces deux chemins optiques

ch. op OI - ch. op. $O'I' = (OA - O'A)\ n_o + n_i(BI - BI')$

Pour évaluer les différences $OA - O'A$ et $BI - BI'$, des points A et B comme centres avec AO' et BI' comme ouvertures de compas, décrivons les arcs de cercle $O'K_o$ et $I'K_i$.

Géométriquement

$$OK_o = OA - O'A \quad \text{et} \quad IK_i = BI' - BI$$

et optiquement

$$n_o(OK_o) = n_o(OA) - n_o(O'A) \quad \text{et} \quad n_i(IK_i) = n_i(BI') - n_i(BI)$$

Comme les rayons sont faiblement inclinés sur l'axe (*u petit)*, on doit considérer OA et O'A comme très grands devant $O'K_o$ ou, ce qui revient au même, traiter le petit triangle $OO'K_o$ comme un triangle rectangle en K_o *(voir Nos 201, 202 pour considérations analogues)*.

$$OK_o = h_o \sin u_o \quad \text{et, de même,} \quad IK_i = h_i \sin u_i$$

On voit que, en négligeant les infiniment petits du deuxième ordre,

$$(\text{ch.opt.}OI) - (\text{ch.opt.}O'I') = (h_o \sin u_o)n_o + (-h_i \sin u_i)\ n_i$$
$$= n_o h_o \sin u_o - n_i h_i \sin u_i$$

Au lecteur le soin de verifier les étapes II et III.

No 217. Toute surface *stigmate et aplanétique* tout à la fois est une surface sphérique (*le lecteur va voir clairement pourquoi les opticiens ne construisent pas les lentilles de Descartes qui ont le même avantage et le même défaut que le phare parabolique)*.

La condition d'aplanétisme exige

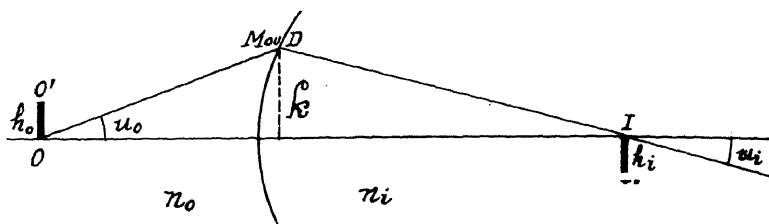
$$n_o h_o \sin u_o = n_i h_i \sin u_i$$

(M si la surface est réfléchissante, D si elle est réfringente).

Fig. 198

ou encore
$$\frac{n_o h_o}{n_i h_i} = \frac{\sin u_i}{\sin u_o} = \frac{k \div ID}{k \div OD} = \frac{OD}{ID}$$

On voit que le point D du dioptre *(ou M du miroir)* doit appartenir à un lieu tel que le rapport de ses distances aux deux points fixes *(O et I les conjugués)* soit une constante. Or, c'est dans le plan une circonférence et dans l'espace une sphère.

Conclusion: Mieux vaut se contenter du stigmatisme approché des surfaces sphériques puisque seules les surfaces sphériques permettent l'aplanétisme.

Il est heureux que ce soient précisément les surfaces les plus faciles à construire *(voir H.Pariselle: Les instruments d'Optique, A.Colin)*.

Etude géométrique en vue de saisir la nécessité de des faisceaux de large ouverture.

Droites focales des pinceaux lumineux et surfaces caustiques.

On a déjà vu *(théorème de Malus)* que les rayons sont normaux aux surfaces d'onde des milieux isotropes; on peut donc, comme l'ont fait Gauss et Sturm, déduire la répartition des rayons lumineux réfléchis ou réfractés par une surface de *l'étude des normales à cette surface.*

C'est la géométrie des surfaces qui va nous expliquer les "aberrations" optiques de "sphéricité" *(aberration sphérique sur l'axe et aberrations sphériques hors de l'axe: coma, a-stigmatisme, distorsion, etc,,)*

Nous avons déjà indiqué *(No 91)*, à propos de tension superficielle, qu'en tout point d'une surface, *un plan mené par la normale* découpe sur la surface une certaine courbe dont *la courbure varie lorsque le plan séoant tourne autour de la normale.*

Parmi toutes ces courbes planes il en existe deux qui sont celle de courbure maximum et celle de courbure minimum qui correspondent à deux positions à angle droit du plan sécant.

Ces courbes, qui forment entre elles un angle droit, sont dites les *"sections principales"* de la surface au point considéré.

Pour fixer les idées supposons que nous ayons tracé sur la surface une ligne qui coïncide avec une section principale: on l'appelle "ligne de courbure". Par tout point d'une surface, il y a évidemment deux lignes de courbure orthogonales.

Une petite portion de surface peut donc être considérée comme formée par un quadrillage curviligne de deux systèmes orthogonaux de lignes de courbure.

Si l'on réalise en fil métallique ou en verre ces deux réseaux de lignes de courbure et que l'on plonge le tout dans une solution de savon et de glycérine, les lignes de courbure seront la carcasse de la surface formée par les arcs de lame de savon pourvu que le filet ait *ses mailles à angle droit.*

Toutes les normales à la surface *élevées le long d'une même ligne de courbure* se coupent au centre de cette ligne de courbure. Il y a donc deux centres de courbure et deux rayons de courbure principaux. La figure 199A se rapporte au cas le plus utile ici: celui où les deux centres de courbure sont *d'un même côté (par rapport à la surface)* sur la normale principale: on dit alors que les *rayons de courbure principaux sont de même signe.*

Deux normales au contraire élevées en des points qui ne *sont pas sur une même ligne de courbure ne se coupent pas.*

Pour faciliter la représentation, nous supposerons la surface vue de profil *(son plan tangent de profil)* et les lignes de courbure horizontale HPH' et verticale VPV'.

Si ces deux lignes de courbure étaient des circonférences toutes les normales à chacune d'elles passeraient par le centre de courbure; mais, en général, les normales à chacune d'elles sont tangentes à une courbe gauche qui est le lieu des intersections successives *(deux à deux)* des diverses normales.

Ainsi les normales le long de VPV' sont tangentes à l'enveloppe $A_2C_2A'_2$ et les normales le long de HPH' sont tangentes à l'enveloppe $A_1C_1A'_1$.

Puis si, au lieu de considérer VPV', on considère les courbes parallèles telles que W W' X X', l'enveloppe $A_2C_2A'_2$ décrit une surface dite la deuxième nappe de la "caustique" alors que l'on remplace HPH' par les courbes parallèles KK' et LL', l'enveloppe $A_1C_1A'_1$ décrit la première nappe de la "caustique".

Comme en tout point de la surface passent deux lignes de courbure, si la surface est une surface d'onde, les rayons lumineux qui sont ses normales seront tangents *à la fois* aux deux nappes de la "caustique".

Note: Cette courbe dite "caustique" où il y a concentration de lumière puisque les rayons lumineux y sont tous tangents est la courbe familière que donnent les tasses, ronds de serviette et boîtes cylindriques. Il suffit pour chaque incidence de former un réfléchi d'après les lois de Snell-Descartes pour bien voir que les rayons réfléchis ne passent pas tous par un même point mais forment par leur enveloppe cette sorte de moustache lumineuse qui s'appelle "la caustique". La figure 200 illustrera et la notion d'enveloppe *des rayons 1' 2' 3' 4' 5' 6' réfl.)*et le pourquoi de la caustique

No 219. Lorsque le point lumineux objet est *sur l'axe* d'un système centré, les surfaces d'onde sont évidemment de révolution autour de l'axe du système et leurs lignes de courbure sont *des parallèles et des méridiens (tout comme en géographie):*Examinons le cas d'une lentille convergente*(fig.201)*

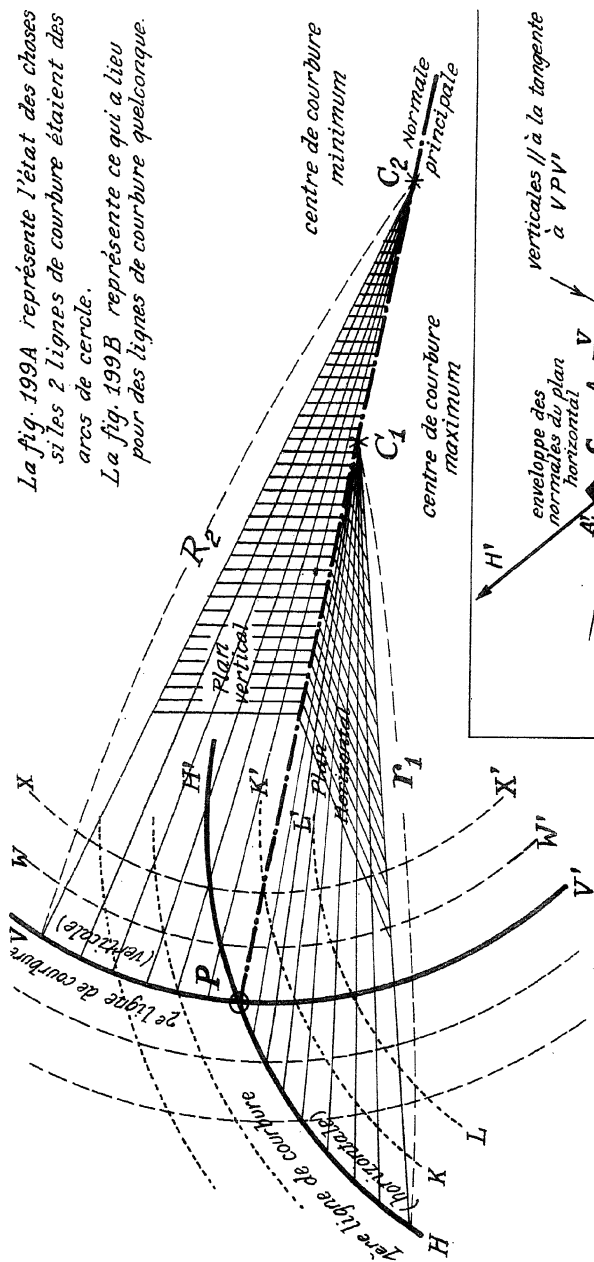
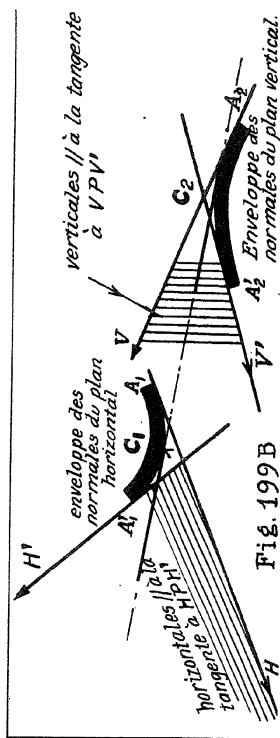



Fig. 199A

Fig. 199B

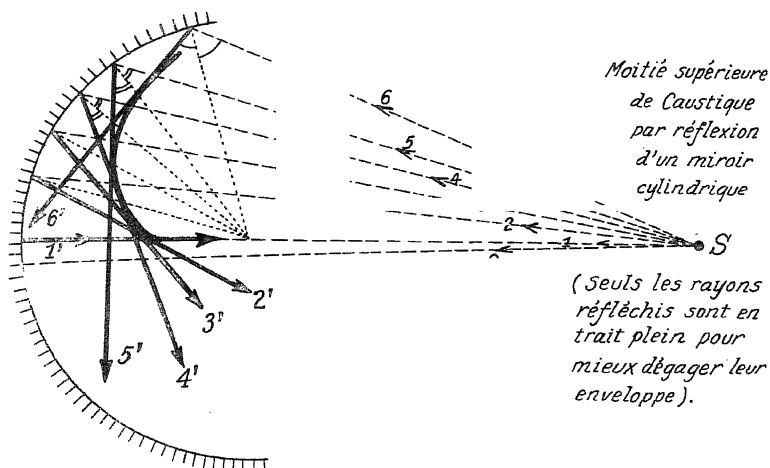



Fig. 200

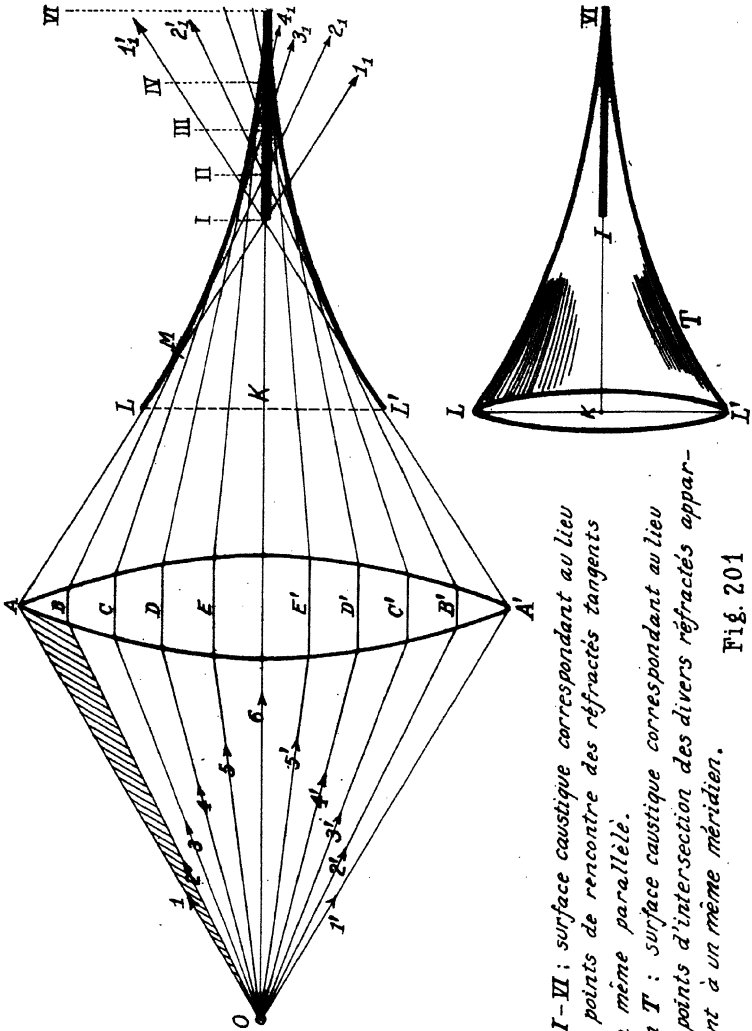
Dans le plan de la figure, deux rayons extrêmes marginaux 1 et 1' frappant la lentille convergente iront se rencontrer après réfraction en I; en ce point I sur l'axe, iront tous les rayons du cône de sommet O engendré par la rotation du rayon 1; donc ce point I appartient à la caustique enveloppe puisque toute une catégorie de rayons s'y croisent et comme tous les cônes ayant pour méridiennes 2,3,4.... iront aussi se focaliser en II, III, IV, *également sur l'axe* la première nappe de la surface caustique est donc réduite à une portion de l'axe I→VI. En examinant ce qui se passe dans un plan méridien, on voit que la courbe enveloppe L (VI) L' présente un point de rebroussement en (VI).

C'est la méridienne de la seconde nappe de la surface caustique correspondant au lieu de rencontre des *divers rayons appartenant à un même plan méridien. (fig.201)*

Si l'on ne diaphragmait pas, en plaçant un écran perpendiculairement à l'axe, entre K et I, on coupe seulement la seconde nappe de la surface caustique *(celle en forme de pavillon acoustique)* onvoit un cercle lumineux brillant plus éclairé à l'intérieur qu'à l'extérieur.

Si l'écran est entre I et VI, on rencontre les deux nappes de la surface caustique, centre très brillant entouré d'une petite couronne fortement éclairée de même qu'en coupant le pavillon d'une fleur de liseron on aurait la trace de la corolle et la trace du pistil.

No 220. Effet du diaphragme.

Lorsqu'on ne laisse plus passer tous les rayons réfléchis, mais qu'on délimite un "pinceau" ou petit faisceau à l'aide d'une *ouverture appelée diaphragme,* après réfraction *(ou réflexion dans le cas d'un miroir)* les rayons émergents sont toujours tangents aux deux nappes, de la surface caustique et en *coupant le pinceau émergent à l'aide d'un écran,* on s'aperçoit qu'aux positions où la lumière est le plus in-

Ligne I–VI : surface caustique correspondant au lieu des points de rencontre des réfractés tangents à un même parallèle.

Pavillon T : surface caustique correspondant au lieu des points d'intersection des divers réfractés appartenant à un même méridien.

Fig. 201

V'
Q'
Q
J'
H'
P
H
J
V
Elément de surface caustique parallèle au plan V'VΛ lieu des enveloppes des rayons émis par les diverses lignes de courbure horizontales telles que HH' et QQ'.
Σ_1
enveloppe de l'arc QQ'
A'_1
C_1
A_1
A'_2
C_2
A_2
Λ
Rayon moyen du pinceau
enveloppe de l'arc JJ'
verticale
horizontale
Σ_2
Elément de surface caustique parallèle au plan HPH'Λ lieu des enveloppes des rayons émis par les diverses lignes de courbure verticales telles que V'V et J'J.

Fig. 202

tense, les *deux petites aires "d'amincissement" sont perpendiculaires entre elles.*

Les rayons qui composent le pinceau sont en effet normaux à une surface d'onde *(th. de Malus)* soit donc ΔS l'aire de l'élément de surface d'onde traversée par le pinceau et soit M le rayon moyen *(axe du pinceau lumineux). (fig.202)*

Les normales à la surface ΔS le long de la ligne de courbure HPH' ont pour enveloppe la courbe $A_1 C_1 A'_1$ tangente au rayon moyen du pinceau en C_1 centre de la plus grande courbure de ΔS. Quand on opère la même construction (*qui n'est faite sur la figure que pour QQ'*) pour toutes les lignes de courbure parallèles à HH' qui forment le réseau horizontal de la surface d'onde ΔS, on a un ensemble de petites enveloppes qui forment l'élément de la surface caustique Σ_1(*ou mieux l'élément de l'une des nappes de la surface caustique)* et comme le montre la construction, le plan de cette petite aire Σ_1 est à peu près le plan d'élévation V'PVM

En effet, les *petites enveloppes telles que $A_1 A'_1$* sont à peu près courbes parallèles entre elles et *sensiblement des portions de droite parallèles au rayon moyen.*

(Ne pas oublier que ΔS est en réalité un infiniment petit).

D'autre part, les normales à chacune des lignes de courbure horizontales forment un réseau de plans horizontaux, donc les centres de courbure de leurs enveloppes seront également sur une verticale.

On voit ainsi que cette portion Σ_1 de surface caustique se confond avec le plan principal vertical de ΔS.

Le lecteur verra de même que les lignes de courbure verticales ont une famille d'enveloppes qui tapisse un élément de surface caustique Σ_2*(autre nappe)* lequel coïncide avec le plan principal horizontal HPH'M

(Le dessin n'a été indiqué que pour VPV' d'enveloppe $A_2C_2 A'_2$ et esquissé seulement pour JJ' d'enveloppe // à $A_2C_2A'_2$)

Il est bien clair maintenant que *les aires "d'amincissement"* où la lumière est intense *(puisque les normales à l'onde s'y coupent) sont à angle droit* l'une de l'autre.

No 221. Focales de Sturm.

En disposant un écran en chacun des centres de courbure principaux de la portion de surface d'onde traversée par le pinceau émergent, on obtient deux petites droites lumineuses qui sont dites "focales" et cela quelle que soit l'orientation de l'écran; ces focales ne sont pas rectangulaires en général.

Mais si l'on dispose l'écran *normalement au rayon moyen,* on a alors deux focales toutes deux perpendiculaires au rayon moyen et perpendiculaires entre elles; ce sont les focales de STURM.

C'est la distance de ces deux focales de Sturm *(donc des deux centres de courbures principaux)*qui mesure l'a-stigmatisme.

Si les deux focales de Sturm se coupent *(deux rayons de courbure égaux)*les deux focales sont réduites à un point où se focalisent tous les rayons du pinceau *(stigmatisme parfait).*

Si les focales sont très voisines, donc courtes, il y a stigmatisme approché.

La focale *axiale ou sagittale* est une petite portion de l'axe due aux familles de rayons du pinceau qui *font un mê-*

me angle avec l'axe du système centré: donc un cône et convergence en un point de l'axe pour chaque angle et, pour les divers angles, divers cônes et divers points sur l'axe.

Les rayons du pinceau qui sont dans une section principale vient passer par un même point *(voir la figure 201 et considérer le pinceau hachuré OAB, les rayons dans le plan de la figure se croisant en M)*.Si maintenant nous considérons tous les plans de section principales infiniment voisins,le point M décrit un petit arc de cercle de plan normal à la section principale considérée: c'est une seconde focale du pinceau autre focale de STURM dite *transverse ou tangentielle.*

Nous allons de suite calculer les focales de Sturm pour le *miroir sphérique concave*.Ce sera la meilleure façon de retrouver les foyers et de comprendre la *nécessité de diaphragmer pour avoir un stigmatisme approché et éviter les aberrations.*

Passant d'un pinceau à un faisceau de large ouverture, l'enveloppe des focales sera tout naturellement la surface caustique à deux nappes.

No 222. Focales du miroir sphérique concave données par les rayons inclinés sur l'axe.

{ *A)*focale sagittale ou axiale *(certains disent radiale à tort)*

{ *B)*focale tangentielle ou transverse.

Tout pinceau lumineux qui frappe un miroir sphérique en faisant avec l'axe un angle de plusieurs degrés donne lieu à un défaut de stigmatisme: le pinceau réfléchi s'appuie sur les deux surfaces focales qu'il s'agit de trouver.

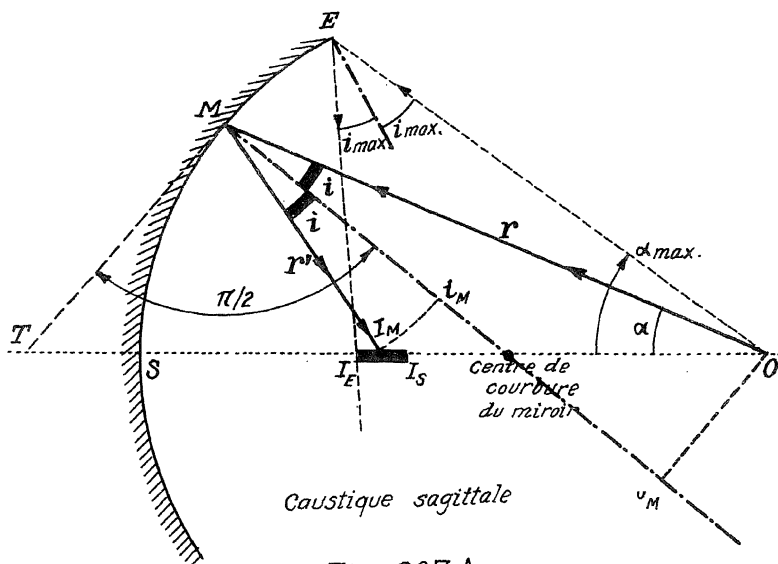



Fig. 203A

Figure 203 A: Tous les rayons formant avec l'axe un angle α (*c'est-à-dire appartenant à un cône de demi-angle plan α*) frappent le miroir sous un même angle i et viennent converger en I_M. De même, tous les rayons faisant l'angle αmax. (*les plus marginaux*) viennent en I_E alors que les rayons qui frappent le voisinage du sommet S viennent en I_S
Toutes ces familles de gerbes coniques admettant l'axe du miroir pour leur axe géométrique viennent donc se couper suivant le segment $I_E I_M I_S$, partie de l'axe très lumineuse: c'est la focale sagittale.

Pour avoir du point O une image quasi ponctuelle il faudra par un diaphragme n'utiliser qu'une petite portion du miroir entourant le point S et alors I_S sera l'image.

Avant d'indiquer l'équation de cette caustique, étudions graphiquement ce que vont donner comme image non plus, les familles de cônes tangents le long des mêmes parallèles, mais les familles d'éventails chacun dans un même méridien.

Fig. 203 B

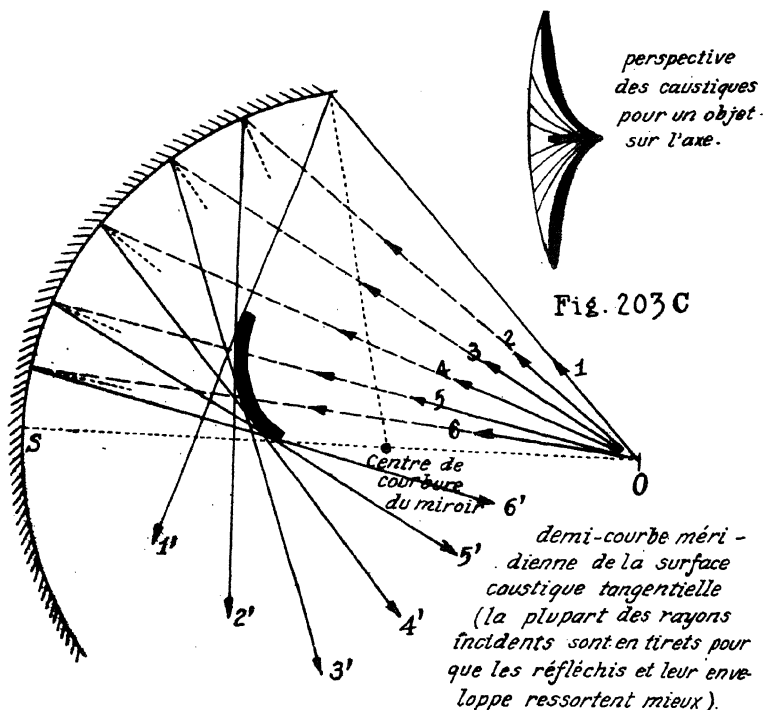



Figure 203 B: représente ce qui se passe dans la moitié supérieure du plan méridien de la feuille; supposons que le papier soit monté rigidement de façon à tourner autour de l'axe SC, et nous aurons la surface caustique tangentielle.

Nous ne saurions trop conseiller au lecteur de faire lui-même le graphique prenant plusieurs rayons émanant de l'objet O, menant la normale en chaque point d'incidence et appliquant la loi de Snell-Descartes obtenant l'éventail des

réfléchis et par suite la méridienne de la caustique tangentielle en prenant l'enveloppe des réfléchis.

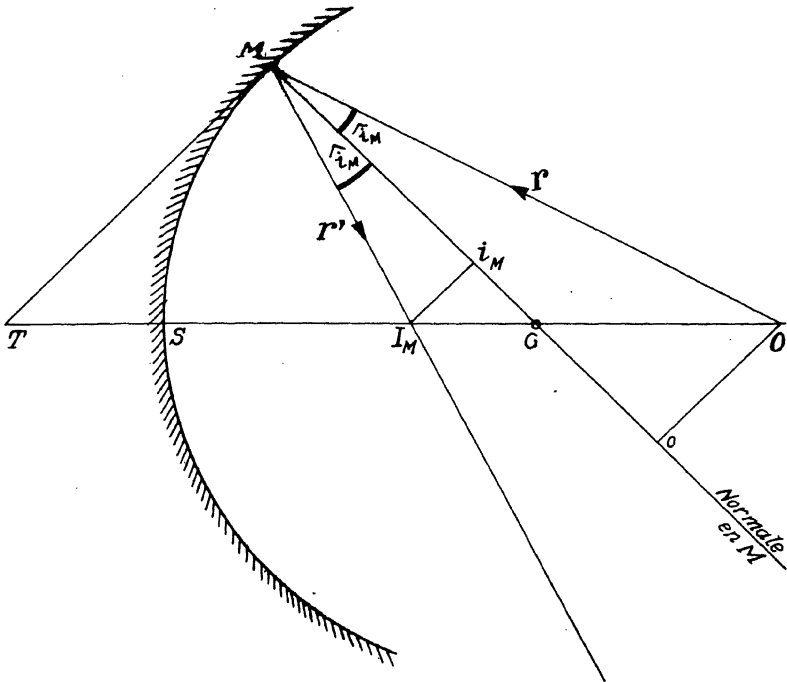



Fig. 204

(Equation de la focale sagittale (d'un miroir concave un objet O sur l'axe) la normale et la tangente étant les bissectrices de l'angle OMI_M du triangle OMI_M les quatre points TGI_MO forment une division harmonique, leurs projec-- tions sur la normale MN est aussi une division harmonique MGi_Mo *(figure 204)*

$$\text{donc} \quad \frac{1}{Mo} + \frac{1}{Mi_M} = \frac{2}{MC}$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{r\cos \widehat{i}_M} + \frac{1}{r'\cos \widehat{i}_M} = \frac{2}{R} \quad \text{ou encore puisque} \quad \frac{R}{2} = f \; (\textit{p.365, tome I}) \quad \boxed{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \quad \frac{\cos i}{f}}$$

Notons que comme le montrait le graphique point par point, quand $\hat{i}$ tend vers zéro *(incidence vers S)* $r \to os = p$, $r' \to SI_S = q$ et $\cos \hat{i} \to 1$

La formule devient donc à la limite $\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}}$ lorsque seuls les rayons centraux passent. C'est la formule trouvée en première année.

Equation de la focale tangentielle:

Soient α l'angle du rayon incident 1 avec l'axe et α' l'angle du réfléchi correspondant.

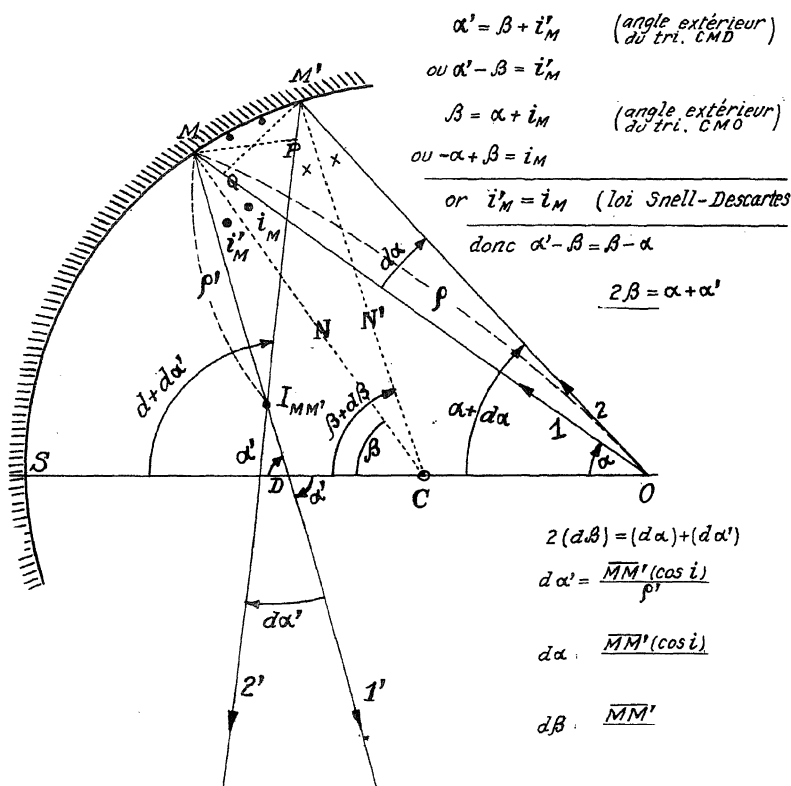



Fig. 205

Soient de même $\alpha + d\alpha$ et $\alpha' + d\alpha'$ les angles des seconds rayons incident et réfléchi avec l'axe.

Soit β l'angle que fait la normale au premier point d'incidence avec l'axe.

De même $\beta + d\beta$ l'angle que fait la normale au second point d'incidence avec l'axe.

L'arc MM' est de centre C et d'angle au centre $d\beta = \frac{\overline{MM'}}{R}$

L'arc MM' projeté en MP sous l'angle i est l'arc de circonférence de rayon ρ' et d'angle au centre $d\alpha' = \frac{\overline{MM'}\cos i}{\rho'}$

L'arc MM' projeté en MQ sous l'angle i est l'arc de circonférence de rayon ρ et d'angle au centre $d\alpha = \frac{\overline{MM'}\cos i}{\rho}$

$2\beta = \alpha + \alpha'$, devient après différentiation $2d\beta = d\alpha + d\alpha'$ ou encore, après suppression du facteur commun $\overline{MM'}$

$$\frac{2}{R} = \frac{\cos i}{\rho'} + \frac{\cos i}{\rho} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{f\cos i} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$$

Pour i très petit, rayons centraux, on retombe encore sur la formule de première année.

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{\cos}{f} \qquad \overline{f\cos i}$$

No 223. Stigmatisme.

1)rayons centraux cos i ⟶ 1 point commun aux deux focales, stigmatisme parfait mais on n'utilise alors qu'une petite portion du miroir entourant S *(si cependant l'image et l'objet sont très près du centre, cas des miroirs de galvanomètre, ceci est vrai pour tout le miroir)*

2) la distance entre les points des deux focales $r' - \rho'$ devient *(puisque $r = \rho$)*

$$r' - \rho' = \frac{r'\rho'}{f}\ \frac{\sin^2 i}{\cos i} = 0$$ condition de stigmatisme.

Cette formule nous fait retrouver le stigmatisme pour sin i petit *(rayons centraux ou image et objet près du centre)*;mais elle nous montre aussi que pour $r' = \rho' = 0$ *(c'est -à-dire, sur le miroir lui-même)* le stigmatisme est parfait.

Conclusion: Pour avoir une bonne image lorsque l'objet n'est *ni au centre de courbure, ni sur la surface du miroir, il faut s'assurer que i reste petit, donc diaphragmer.*

Les dioptres eux aussi ont leurs focales et leurs caustiques et nécessitent l'emploi de diaphragme. Sans en faire une analyse comme pour le miroir concave, nous indiquerons seulement une expérience de cours avec un ballon sphérique de chimie plein d'eau éclairé en lumière parallèle*(fig.206)*

Nous avons déjà donné *(fig. 201)* les caustiques d'une lentille convergente.

No 224. Le prisme.

Un angle solide formé d'une substance refringente et éclairé dans sa section principale *(dans un plan normal à l'arête)*.

Représentons une section principale et un rayon incident SI dans cette section. Si le prisme est d'indice supérieur à celui du milieu extérieur, le rayon va se rapprocher de la normale en la traversant et donner le rayon, IJ, puis il va s'éloigner de N' et sortir du prisme suivant JR.

Δ est la déviation du prisme.

$1 \sin i = n \sin r$

$n \sin r' = 1 \sin i'$

L'angle A du prisme se trouve être égal à l'angle des deux normales et comme cet angle est extérieur au triangle IAJ, on a:

$$A = r + r' \quad ; \text{ de même } \Delta = (i - r) + (i' - r')$$

La déviation angulaire vaut donc $\Delta = (i + i') - A$ <u>toujours vraie</u>

cette formule est toujours vraie.

.......La suivante, bien plus usitée, n'est vraie que pour un *prisme de petit angle* recevant des rayons lumineux sous une *incidente presque normale.*

A , i , i'. petits

Alors on peut remplacer les sinus par leurs arcs et

(courbes méridiennes des surfaces caustiques.)
(tracé sur un écran vertical passant par l'axe de la gerbe lumineuse.)
A
B
C
D
(mettre un peu de résorcine dans l'eau pour voir la gerbe ABCD par fluorescence.)

Fig. 206

Fig. 207

$i = nr$
$i' = nr'$
$A \quad r+r'$
$\Delta = i+i' - A = n(r+r') - A = (n-1)A$ vraie si A, i, i' petits

$$\overline{\Delta = (n-1)\ A}$$

No 225. Condition d'émergence.

Pour que les rayons traversent un prisme, il faut que l'angle du prisme soit inférieur à 2 arcsin $\frac{1}{n}$

En effet i et i' sont au plus égaux chacun à 90 ; donc sin i et sin i' au plus égaux à 1; $r = \text{arc}\left(\frac{\sin i}{n}\right)$ et $r' = \text{arc}\left(\frac{\sin i'}{n}\right)$ sont donc *respectivement inférieurs ou égaux chacun à arcsin* $\frac{1}{n}$

Et leur somme A doit être en conséquence inférieure à

$$A < 2 \ \text{arcsin} \frac{1}{n}$$

S'il n'en est pas ainsi, on a un prisme à "réflexion totale".

Minimum de déviation lorsque $i=i'$. On peut l'admettre expérimentalement en laissant fixe le collimateur qui envoie le rayon incident et en vérifiant que le minimum de la déviation a lieu lorsque les rayons incident et émergent sont symétriques par rapport au plan bissecteur du prisme.

Par le calcul, à l'aide des formules du prisme	$\sin i = n \sin r$ $\sin i' = n \sin r'$ $A = r+r'$ $\Delta = i+i'$	forme différentielle des formules du prisme	$(\cos i)di = n(\cos r)dr$ $(\cos i')di' = n(\cos r')dr'$ $0 = dr + dr'$ $d\Delta = di+di'$

on peut aussi retrouver la condition du minimum de déviation car Δ minimum exige $\Delta' = 0$; $\Delta'' > 0$ ou encore que Δ' passe du + au - en s'annulant

mais $\frac{d\Delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$; et $\frac{dr'}{dr} = -1$; $\frac{di'}{di} =$

$$\frac{d\Delta}{di} = \frac{\cos r \cos i' - \cos r' \cos i}{\cos r \cos i'}$$

N'ayant affaire qu'à des cosinus positifs, le signe de la dérivée est le même que celui de son numérateur et le même que $(\cos r \cos i')^2 - (\cos r' \cos i)^2$

Nous pourrons donc en multipliant par n^2 faire apparaître les sinus

$(n^2 - \sin^2 i)(1 - \sin^2 i') - (n^2 - \sin^2 i')(1 - \sin^2 i) = 0$ si

$(n^2 - 1)(\sin^2 i - \sin^2 i') = 0$ soit i ·

si $i > i'$ $\frac{d\Delta}{di} > 0$

si $i = i'$ $\frac{d\Delta}{di} = 0$

si $i < i'$ < 0

la dérivée de la déviation Δ s'annulant en passant du + au - , il y a bien minimum de Δ pour $i = i'$

Valeur de l'indice d'après la [illegible] e au goniomètre [illegible] de la déviation min[illegible] Δ min. [illegible] ir à la fin du chapitre pour le

les formules

$\sin i = n \sin r$

$\sin i' = n \sin r'$

$A = r + r'$

$\Delta = i + i' - A$

(donnent ici)

$i = i'$ et

$r = r' = \frac{A}{2}$

$i = i'$ $+ A$

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta min + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

No 227. Equation de Lagrange-Helmholtz.

La condition d'aplanétisme $n\,h \sin u =$ constante devient si les rayons *sont peu inclinés sur l'axe* $n\,h\,u =$ constante; et comme pour un système centré formé de dioptres sphériques l'aplanétisme est approché, on pourra, pour chacune des réfractions successives, écrire cette relation.

$$n^o h^o u^o = n' h' u' = n'' h'' u'' = \ldots\ldots \; n^{(n)} h^{(n)} u^{(n)}$$

Donc n^o et $n^{(n)}$ désignant les indices extrêmes,
h^o et $h^{(n)}$ désignant les hauteurs de l'objet et de l'image définitive,
u^o et $u^{(n)}$ désignant les angles d'un rayon *central* qui passe par le pied de l'objet sur l'axe et de celui correspondant qui passe par le pied de l'image sur l'axe,

$$n^{(o)} u^{(o)} = n^{(n)} h^{(n)} u^{(n)}$$

Définition: $\frac{h^{(n)}}{h^{(o)}}$ est dit le *grandissement (linéaire)*: g *(lettre minuscule)*

$\frac{u^{(n)}}{u^{(o)}}$ est dit le *grossissement (angulaire* ou rapport de convergence:*(lettre majuscule)* G

La relation de Lagrange-Helmholtz s'écrit souvent $gG = \frac{n^{(o)}}{n^{(n)}}$

(le produit du grandissement par le grossissement est le quotient du premier indice par le dernier indice)

No 228. Les plans principaux (de Gauss):

Ce sont *deux plans (qui remplacent le plan unique de symétrie des lentilles infiniment minces) tels* que si l'objet est dans l'un d'eux "dit le *plan principal objet*" l'image correspondante est dans l'autre "dit le *plan principal image* et alors *l'image et l'objet sont de même grandeur et d'un même côté par rapport à l'axe:* $g = +1$

(Rappelons que l'on affecte du signe + le grandissement linéaire quand l'image est du même côté de l'axe que l'objet et du signe − quand ils sont de part et d'autre de l'axe)

No 229. Existence des plans principaux:

Gauss l'a démontrée par le calcul en 1840; nous suivrons une voie plus graphique, prévenant de suite le lecteur que contrairement aux cas qui ont été vus en première année, en général *si les milieux extrêmes ne sont pas de même indice, les distances focales ne sont pas les mêmes* ($f_i \neq f_o$ *si* $n_i \neq n_o$)

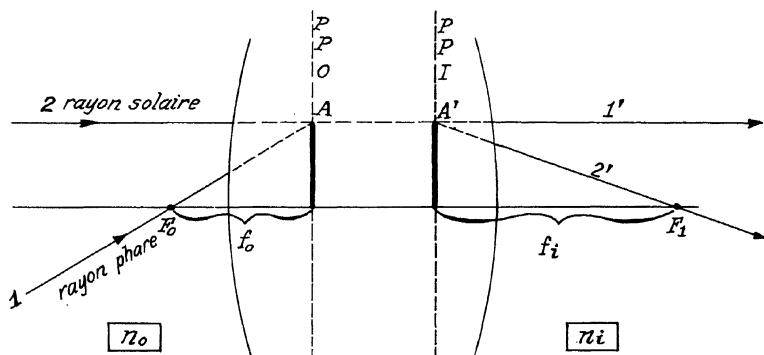



Fig. 208

La figure 208 se rapporte au cas d'un système *convergent (foyer objet dans l'espace objet)*

Le rayon (2) parallèle à l'axe comme s'il venait d'un soleil donne finalement le rayon (2') qui passe par le foyer image*(dans l'espace image puisque le système est convergent dans son ensemble)*

Le rayon (1') qui sort parallèlement à l'axe comme un rayon de phare provient, lui, d'un rayon incident qui passait par le foyer objet.

Les rayons incidents qui se croiseraient en A donnent naissance à des rayons réfractés qui se croiseraient en A' pourvu que 1 soit choisi dans le prolongement de 2.

(Nous employons le conditionnel car il ne s'agit pas de trajets réels de rayons: la théorie de Gauss étant justement utile pour substituer aux multiples réfractions réelles des divers éléments une seule réfraction équivalente mais non réelle)

Il résulte de ceci que toute gerbe conique de rayons incidents qui semblent se diriger vers le point A produit une gerbe conique de réfractés qui semblent fuir du point A'.

Il existe donc une couple de plans principaux. On démontre également qu'il n'en existe qu'une seule couple.

). Utilisation des plans principaux quand on les connaît que les foyers résultants:

Formules de *Newton (origines aux foyers)* et formules ordinaires où les origines sont *aux points principaux.*

Par les triangles semblables de la figure 209

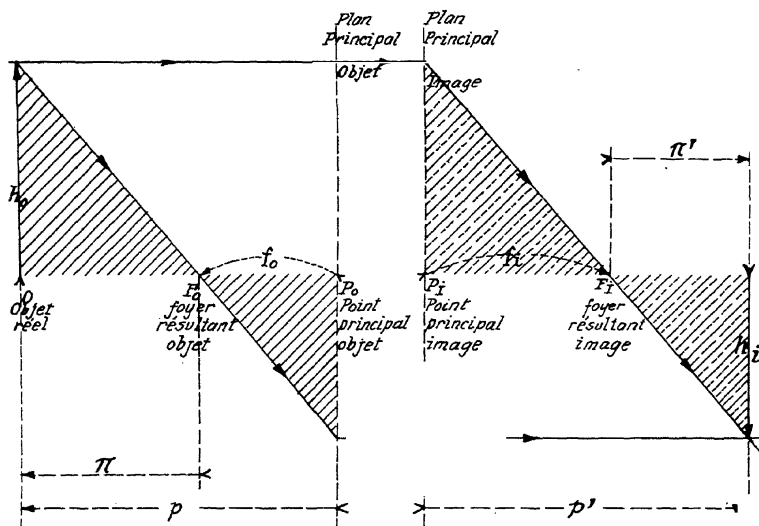



Fig. 209

$$\frac{h_o}{h_i} = \frac{-\pi}{f_o} = \frac{-f_i}{\pi'} = \frac{-p+f_o}{f_o}$$ relation algébrique des segments

formules de Newton: $\pi\pi' = f_o f_i$ $\quad \frac{h_i}{h_o} = g = -\frac{f_o}{\pi} = -\frac{\pi'}{f_i}$

La figure montre que $\pi = p - f_o$ et $\pi' = p' - f_i$; ce qui donne par substitution dans les formules de Newton:

$$\boxed{\frac{f_o}{p} + \frac{f_i}{p'} = 1} \quad \text{et} \quad \frac{h_i}{h_o} = -\frac{f_o\, p'}{f_i\, p}$$

Nous mentionnerons simplement l'existence de deux plans antiprincipaux, *symétriques des plans principaux par rapport aux foyers qui sont des plans conjugués de grandissement* **- 1** *(au lieu de* **+1** *pour les plans principaux)*

No 231. Construction géométrique du rayon rgent(*donné par un rayon incident quelconque (qui n'est ni le rayon solaire, ni le rayon phare)*

Les deux rayons F_0 et F_I sont les foyers résultants principaux d'où viennent les rayons qui émergent parallèlement (*foyer phare F_0*)et où vont les rayons qui arrivaient parallèlement sur le système optique (*foyer image F_I*).

Mais la focalisation n'est pas limitée à ces deux points qui ne correspondent qu'à des rayons parallèles à l'axe; il existe toute une portion de plan passant par F et normale à l'axe qui est le plan focal objet (*lieu des foyers secondaires objets*) et tout un plan focal, image également, lieu des foyers secondaires images.

Règle I: Pour un rayon incident quelconque, notons qu'il appartient à toute une famille de rayons parallèles qui doivent percer le plan focal image au foyer secondaire F_{SI} de leur commune direction; *mais celui de cette famille qui est rayon phare,* nous savons où il perce le plan focal image, puis puisque nous savons qu'il se coude au PPO et sort parallèlement à l'axe principal. Donc nous savons déterminer le foyer secondaire image pour un rayon quelconque.

Règle II (que l'on peut déduire de la précédente) par une application du retour inverse de la lumière)

Fig. 210

L'incident traverse la plan focal objet en un point F_{so} foyer secondaire objet *(ou foyer secondaire phare)* par où doivent passer tous les rayons incidents qui après réfraction formeront une gerbe parallèle.*(fig.210)*

Mais parmi cette famille de rayons émergents parallèles, il en est un qui passe par le foyer principal image et celui-là comme incident a voyagé parallèlement à l'axe entre le plan focal objet et le plan principal image ($F_{so} \rightarrow K$)

Donc de la trace F_{so} d'un rayon incident pur le plan focal objet, menons un rayon // à l'axe et ce qu'il devient ($K \rightarrow F_{PI}$) en le joignant au foyer principal image après l'avoir coudé sur le plan principal image déterminé la direction du rayon émergent.

Si donc après la translation MN nous menons par N une parallèle (N I) au rayon K F , nous savons trouver le réfracté définitif N I.

(Ces deux règles donnent séparément le moyen de trouver l'image d'un point sur l'axe et au numéro précédent, nous avons vu comment trouver l'image d'un point en dehors de l'axe

La figure montre que $p \operatorname{tg} u_0 = p' \operatorname{tg} u_i$ ou, puisque les rayons sont toujours centraux, $p\, u_0 = p' u_i$; d'où le grossissement.

$$G = \frac{p}{p'}$$

No 232.Points nodaux *(qui remplacent le centre optique des lentilles infiniment minces).(fig.211)*

Disons de suite que les points nodaux ne coïncident avec les points principaux que si les indices extrêmes sont égaux.

Lorsque deux rayons correspondants, l'un incident, l'autre réfracté sont *parallèles (mais non dans le prolongement l'un de l'autre comme pour les lentilles minces)*, ils coupent l'axe du système optique centré en deux points dits nodaux: l'un "nodal objet", l'autre "nodal image".

Prenons un point F_{so} *(foyer secondaire objet) dans le plan focal objet, à n'importe quelle distance de l'axe;* le rayon solaire 1 qui y passe s'en va-t-au foyer principal image. Menons par le point F un *incident* parallèle à I F soit F O N , puis construisons le réfracté correspondant à F N soit N'L

Je dis que N_0 et N'_1 sont les points nodaux.

D'abord par construction l'incident $F_{so}\,N_0$ et le réfracté $N'_1\,L$ sont parallèles.

Puis ce sont des points fixes:

$P_0 N_0 = f_i - f_o$ *(vu l'égalité des triangles $F_{so} N_0 F_{po}$ et $I\, F_{PI} P_i$)*

Et vu le parallélégramme hachuré

$P_i N'_1 = P_0 N_0 = f_i - f_o$

Remarquons aussi que la distance qui sépare les points nodaux est la même que celle qui sépare les points principaux *(on l'appelle parfois l'interstice)*

Pour trouver les points nodaux par le calcul, on peut considérer le rapport de convergence ou grossissement angulaire

S'il est égal à $1 = \frac{u^{(n)}}{u^{(o)}} = 1$, $\frac{p}{p'} = \frac{u^{(n)}}{u^{(o)}} = 1$

donc si $G = 1$ $\boxed{p = p'}$ et comme toujours $\frac{f_o}{p} + \frac{f_i}{p'} = 1$

on a donc $\frac{f_o}{p} + \frac{f_i}{p} = 1$ d'où $\boxed{p} = p' = \boxed{f + f'}$ algébriquement

soit $p = |f_i - f_o|$

N.B: Deux rayons conjugués qui font avec l'axe des angles égaux mais de sens opposés passent par les points antinodaux symétriques des points nodaux par rapport aux foyers.

Rapport des distances focales principales: $\frac{f_o}{f_i} = \frac{n_o}{n_i}$
prenons une hauteur d'objet égale à une hauteur d'image: donc objet et image dans les plans principaux; *(fig.212)*
La relation de Lagrange-Helmholtz $n_o h_o u_o = n_i h_i u_i$ donne puisque $h_o = h_i$ $\quad n_o h_o \frac{h_o}{-f_o} = n_i h_o \frac{h_o}{f_i}$

Résumé des principales formules des systèmes optiques centrés.

Condition de stigmatisme { pour tout dioptre: $n_o \overline{OD} + n_i \overline{DI} = 0$
" toute réflexion: $1\ \overline{OM} + 1\ \overline{MI} = 0$

Condition d'aplanétisme { $n_o h_o \sin u_o = n_i h_i \sin u_i$
Relation de Lagrange-Helmholtz { $\boxed{n_o h_o u_o = \text{constante}}$ ou $\boxed{g\ G = \frac{n_i}{n_o}}$
grandissement linéaire: $g = \frac{h_i}{h_o}$

grossissement angulaire: $G = \frac{u_i}{u_o}$

formules de Newton: $\pi\pi' = f_o f_i$; $g = -\frac{f_o}{\pi} = -\frac{\pi'}{f_i}$

Autres formules *(distances rapportées aux points principaux et non plus aux foyers):* $\frac{f}{p} + \frac{f'}{p'} = 1$; $g = -\frac{f_o p'}{f_i p}$; $G = \frac{p}{p'}$
Distance entre un point nodal et un point principal: $|f_i - f_o|$

Rapport des distances focales: $\frac{f_i}{f_o} = -\frac{n_i}{n_o}$

No 233. Détermination expérimentale des éléments d'un système centré tout monté (méthode de Cornu).

Nous avons vu qu'en rapportant les distances arithmétiques de l'*objet au foyer objet* π et de l'*image au foyer image* π', les formules dites de Newton sont:

$$\pi\pi' = f_o f_i \quad ; \quad g = \frac{h_i}{h_o} \quad \frac{-f_o}{\pi} \quad \frac{-\pi'}{f_i}$$

. *(Nous n'examinerons que le cas où les milieux extrêmes ont même réfringence: $f_o = f_i = f$; alors $\pi\pi' = f^2$) mais si l'on connaît les indices extrêmes le calcul n'est pas plus difficile).*

Réglant les collimateurs sur l'infini et éclairant ainsi en lumière parallèle, on déterminera la position des foyers principaux résultants *(ce qu'on appelle faire le pointé des foyers objet et image)*
Puis saupoudrant de poudre de lycopode *(que contiennent les champignons dits "vesses de loup" quand ils sont desséchés)* le sommet d'une face d'entrée, considéré comme objet, on cherche avec un microscope à faible grossissement où se trouve l'image de cette face saupoudrée. Et de même pour l'autre face.
On pourrait croire à priori qu'il y eut avantage à prendre des objets plus éloignés que les faces pour diminuer l'erreur relative; voyons que non:

Ce qu'il s'agit de déterminer en effet, c'est $\boxed{f} = \sqrt{\pi\pi'}$

Dérivons logarithmiquement: $2\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta\pi'}{\pi'}$

Pour ne pas nous leurrer, plaçons-nous dans le cas le plus défavorable *(où toutes les erreurs seraient par hasard de même sens)* et appelons ε la plus grande erreur absolue commise en mesurant π et π'

$$\frac{\Delta f}{f} \leqslant \frac{|\varepsilon|}{2}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta f}{f} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\pi + \pi'}{f^2}\right)$$

On voit sous cette deuxième forme que l'erreur relative sera minimum si $(\pi+\pi')$ est minimum ce qui, puisque le produit $\pi\pi'$ est constant, a lieu lorsque $\pi=\pi'$ *(deux nombres ayant un produit constant ont une somme minimum lorsqu'ils sont égaux)*.

Physiquement, cela signifie que l'objet et l'image devraient se trouver dans les plans principaux respectivement puisque $\pi = \pi' = f$.

Or, cela est en général impossible vu que l'on ne peut pénétrer à l'intérieur du système optique à cause de la monture.

Mais les sommets des faces d'entrée et de sortie n'étant pas éloignés des plans principaux, en saupoudrant alternativement ces faces, on opère dans les meilleures conditions.

Le lecteur est prié de consulter un livre d'Optique Geométrique pour la technique de la manipulation: par exemple pages 134, 135 et 136 du tome I: Cours de Physique de Lemoine et Guyot (Vuibert).

I.P. Après avoir appris l'*existence* et l'*usage* des plans principaux et des plans focaux; puis leur ***détermination expérimentale***, voyons comment on peut *calculer* leur position.

No 234: Le grandissement linéaire d'un dioptre a pour expression:

$$g = \frac{n_1}{n_2}\frac{q}{p}$$

$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ *(loi de Snell-Descartes)* peut s'écrire puisqu'on n'utilise que les rayons centraux que laisse passer le diaphragme $n_1 i_1 = n_2 i_2$

Mais *(fig.313)* $i_1 = \beta + \alpha_1$

$i_2 = \beta - \alpha_2$

d'où $n_1(\beta+\alpha_1) = n_2(\beta-\alpha_2)$ ou $n_2\alpha_2 + n_1\alpha_1 = \beta(n_2 - n_1)$

Mais $\alpha_1 \doteq \frac{h}{p}$; $\alpha_2 \doteq \frac{h}{q}$ et $\beta \doteq \frac{h}{R}$

D'où en substituant et divisant tout par h

$$\frac{n_2}{q} + \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

relation géométrique des valeurs absolues.

Pour la rendre algébrique, puisque p est seul dans le sens opposé à celui de la lumière, écrivons la

$$\frac{n_2}{q} - \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad \text{relation algébrique.}$$

Le grandissement linéaire $g = \frac{I}{O} = \frac{|q| - |R|}{|p| + |R|}$ arithmétiquement ou

$= \frac{q-R}{p-R}$ en grandeur et en signe car $p < 0$, et $g < 0$ image renversée par rapport à l'objet

incident
réfracté
RAYON (ou NORMALE)
DIOPTRE SPHÉRIQUE
rayon non dévié passant par C
p<0
q>0
r>0
n1
n2
O
A
B
I
C
S
h
β
α1
α2
i1
i2
i

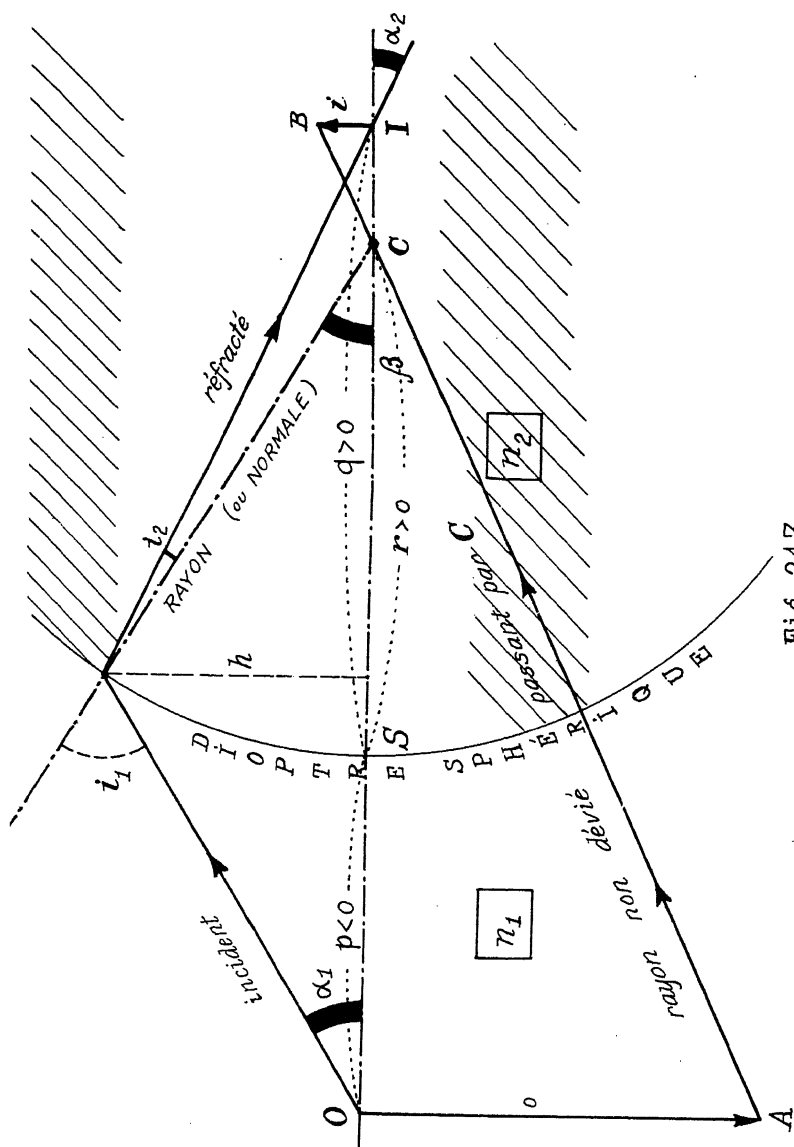



Fig. 213

Pour simplifier l'expression du grandissement linéaire du dioptre, servons-nous de l'équation de conjugaison:

$$\frac{n_2}{q}-\frac{n_1}{p}=\frac{n_2-n_1}{R}$$

$$g=\frac{q-R}{p-R}=\frac{Rq(1/R-1/q)}{Rp(1/R-1/p)}=\frac{q}{p}\left(\frac{1/q-1/R}{1/p-1/R}\right)$$

L'équation de conjugaison donne en la divisant tout par n_2

$$\frac{1}{q}-\frac{n_1}{n_2}\frac{1}{p}=\frac{1}{R}-\frac{n_1}{n_2}\frac{1}{R}$$

d'où

$$\frac{1}{q}-\frac{1}{R}=\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{R}\right)$$

d'où $\left\{\frac{1/q-1/R}{1/p-1/R}\right\}=\frac{n_1}{n_2}$ et $g=\frac{q}{p}\ \frac{n_1}{n_2}$

Si le premier milieu est l'air $n_1=1$ et $\frac{n_2}{n_1}=n$

$g=\frac{1}{n}\frac{q}{p}$ formule simple et algébrique

(donnant par exemple dans le cas de figure 213 image renversée car $g<o$ puisque $\frac{q+}{p-}$)

No 235. Le grossissement G *(rapport des angles étant l'unité lorsque le rayon incident sur le dioptre et l'émergent sont en ligne droite, tout rayon qui se dirige vers le centre de courbure du dioptre ne subit pas de déviation, $i=o$ et $r=o$ dans les formules de Snell-Descartes)*.

Cette propriété est la plus simple qui permette de trouver graphiquement la grandeur des images successives et de vérifier les formules du numéro précédent *(qui dérivent de la propriété que nous rappelons)*.

No 236: La lentille épaisse: Précision des conventions de signes:

En première année *(page 363* nous avons établi pour formule donnant la réfraction d'un dioptre sphérique

$$\frac{1}{\pm p}+\frac{n}{\pm q}=\frac{n-1}{\pm R};$$

p distance dans l'air, q dans le verre. p, q, R devant être affectés d'un signe+s'ils sont *réels*;i.e: p+ si dans l'espace objet, q+ si dans l'espace image et R+ si l'observateur qui se trouve dans le milieu le moins réfringent rencontre une bosse.

Avec cette convention dite "des opticiens" p, q, R sont des nombres arithmétiques et il faut pour chaque cas particulier à l'aide d'un graphique réfléchir à la réalité ou à la virtualité des distances p, q et R. C'était plus ennuyeux à manier mais plus facile pour des élèves qui n'avaient pas encore l'habitude d'utiliser des segments dirigés.

Cette année, nous employons la *convention algébrique* de façon à permettre à l'étudiant de lire la littérature des livres d'optique et de pouvoir lui-même déduire des formules algébriques.

p, q, R seront comptés comme positifs s'ils sont dans le même sens (par exemple celui de la lumière) et la formule sera alors (S étant l'origine des segments dirigés p, q, R,) comme au numéro précédent

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

ou si $n_1 = 1$ *(premier milieu air ou vide)*: $\frac{n_2}{n_1} = n$

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q} = \frac{1-n}{R}$$

N.B: Il est facile de voir que les deux manières d'opérer coïncident dans chacun des cas particuliers.

Exemple: Si l'objet est réel *(à gauche)* l'image réelle *(à droite)* et le dioptre positif: verre à droite et centre de courbure du dioptre dans le verre

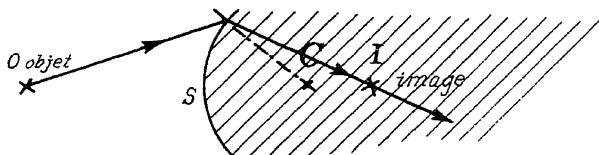



Fig. 214

Convention des opticiens *(suivie en 1ère année)*

$p > o \quad q > o \quad R > o$

$$\frac{1}{+p} + \frac{n}{+q} = \frac{n-1}{R}$$

Convention des livres d'optique *(suivie en 2e et 3e ann.)*

$p < o \ ; \quad q > o \ ; \quad R > o$

$$\frac{1}{-|p|} - \frac{n}{+|q|} = \frac{1-n}{+|R|}$$

Nous demanderons au lecteur de bien se rendre compte avec graphiques à l'appui de l'identité des deux formules, puis de s'habituer dorénavant à la méthode algébrique.

La construction *(fig.215)* se rapporte au cas d'une lentille pleine biconvexe épaisse *(e= 2cms)* ; objet réel à p=7 de S et rayons de courbure des faces 12 et 8.

Formules algébriques pour une lentille épaisse pleine

1ère équation de conjugaison: $\frac{n}{} - \frac{1}{p} = \frac{n-1}{R_1}$; d'où $q = \frac{n\,p\,R_1}{(R_1) + (n-1)p}$

1er grandissement linéaire: $g_1 = \frac{1}{n}\frac{q}{p} \quad \frac{R_1}{p(n-1)+R_1}$

Prenons maintenant l'origine au sommet du second dioptre *(appelant e l'épaisseur de la lentille suivant son axe)*

La distance p' de l'objet à cette nouvelle origine est algébriquement $p' = q + e$

(Remarquons que pour le second sommet pris comme origine, l'épaisseur e S_2S_1 est négative étant en sens inverse de la lumière; sur la figure $p' < o$ et vaut en valeur absolue $|q| + |e|$ comme $q < o$ et $\boxed{e<o}$ *la formule $p' = q+e$ est donc bien vraie)*

à l'aide de $q = \frac{n\,p\,R_1}{p(n-1)+R_1}$; $p' = q + e = \frac{R_1(np+e) + pe(n-1)}{R_1 + p\,(n-1)}$

2ème équation de conjugaison: les rayons incidents voyageant dans le verre, nous avons vu en première année que l'équation des opticiens était alors

Sens de la lumière (et positif)
Résultats algébriques
q = npR₁ / (p(n-1)+R₁) = 1.5(-7)(+12) / (-7(1.5-1)+12) = - 126/8.5 ; p' = q+e = - 143/8.5
q' = (q+e)R₂ / (-(q+e)(n-1)+nR₂) = (-143/8.5)(-8) / ((+143/8.5)(1.5-1)+1.5(-8)) = - 114.4/30.5
p* = +R₁[-nR₂+ne-e] / (n(n-1)(R₂-R₁)-(n-1)² e) = - 264/29
q'* = R₂[nR₁+ne-e] / ((n-1)[n(R₂-R₁)-(n-1)e]) = + 272/29
avec e<0 puisque e intervient relativement à (S₂)
est dans le sens opposé à celui de la lumière
et R₁>0 et R₂<0.
R₁=+12
R₂=-8
h₂
h₁
h₀
q=-14.82
C₂
C₁
p=-7
S₁
S₂
e=2
n=1.5
q'*=+9.38
F R P I
F R P O
O₁ objet réel
p*=-9.10
I₂ image virtuelle définitive
I₁ image virtuelle du 1er dioptre
O₂ objet réel du second dioptre
1ère réfraction: 1/-p + n/q = (n-1)/R₁ ou 1/+7 + 1.5/-14.82 = 0.5/+12
2e réfraction: n/p' + 1/-q' = (n-1)/R₂ ou 1.5/-16.82 + 1/+37.48 = 0.5/-8
p' = q + e ou -14.82 - 2 = 16.82
Résultats numériques
place du foyer objet (conjugué de q'=∞) pour rayons centraux:
p' = R₂ n/(n-1) = -24; q = -24+2 = -22; p* = -9.10
place du foyer image (conjugué de p=∞) pour rayons centraux:
q = R₁ n/(n-1) = +36; p' = q+e = +36-2 = +34; q'* = +9.38
p' = q + e = -14.82-2 = -16.82
q' = -37.51

Fig. 215

$$\frac{1}{\pm q'} + \frac{n}{\pm p'} = \frac{n-1}{\pm R_2} \quad \text{soit ici:} \quad \frac{1}{-q'} + \frac{n}{+p'} \quad \frac{n-1}{+R_2}$$

l'équation algébrique sera $\frac{n}{p'} - \frac{1}{q'} = \frac{n-1}{R_2}$

(ici $p'<0$, $q'<0$, $R_2<0$ ce qui coïncide bien avec la relation des opticiens).

Tirons q' de la formule algébrique:

$$\frac{1}{q'} = \frac{nR_2-(n-1)p'}{R_2\,p'}; \quad q' = \boxed{\frac{R_2\,p'}{nR_2-(n-1)p'}} = \frac{R_2[R_1(np+e)+(n-1)pe]}{nR_2R_1+(n-1)[np(R_2-R_1)-R_1e]-pe(n-1)^2}$$

2ème grandissement linéaire: $g_2 = \boxed{\frac{n}{1}\frac{q'}{p'}}$ soit en fonction de n, p, e, R_1, R_2

$$= \frac{nR_2[R_1+p(n-1)]}{nR_2R_1+(n-1)[np(R_2-R_1)-R_1e]-(n-1)^2pe}$$

Le grandissement global linéaire étant le produit des grandissements linéaires de chacun des dioptres

$$g = (g_1).\ (g_2) = \frac{nR_1R_2}{nR_1R_2+(n-1)[np(R_2-R_1)-R_1e]-(n-1)^2pe}$$

(pour l'application numérique, il est plus rapide de se servir des valeurs $g_1 = \frac{1}{n}\frac{q}{p}$ et $g_2 = \frac{nq'}{p'}$ d'où $g = \frac{q\,q'}{p\,p'}$ puisque les valeurs de q, p' et q' ont déjà été obtenues); par la suite le lecteur verra l'utilité des expressions algébriques de g.)

Numériquement, ici,

$$g_1 \quad \frac{(-126)}{(8.5)(1.5)(-7)} = +\frac{126}{89.25} \quad \boxed{+\frac{12}{8.5}}$$

$$\frac{(1.5)(-1144)(8.5)}{(30.5)(-143)} = +\frac{14\ldots}{4\ldots} \quad \frac{86}{1.5} = \boxed{+\frac{102}{30.5}}$$

$$g = g_1\ g_2 = +\frac{(12)(102)}{(8.5)(30.5)} = \boxed{\frac{1224}{259.25}}$$

g_1, g_2 et g étant positifs l'objet, l'image intermédiaire et l'image définitive sont bien comme le veut la figure d'un même côté par rapport à l'axe du système.

3ème: position des foyers résultants principaux conjugués des deux infinis

a) foyer objet trouver $p_{✲}$ lorsque $q' = (+\infty)$

b) foyer image trouver $q_{✱}$ lorsque $p = (-\infty)$

$$q' = \infty = \frac{R_2[R_1(np+e)+(n-1)pe]}{nR_2R_1+(n-1)[np(R_2-R_1)-R_1e]-(n-1)^2pe}$$

lorsque le dénominateur est nul, le numérateur ne l'étant pas

$$nR_2R_1+(n-1)[np(R_2-R_1)-R_1e]-(n-1)^2pe = 0 \quad \text{donne}$$

$$p_{✲} = \frac{R_1[(n-1)e-nR_2]}{(n-1)[n(R_2-R_1)-e(n-1)]} = -\frac{264}{29}$$

(✲ étant l'indication "position du foyer principal résultant objet; ✱ étant l'indication "position du foyer principal résultant image)

$p = -\infty$ substitué dans $q' = \frac{R_2[R_1(np+e)+(n-1)pe]}{nR_2R_1+(n-1)[np(R_2-R_1)-R_1e]-(n-1)^2pe}$

donne $q'_{✱} = \frac{R_2[R_1n+(n-1)e]}{(n-1)[n(R_2-R_1)-(n-1)e]} = +\frac{272}{29}$

Ayant maintenant la position et la grandeur de l'image et la position des foyers principaux, *reste à déterminer la position des plans principaux ;(comme les milieux extrêmes sont de même indice les points nodaux coïncident avec les points principaux).*

Nous avons vu *(No 229* que les plans principaux sont ceux pour lesquels le grandissement global est +1, *égalant à cette valeur +1 la formule du grandissement résultant, nous aurons la position :*

$$p_{pr}=\frac{R_1 e}{n(R_2-R_1)-(n-1)e}=\frac{(+12)\ (-2)}{1.5(-8-12)-(0.5)(-2)}$$

$$=+\frac{24}{29}$$ donc à *l'intérieur de la lentille plus près de S_1 que de S_2*

Pour avoir l'autre plan principal, cherchons l'image définitive du premier dans

$$q'=\frac{R_2[R_1(np+e)+(n-1)pe]}{n\ R_2R_1+(n-1)\ [np(R_2-R_1)-R_1e]\ -(n-1)^2\ pe},$$ remplaçons

p par $\frac{R_1 e}{n(R_2-R_1)-(n-1)e}=\left(\frac{+24}{29}\right)$, il vient:

$$q'_{pr}=\frac{R_2 e}{n(R_2-R_1)-(n-1)e}=\frac{(-8)\ (-2)}{1.5(-8-12)-0.5(-2)}=\left(\frac{-16}{29}\right)$$

Comme les milieux extrêmes ont même indice, *les distances focales principales résultantes doivent être identiques, c'est-à-dire que la distance qui sépare le foyer principal objet du point principal objet doit être la même que celle qui sépare le foyer principal image du point principal image et algébriquement ces distances doivent être de sens opposés*

$$f=\overrightarrow{p_{pr.}-p_{*}}=-(\overleftarrow{q'_{pr.}-q'_{*}})$$

$$|f|=\left\{\frac{+nR_1R_2}{(n-1)[n(R_2-R_1)-e(n-1)]}\right\}=-\left\{\frac{-nR_1R_2}{(n-1)[n(R_2-R_1)-e(n-1)]}\right\}$$

$$|f|=\frac{288}{29}=-f_{\text{objet}}=+f_{\text{image}}.$$

Conclusion : Nous avons calculé tous les éléments de la lentille épaisse pleine biconvexe pour les rayons centraux *(peu inclinés que laisse passer un petit diaphragme)*

Dorénavant, pour calculer l'image d'un objet, nous avons trois moyens rapides à notre disposition. Plutôt que de prendre un nouvel objet, à titre de triple *vérification* nous prendrons l'objet réel à 7 cms. à l'avant de S_1

Première méthode: Utiliser les formules de *Newton* en rappōrtant *toutes les distances aux foyers principaux:*

$$\pi=\overline{F_0 O}=\boxed{+\frac{61}{29}}\quad \cdot p_{*}+p=\frac{264}{29}-7$$

$$\pi'=\overrightarrow{F_i I}=\boxed{-\frac{41472}{884.5}}=-q'_{*}+q'=-\frac{272}{29}-\frac{1144}{30.5}$$

$$\pi\pi'=\left(+\frac{61}{29}\right)\left(-\frac{41472}{884.5}\right)\equiv -f^2=-\left(\frac{288}{29}\right)^2$$

lumière
1'
rayon phare (1)
rayon solaire (2)
objet réel
h_0
h_2
foyer secondaire objet
axe secondaire // à (3)
image définitive (virtuelle)
B foyer secondaire image
(2')
(3)
(3')
$p = -\left(\frac{227}{29}\right)$
$q = -\left(\frac{32688}{884.5}\right)$
$\pi = +\frac{61}{29}$
$-\left(\frac{1144}{30.5} + \frac{272}{29}\right) = \pi' = -\frac{41472}{884.5}$
$\frac{1144}{30.5}$
$\frac{288}{29}$
$\frac{264}{29}$
$\frac{272}{29}$

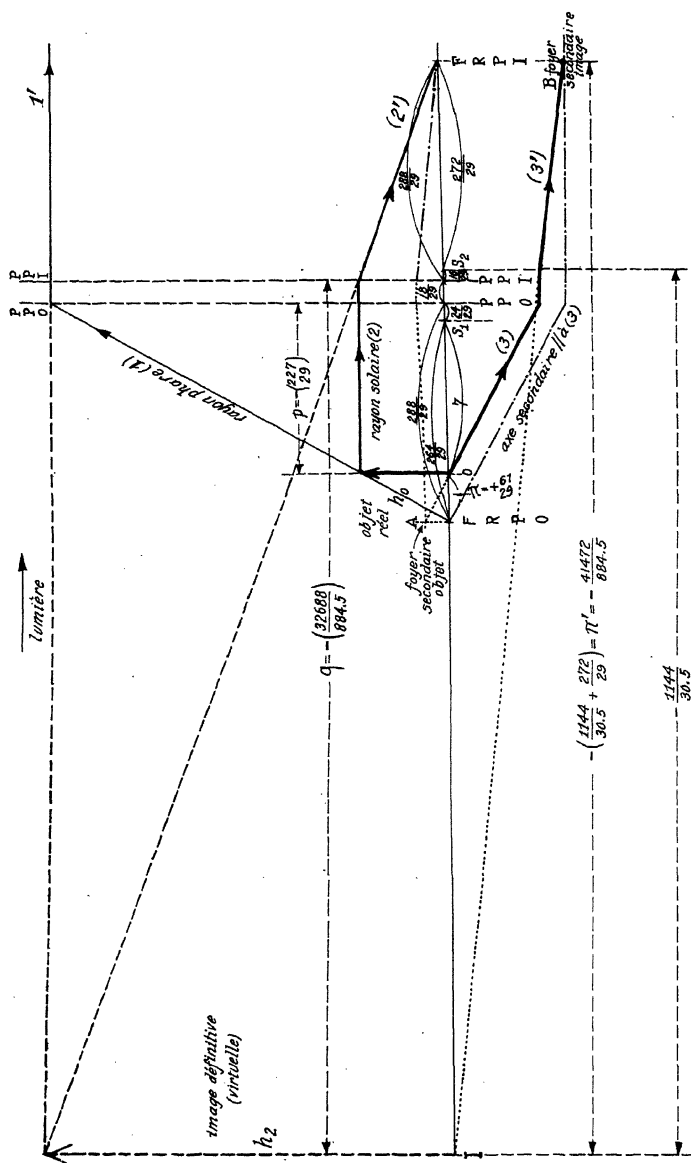



Fig. 216

Deuxième méthode: Rapportons les distances aux *points principaux*

$$p=-\frac{227}{29}; \quad q=-\frac{32688}{884.5}; \quad f$$

$$-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$ donne identiquement $+\frac{29}{227}-\frac{[illegible]}{32688}=\frac{[illegible]}{288}$

Troisième méthode (graphique, la plus instructive, mais délicate à petite échelle)

Pour obtenir une figure lisible, nous prendrons un objet assez long.

h_o=2 cm 5 donc $h_2=g\ h_o=\frac{2.5\times144}{30.5}=11.8$

Menant par l'extrémité de l'objet le rayon (1) "phare" qui passe par le foyer objet, le prolongeant jusqu'à sa rencontre avec le plan principal objet et le faisant sortir parallèlement à l'axe principal suivant (1')

Puis, par l'extrémité de l'objet menant le rayon "solaire" (2) jusqu'au plan principal image, le dirigeant ensuite suivant (2') au foyer image.

Si tout est exact, (1') et (2') doivent se rencontrer suivant l'extrémité de l'image définitive.

On pourrait considérer d'autres rayons, par exemple: le rayon qui joindrait l'extrémité de l'objet au point principal objet devrait être parallèle à celui qui joindrait l'extrémité de l'image au point principal image *(les points nodaux coïncidant avec les points principaux quand les distances focales sont les mêmes, c'est-à-dire, quand les milieux extrêmes sont de même indice: 1 ici)*

Pour ne pas surcharger le haut de la figure, nous avons indiqué comment trouver I sans passer par les rayons émanant de l'extrémité de l'objet: soit un rayon quelconque (3) venant de la base de l'objet, il appartient à une famille de rayons incidents parallèles dont la gerbe ira converger en un même point du plan principal image dit le foyer secondaire de la direction du rayon (3). Pour déterminer ce foyer secondaire, par le foyer objet, traçons l'un des rayons de la gerbe parallèle à (3). Emané du foyer principal objet, ce rayon*(parallèle à 3)* ira se couder au P.P.O. et sortira parallèlement à l'axe principal. Sa trace sur le plan focal image détermine le foyer secondaire image où ira le rayon (3') après deux coudes séparés par l'interstice.

Le prolongement du rayon (3) perce d'autre part le plan focal objet en A déterminant ainsi un foyer secondaire objet Par ce point A menant un rayon solaire qui ira au foyer principal image, on détermine ainsi la parallèle au rayon (3') puisque tous les rayons réfractés émanés d'un même point du plan focal objet sortent en gerbe parallèle.

Le lecteur qui désirerait étudier analytiquement les aberrations longitudinales de sphéricité est renvoyé *(pages 489 et 490)* au livre de Page "Introduction to Theoretical Physics". Comme cette aberration disparaît par le diaphragme nous nous contenterons de l'indiquer. Dans le même livre de Page, pages 492 et suivantes, les distorsions sont expliquées très élégamment.

No 237: Les doublets de lentilles minces.

La lentille mince unique a été étudiée en première année. Nous allons voir comment calculer les éléments d'un

oculaire formé par deux lentilles non accolées.

Avec les formules algébriques, les réfractions dues à la première lentille mince sont données par *(en bloc)*

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1}$$

Vu la distance a qui sépare les centres optiques des deux lentilles minces, dans tous les cas *(algébriquement)*

$$p' = q + a \qquad \textit{(avec a toujours < 0)}$$

ou $\quad p' = q - a \qquad$ *(avec a toujours > 0)*

Les secondes réfractions seront régies par *(en bloc)*

$$-\frac{1}{q-a} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{f_2}$$

d'où $q = \frac{pf_1}{p+f_1}$; $\quad q' = \frac{f_2(q-a)}{f_2+q-a} \qquad \frac{pf_2f_1 - f_2ap - f_2af_1}{f_2p + f_2f_1 - ap - af_1 + pf_1}$

position du foyer principal résultant image *(conjugué de $p=\infty$*

$$q'_{*} = \frac{f_2(f_1-a)}{f_2+f_1-a} \qquad \textit{(lim q' lorsque } p \to \infty)$$

La position du foyer principal objet est la valeur de p qui rend q' infini *(dénominateur de q' égalé à zéro)*

$$p_{*} = \frac{f_1(a-f_2)}{f_2+f_1-a}$$

Le grandissement de la première lentille est en grandeur et en signe

$$g_1 = \frac{q}{p}$$

et celui de la deuxième lentille $\quad g_2 = \frac{q'}{p'}$

Le grandissement global sera donc $\quad g = g_1 g_2 = \frac{q\,q'}{p\,p'}$

soit encore en fonction de p, a, f_1 et f_2

$$g = \frac{f_1}{pf_1 + ap + af_1} \qquad \frac{pf_2f_1 - f_2ap - f_1f_2a}{f_2p + f_2f_1 - ap - af_1 + pf_1}$$

Pour avoir la position des plans principaux, écrivons qu'un objet situé dans le P.P.O..aurait son image dans le P.P.I. *avec un grandissement linéaire unité positif: $g=+1$*

Egalant à +1 la valeur de g on obtient

$$p^2(f_1^2 - 2af_1 - af_2 + f_1f_2 + a^2) + p(-2af_1^2 + 2a^2f_1 - af_1f_2) + a^2f_1^2 = 0$$

ce qui donne $\quad p_{pr.} = \frac{af_1}{2}\left[\frac{2f_1 - 2a + f_2 \pm f_2}{f_1^2 - 2af_1 - af_2 + f_1f_2 + a^2}\right]$

prenant le signe − devant f_2, le seul qui convienne

$$p_{pr.} = \frac{af_1}{2}\,\frac{2(f_1-a)}{(f_1-a)(f_1-a-f_2)} \qquad \frac{af_1}{f_1-a+f_2}$$

La distance focale principale *(distance entre le foyer objet et le point principal objet)*

$$f = -p_{*} + p_{pr.} \quad \frac{\quad}{f_1-a+f_2} - \frac{f_1(a-f_2)}{f_1-a+f_2} = \boxed{\frac{f_1f_2}{f_1+f_2-a}}$$

Nous avons deux manières de trouver l'autre plan principal *(image)*

a) image du plan principal objet

$$\left(\frac{pf_2f_1 - f_2ap - af_2f_1}{f_2p + f_2f_1 - ap - af_1 + pf_1}\right)_{\text{où } p = pr.} = \frac{-af_2}{f_1+f_2-a}$$

b) point à - f du foyer principal image

$$q_{\ast}^{!} - f \quad \frac{f_2(f_1-a)}{f_2+f_1-a} - \frac{f_1f_2}{f_1+f_2-a} = \frac{-af_2}{f_1+f_2-a}$$

L'interstice Δ *(distance entre les plans principaux)* vaut:

$$\Delta = a - \left|\frac{af_1}{f_1+f_2-a}\right| - \left|\frac{af_2}{f_1+f_2-a}\right| \quad \frac{}{f_1+f_2-a}$$

No 237A. Procédé *purement graphique* et méthode simple qui en dérive *(la rapidité provenant de ce qu'il n'est pas besoin de prendre d'objet à distance finie comme c'était le cas pour la lentille épaisse).*

Ce procédé se trouve décrit dans le livre de Henri Pariselle "Instruments d'Optique" de la collection Armand Colin.

Un rayon solaire *(parallèle à l'axe et dans le sens positif de la lumière)* frappant la première lentille irait au foyer image F_1' s'il n'était arrêté *(par la lentille 2)* en M pour aller après refraction former le foyer résultant principal image FRI

Graphiquement tracer par le centre optique O_2 de la deuxième lentille un axe secondaire parallèle à 1' et à la trace de cet axe secondaire dans le plan focal image de la deuxième lentille *(i.e. au foyer secondaire image de la direction 1')* doit passer le réfracté 1".

On a ainsi le foyer résultant image et craignant que le graphique à petite échelle soit peu exact, il est bon aussitôt de calculer $z = O_2 \rightarrow F_{RI}$. Ce point est l'image réelle de l'objet virtuel F_1'

$$-\left(\frac{1}{p = f_1 - a}\right) + \left(\frac{1}{q = z}\right) = \left(\frac{1}{f = f_2}\right); \quad z = \frac{f_2(f_1-a)}{f_2+f_1-a} = \frac{1(3-2)}{(1)+(3)-2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Mais le plan principal image n'est pas autre chose que le lieu des points N où se coudent les rayons incidents tel (1) et les émergents tel (1"). Considérant les triangles rectangles semblables $WMF_1'O_1$ et $M\,F_1'O_2$ et aussi l'autre couple de triangles rectangles semblables $NMF_{RI}F_2$ et $M\,F_{RI}O_2$, on a :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{f_1 - a}{f_1} = \frac{z}{f}; \quad \text{d'où } f = \frac{zf_1}{f_1 - a} = \frac{f_1f_2}{f_1+f_2-a}$$

donc le plan P.P.I. est équidistant des deux lentilles comme le graphique l'indiquait.

De même, le foyer objet est le foyer image pour des rayons lunaires ⟵ *(en sens inverse de la lumière* ⟶ *)* et un rayon (2)' qui passe réellement lui par F_2 sort en 2" vu la première lentille. L'axe secondaire // à 2' mené par O_1 ne coupant pas le plan focal F_1 dans les limites de l'épure nous avons dû faire appel à l'homothétie pour joindre le point Q au point de rencontre des deux droites O_1V et F_1T. Le prolongement de (2") donne le foyer résultant objet FRO.

$$\frac{1}{+f_1}; \quad \frac{1}{a-f_2} + \frac{1}{-\varphi} = \frac{1}{f_1}; \quad \varphi = \frac{f_1(a-f_2)}{f_1+f_2-a} = \frac{3(2-1)}{3+1-2} = \boxed{1.5}$$

La rencontre de (2) avec (2") donne le plan principal objet et en comparant deux couples de triangles semblables on aurait $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{f_2}{a}$ et $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{k - \varphi}{k}$; $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{f_2}{a} = \frac{k-\varphi}{k}$

foyer secondaire objet
lumière
(1) rayon solaire
Δ = a
PPI
PPO
foyer principal objet 1re lentille
axe secondaire // à 2'
foyer pr. objet 2e lentille
FRO
FRI
axe secondaire // à 1'
foyer principal image 1re lentille
foyer principal image 2e lentille
foyer secondaire image
rayon lunaire
Oculaire
3 = f1
2 = a
1 = f2

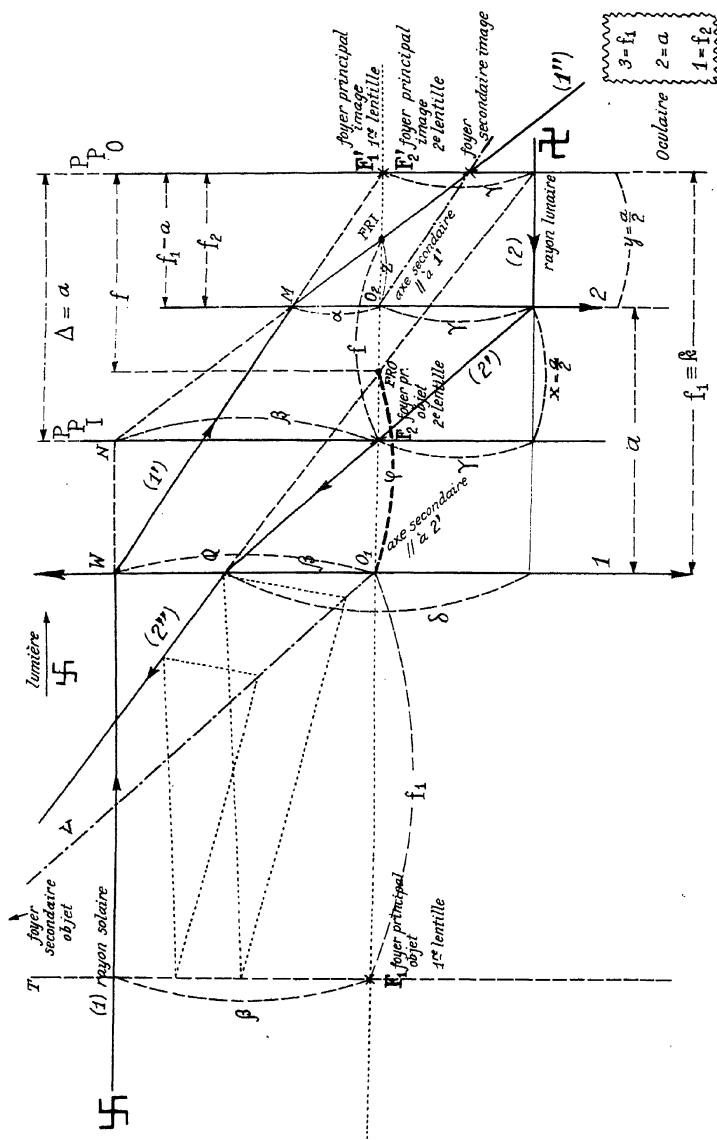



Fig. 217

Vu l'importance de la question nous allons sans détailler les calculs faire les <u>graphiques</u> relativement à <u>deux lentilles minces divergentes</u> et à une <u>lentille convergente associée</u> à une divergente (traçant toujours les axes secondaires en trait mixte —·—·— le lecteur n'aura pas de peine à suivre le chemin de la lumière et à vérifier les résultats)

(figs. 218 et 219)

Fig. 218

lumière solaire
(1)
(1')
(1")
(2)
(2')
2"
F_{RPO}
F_{RPI}
f
f = 4.5
F_1 objet
Φ'_2 image
O_1
O_2
F'_1 image
Φ_2 objet
PPO
PPI
Doublet 3, 2 − 3
f = + 4.5

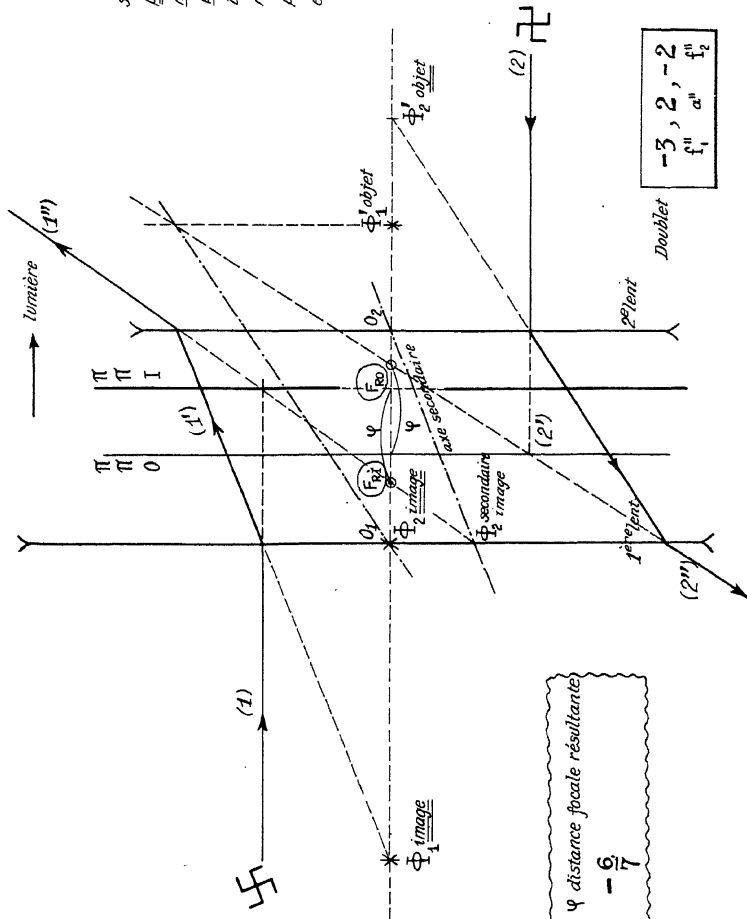
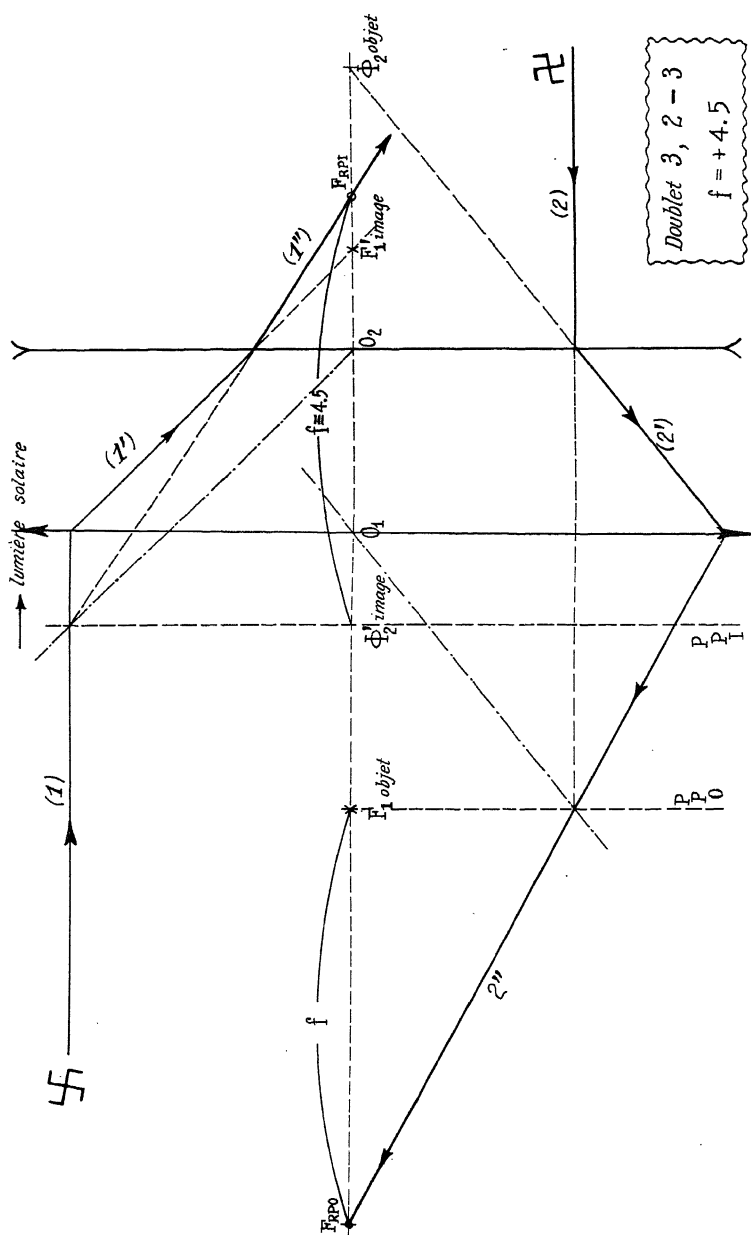



Fig. 219

donc $\mathfrak{K} = 2\varphi = 2(1.5) = 3 = \frac{a\varphi}{a-f_2} = \frac{af_1}{f_1+f_2-a}$

Le lecteur vérifiera encore que P.P.O. et F_{RO} sont bien distants de $f = 1.5$ car $\mathfrak{K}-\varphi = 3 - 1.5 = 1.5$

Vu l'importance de la question, nous allons sans détailler les calculs faire les *graphiques* relativement à *deux lentilles minces divergentes et à une lentille convergente associée à une divergente (traçant toujours les axes secondaires en trait mixte .-.-.-.-.- le lecteur n'aura pas de peine à suivre le chemin de la lumière et à vérifier les résultats).*

No 238. Variation de la distance focale résultante f et de l'interstice résultant Δ lorsque "a" varie. Rien ne saurait mieux nous faire saisir le mécanisme de l'association de deux lentilles ou d'un "objectif" et d'un "oculaire" que cette étude de l'influence du "tirage".

Nous nous bornerons au premier cas *des deux lentilles convergentes* $f_1 = +3$ et $f_2 = +1$, faisons varier a

Nous avons déjà $(f)_{a=2} = 1.5$ et $(\Delta)_{a=2} = 2$

la formule générale qui donne f est:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1+f_2-a} = \frac{(3)(1)}{(3)+(1)-a} = \frac{3}{4-a}$$

et celle qui donne Δ est

$$\Delta = 2f - z - (a-\varphi) = \frac{a^2}{f_1+f_2-a} = \frac{a^2}{(3+1)-a} = \frac{a^2}{4-a}$$

On voit que le système est "a-focal" lorsque $a=f_1+f_2$ *(c'est l'ancien type de redresseur terrestre où le foyer image de la lentille de champ coïncidait avec le foyer objet de la lentille oculaire).*

Lorsque les lentilles sont "accollées" $a = 0 \left| \frac{3}{4} = f_0 = \frac{f_1 f_2}{f_1+f_2} \right|$ et $\Delta = 0$

Le cas a<o n'a pas de sens.

Les cas $a > |f_1| + |f_2|$ n'ont pas d'intérêt pratique , aucune monture n'étant indéfiniment longue.

Si par exemple a= 2 est la position moyenne et que l'on puisse rapprocher ou écarter de 1.5 les deux lentilles on voit qu'on pourra réaliser les puissances comprises entre zéro et

$P_0(\text{contact}) = \frac{1}{f_0} = +\frac{4}{3}$ C.G.S $= +\frac{400}{3}$ dioptries(+car convergente)

(On appelle dioptrie la puissance d'un système optique centré de distance focale principale un mètre(=cent cms .) et comme l'inverse de la distance focale est d'autant plus grand que f est plus petit, pour f_0=3/4 cm = 3/400 mètre, la puissance ici est énorme)

No 239. Les systèmes a-focaux *(foyer image de la lentille de champ coïncidant avec le foyer objet de la lentille de l'oeil).*

1) **Viseur pour fusil.** Il est impossible de bien viser *sans fatigue* lorsqu'il faut aligner à l'oeil nu des distances aussi peu comparables que un pied et demi, trois pieds et deux mille pieds; alors qu'avec un petit doublet a-focal de 8 à 10 pouces *n'importe qui peut être un excellent ti-*

a	f	Δ
0	$\frac{3}{4}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{14}$
1	1	$\frac{1}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{10}$
2	1.5	2
$2\frac{1}{2}$	2	$\frac{25}{6}$
3	3	9
$3\frac{1}{2}$	6	$\frac{49}{2}$
4	∞	∞

Variation de f et Δ avec le tirage du doublet

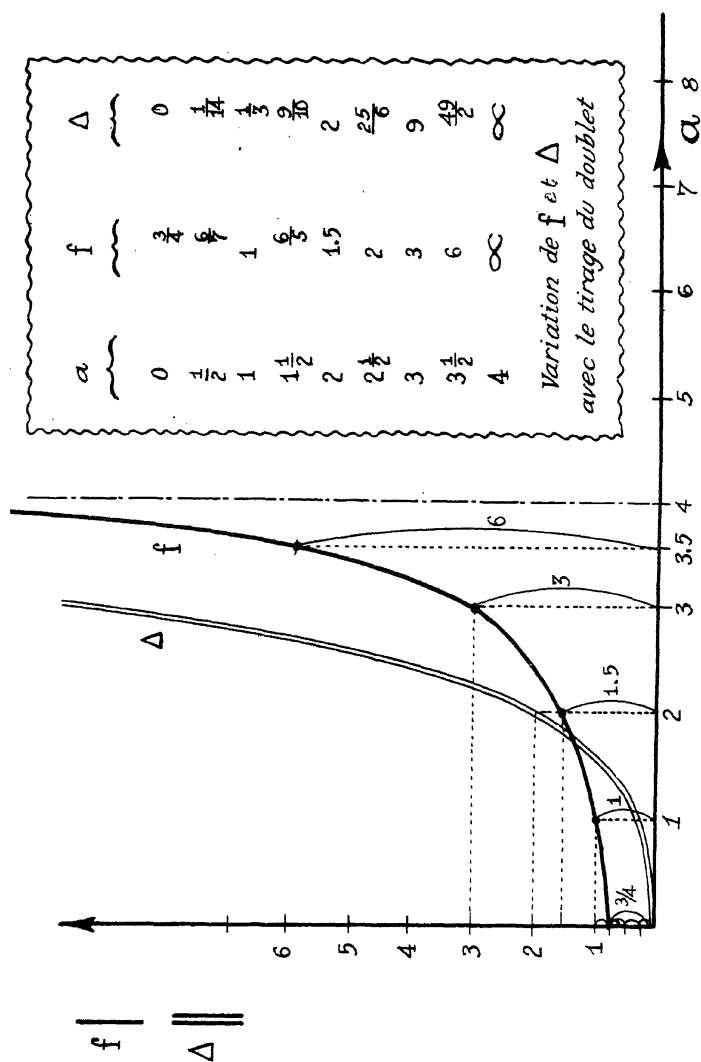



Fig. 220

reur et les bons tireurs y gagnent de ne pas se fatiguer à essayer vainement d'accommoder sur le guidon ou sur le cran de mire. Une molette de réglage sert pour la "hausse" suivant la distance, ceci pour l'inclinaison du fusil qui doit tirer toujours plus haut que le rayon optique lui en droite ligne.

Exemple: lentille de champ ou objectif: $f_1=+15$ cms
lentille oculaire $f_2= +6$ cms ; $a=f_1+f_2=21$ cms
Grossissement *(angulaire)* $\boxed{2.5}=G$

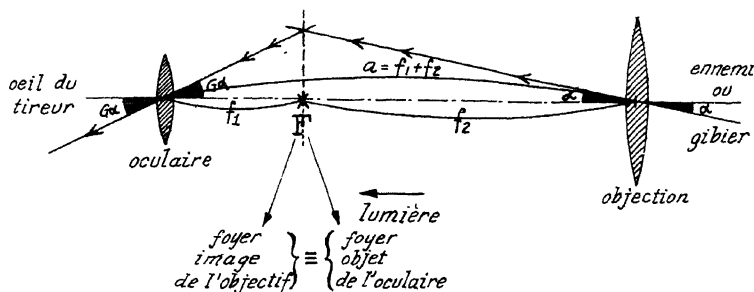



Fig. 221

2) Lunette "d'opérette" de Galilée: comme il ne serait pas agréable de voir la scène renversée, l'oculaire est divergent

Exemple: $f_1 = +13$; $f_2 = -4$; $a = f_1 + f_2 = 9$
(a est encore la somme algébrique des distances focales f_1 et f_2)

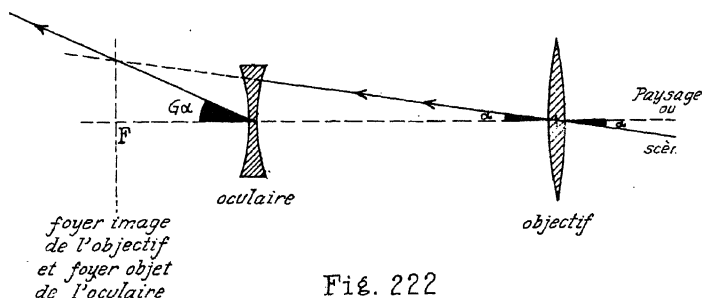



Fig. 222

3) Systèmes a-focaux à trois verres: la lentille du milieu est toujours convergente et les lentilles extrêmes de même sorte: (toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes)

La figure se rapporte au deuxième cas.

Etant données $\varphi_1 = -2.5$; $\varphi_3 = -6.5$; $a = 10$ *(distance entre les lentilles extrêmes, calculons à quelle distance x de la première placer la lentille intermédiaire de $f_2=+4$ pour réaliser un système a-focal.*

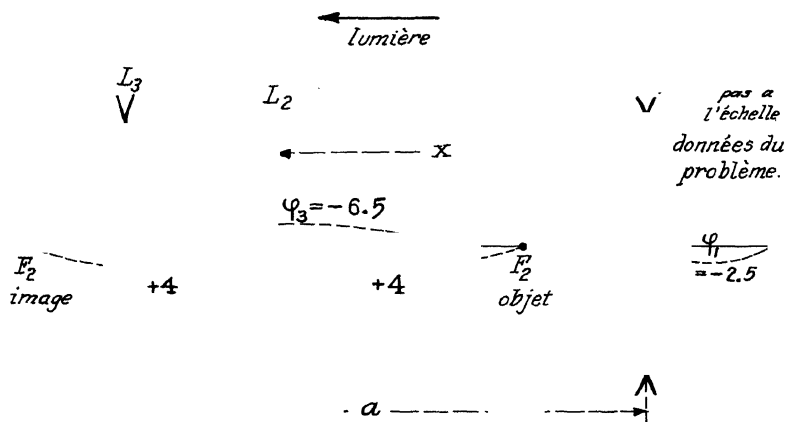



Fig. 223

Ecrivons que le conjugué de l'infini objet par rapport à L_1 et le conjugué de l'infini image par rapport à L_3 sont l'objet et l'image l'un de l'autre par rapport à la lentille intermédiaire.

Les formules de Newton donnent:

$$\pi\pi' = f_2^2 \text{ ou } \left(|\varphi_1| + x - f_2\right)\left[|\varphi_3| + (a-x) - f_2\right] = f_2^2$$

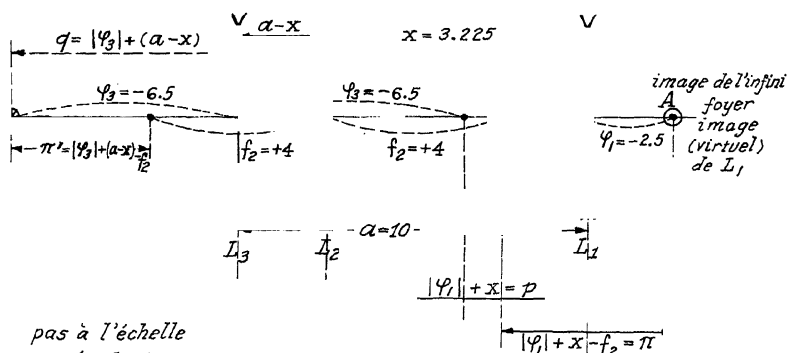



Fig. 224

Numériquement

$$(2.5+x-4)\ (6.5+10-x-4) = (4)^2 \text{ où}$$
$$(x-1.5)\ (12.5-x)\ -\ 16 = 0 \text{ ou}$$
$$x^2 - 14x + 34.75 = 0 \text{ soit}$$
$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-139}}{2} = 3.225 \text{ par défaut}$$

(l'autre solution enc convient pas étant supérieure à a = 10)
Vérification: $|p| \geq 2.5+3.225$; $|q| \leq 6.5+(10-3.225)$

et $\frac{1}{>5.725} + \frac{1}{<13.275} = \frac{1}{4}$

Nous conseillons au lecteur de vérifier *graphiquement* à l'échelle que B est bien l'image de A relativement à la lentille L_2 et que A est bien l'image de l'infini à droite comme aussi l'infini à gauche est bien l'image du point B *(objet virtuel pour la lentille L_3)*
N.B: Nous renverrons au livre de *H. Bouasse (Optique Géométrique élémentaire)* pour la description des mécanismes ingénieux tels que p.190 celui de BOSSCHA réalisant l'a-focalisme automatiquement et la lunette pancratique de DONDERS permettant de varier le grossissement sans que la clarté en souffre; p.192.
On ne peut faire la moindre mesure optique sans avoir *un éclairage en lumière parallèle;* pour ce, il faut se servir du *collimateur* et de la *lunette astronomique réduite:*

No 240: Le Collimateur.

La collimation *(ou collinéation ou alignement)* consiste à imposer à une ligne de visée une direction déterminée.
On appelle mire une croix fixe fixée sur un pilier et destinée à trouver rapidement le méridien du lieu. Pour que cette mire lointaine soit de quelque utilité, il faut que le temps ne soit pas "bouché".
Pour obvier à cet inconvénient et en même temps disposer d'un objet à l'infini que la lunette astronomique puisse recevoir, on a créé le collimateur:
Plaçant *dans le plan focal objet d'une lentille convergente un réticule ou croisée des fils (crossed hair), tout se passe pour la lunette comme pour l'observateur comme si l'on avait la croix lointaine au sommet du poteau (mire réelle)(Voir le Cours d'Arpentage de M.E. Desaulniers).*
En physique, on ne peut songer à mettre sur un pilier *(voisin de la lunette)* une *lentille convergente de 100 à 300 pieds de distance focale* puis à 100 ou 300 pieds à l'avant, *la croisée des fils dont nous parlions également sur un pilier.*
Aussi le collimateur(qui sert à éclairer les goniomètres par exemple) est-il composé d'une miniature du collimateur géodésique: un tube noirci intérieurement porte une lentille convergente à une extrémité et *dans le plan focal objet de cette lentille se trouve un diaphragme circulaire réglable ou une fente verticale réglable.*
En éclairant le trou *(ou la fente)*, par une ampoule dépolie, il sortira de la lentille une gerbe de lumière parallèle, tout comme si une étoile se trouvait dans le prolongement du tube *(et qu'il n'y ait ni lentille ni diaphragme).*

No 241: La lunette astronomique réduite:

Retournons bout pour bout le collimateur et remplaçons le diaphragme ou la fente par un réticule, nous avons l'objectif d'une lunette astronomique. La lunette s'appelait jadis "pinnule télescopique".
Une loupe ou un oculaire agrandissent l'image donnée dans le plan focal image de l'objectif de la lunette.

Collimateur
source de lumière
parallèle
lampe
dépolie
Fente
réglable au
foyer objet
de L
L
tube noirci intérieurement
gerbe
parallèle
lunette
astronomique
réduite
foyer objet
de l'oculaire
Oculaire réduit
foyer principal
image de l'oculaire.
foyer secondaire
image de l'oculaire
(α).
foyer
second
(β)
parallèle à l'axe
objectif
réduit
foyer
image de
l'objectif
A image réelle pour l'objectif et
objet réel pour l'oculaire.
A' image virtuelle définitive.
1) AB // à l'axe.
2) OD et AC faisant l'angle α avec l'axe.
3) AP et OQ " " β " "
Grossissement (angulaire) = Gα/α ≏ f1 objectif / f2 oculaire

Fig. 225

La lunette astronomique réduite est quelquefois à tort confondue avec un système a-focal du fait que "a" la distance qui sépare l'objectif de l'oculaire n'est que de très *peu différente de $f_1 + f_2$ (puisque l'image donnée par l'objectif doit se trouver à $f_2 - \varepsilon$ du foyer objet de l'oculaire pour que l'image définitive soit virtuelle et agrandie).*

Mais comme elle donne une image de rayons parallèles au lieu de laisser passer des rayons parallèles, ce n'est pas un système a-focal.

No 242: Aberration de sphéricité sur l'axe:

Les bords d'une lentille convergente sont trop convergents: la distance focale des rayons marginaux étant plus courte que celle des rayons centraux. Ceci a déjà été vu à propos des caustiques.

La distance qui sépare le foyer des rayons centraux du foyer des rayons marginaux *(longueur de la focale sagittale) est la mesure de l'aberration de sphéricité sur l'axe.*

De même, les bords d'une lentille divergente sont trop divergents.

On se rend très bien compte de la cause du phénomène en remplaçant les lentilles par plusieurs prismes on voit que

A marginal $\gg$ A central et par suite $\Delta = (n-1)$ A

Δ marginal $\gg$ Δ central.

On appelle lentilles de "meilleure forme" celles pour laquelle les courbures et l'indice sont tels que *l'aberration de sphéricité sur l'axe est minimum.*

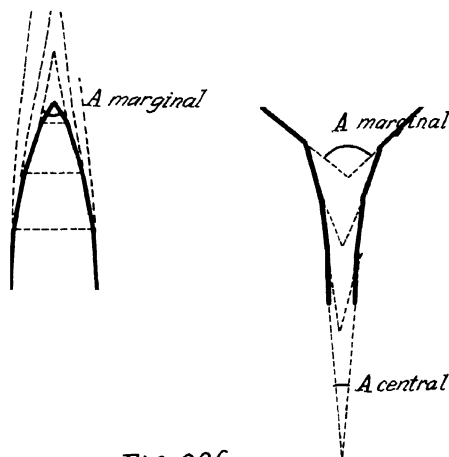



Fig. 226

On démontre que le rapport des rayons de courbure doit être *(en notation algébrique segmentaire)*

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{2n^2 - n - 4}{n(2n+1)}}$$

Ex : si $n = 1.5$ $\quad \frac{R_1}{R_2} = -\frac{1}{6}$

et si $n = 1.685$ $\quad \frac{R_1}{R_2} = 0$

lumière

$n = 1.5$ *(la 1ère courbure doit être 6 fois plus grande que la 2de pour l'indice 1.5)*

$n = 1.7$ *(si la 1ère courbure est infiniment grande par rapport au plan pour l'indice 1.7 on a peu d'aberration.)*

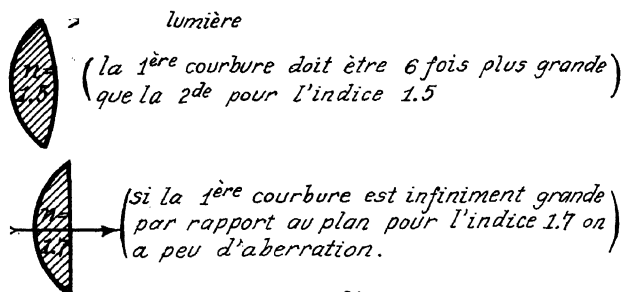



Fig. 227

Remarquer que l'*on ne peut retourner ces lentilles* relativement au sens de la lumière, on n'aurait plus le mimimum d'aberration sphérique.

On ne peut *non plus les employer par immersion:* l'indice changeant, le rapport optimum des rayons change aussi.

No 243: Lentille de Fresnel *(à échelons)*

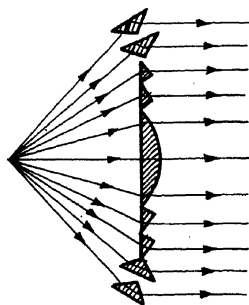



Fig. 228

Pour alléger les lentilles de phares et utiliser les rayons marginaux, Augustin Fresnel a créé la lentille à échelons dont la figure 228 représente une coupe méridienne.

Les rayons marginaux ici subissent la réflexion totale donc pas de perte de lumière; quant aux rayons centraux, ils ont la même déviation angulaire qu'avec une lentille épaisse mais il y a moins d'absorption, moins de danger de craquer et l'équipage est moins lourd.

No 244. Dans les ateliers d'optique, on *"compense" les aberrations de sphéricité* en associant des lentilles convergentes et des divergentes et en tenant compte aussi des autres aberrations pour les atténuer en même temps.

Il n'y a pas de formule simple; on tâtonne et l'on recalcule avec chaque fois une meilleure approximation.

No 245: Coma (aberration due à l'obliquité des rayons).

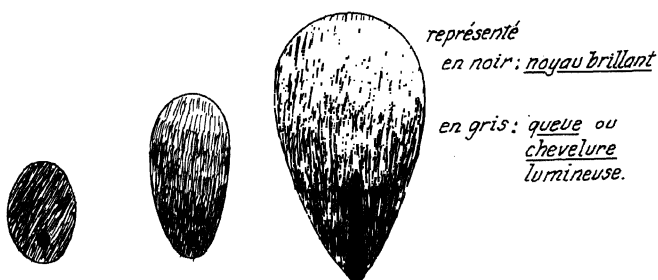
Pas d'obliquité.
1) centre brillant: trace de la surface caustique: lieu des rayons tangents à un même parallèle.
2) couronne lumineuse: trace de la surface caustique: lieu des intersections des rayons appartenant à un même méridien.

Le coma, plaçant l'écran entre les deux focales, donc pseudo-images; *(à diaphragme constant et toujours au même point. Pour des obliquités de plus en plus grandes, c'est un peu la forme d'une comète)*

Fig. 229

Ici l'inclinaison ne varie pas (30°), mais on observe dans les plans des deux focales Sturm.

Foyer

en vraie grandeur

C_2

inclinaison, 30°, Ecran, E_1, pas de diaphragme.

C_3

inclinaison, 30°, Ecran, E_2, pas de diaphragme.

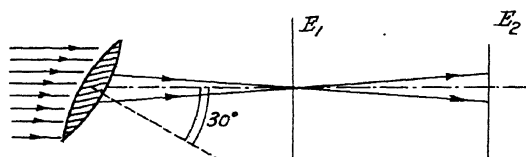
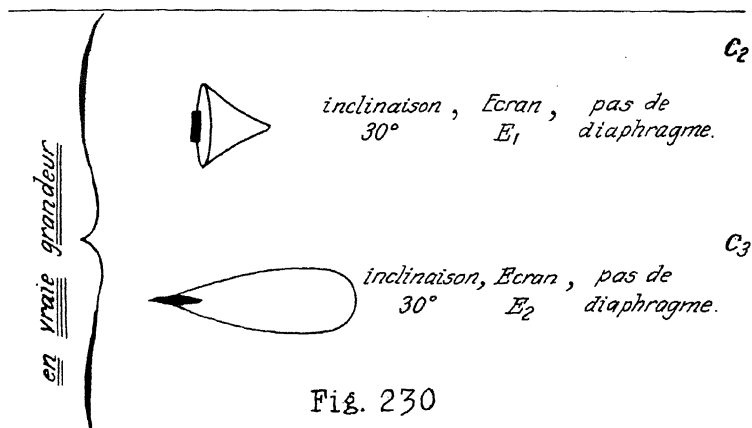



Fig. 230

No 246. *Pour corriger le coma,* il faut employer des objectifs *doubles et symétriques (la distorsion aussi est par là même corrigée)*: un même rayon traversant un groupe de lentilles dans le bas et l'autre dans le haut, il y a compensation d'autant mieux que tous les rayons font environ le même angle avec l'axe de chaque lentille

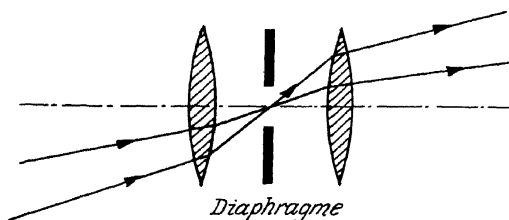
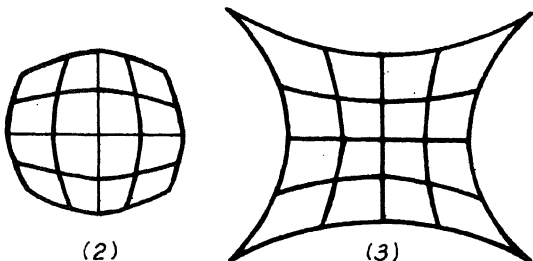



Fig. 231

No 247: Distorsion:

Si l'on prend pour objet un quadrillage régulier, on peut avoir pour image

1) un quadrillage régulier comme l'objet
2) distorsion en barillet
3) distorsion en croissant *(ou en coussinet)*

(1) *diaphragme «collé» sur la lentille pas de distorsion du quadrillage.*

(2) *diaphragme bien avant la lentille (barillet)*

(3) *diaphragme bien après la lentille (coussinet)*

Fig. 232

Le lecteur comprend de suite qu'avec le doublet **symétrique** du numéro précédent, si ***le diaphragme est bien au milieu***, il y aura ***compensation*** automatique de la distorsion.

No 248. Avant de parler de ***condition d'orthoscopie (absence de distorsion)*** il nous faut d'abord préciser ce que l'on entend par ***diaphragme*** et par ***champ***, comme par ***pupille*** et ***lucarne***.

Supposons une ***fenêtre circulaire (un oeil de boeuf)***et un observateur regardant un paysage par cette fenêtre circulaire. Chacun sait que la partie ***transparente*** de l'oeil est le ***centre noir ou pupille***, ouverture qui se dilate ***(ou se rétrécit)***quand la lumière devient très faible ***(ou au contraire éclatante)***. ***(C'est pourquoi la photo à l'infrarouge donne "de si grands yeux")*** dans l'obscurité la pupille est dilatée énormément.
Le diaphragme de l'oeil qui fait ainsi varier la pupille se nomme ***l'iris*** parce que c'est la partie colorée: pigmentée ***(yeux bruns)*** ou qui donne une lumière bleue par diffusion de lumière blanche s'il n'y a pas de pigment.

Appelons ***"lucarne"*** notre oeil de boeuf et joignons le centre C de la pupille de l'oeil et les bords de la pupille ***(H, haut;B bas)*** aux points le plus haut H' et le plus bas B' de la lucarne.

Appelons ***"pupille d'entrée, ou pupille d'ouverture ou pupille de clarté"***le trou de l'iris, et ***diaphragme*** l'iris lui-même.

HH'P et BB'P' limitent la portion du paysage qui ***peut couvrir de ses rayons toute la pupille:*** on dit que P et P' limitent le ***champ de pleine lumière***

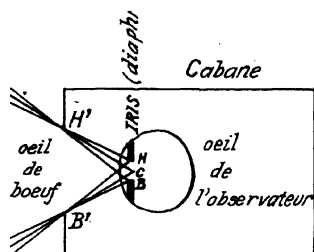



Fig. 233

CH'M et CB'M' limitent le *champ moyen*, les rayons émis par M *(ou M')* ne frappant que la *moitié de la pupille*

Enfin, BH'E et HB'E' sont la limite du paysage: à la limite du *champ extrême*, ces rayons venant juste toucher un point de la pupille *(Nous n'avons pas figuré le cristallin, lentille de l'oeil).*

Passons de la lucarne de la cabane et de l'iris de l'oeil à un instrument d'optique centré.

L'iris est remplacé par un diaphragme D: *ouverture bien centrée sur l'axe* percée dans de la tôle de laiton *(il y a souvent plusieurs diaphragmes pour empêcher les aberrations, supposons d'abord qu'il n'y en ait qu'un: D)*

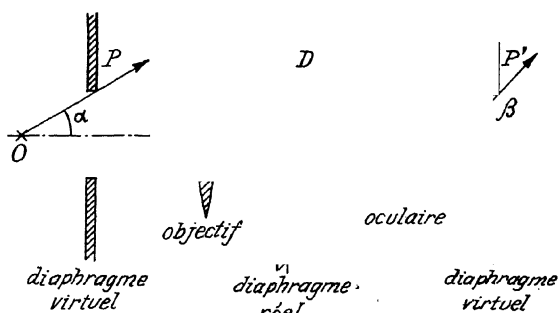



Fig. 234

On *ne couperait aucun des rayons qui passent en ajoutant deux autres diaphragmes P et P'* si P' est l'image de D donnée par l'oculaire et P l'objet qui donnerait D puis P' comme images successives à travers l'objectif puis l'oculaire. *(puisque tout rayon plus incliné que α serait arrêté par D par exemple).P est appelé la pupille d'entrée et P' la pupille de sortie.*

Si O et I sont les centres de l'objet et de l'image, le cône de sommet O et de directrice la pupille d'entrée, d'angle au sommet 2α contient tous les rayons incidents d'ouverture moyenne et de même le cône d'angle 2β et de sommet I contient tous les rayons émergents d'ouverture moyenne.

S'il y a plusieurs diaphragmes, on convient d'appeler pupilles d'entrée et de sortie *les plus petits parmi les diaphragmes virtuels* qui correspondent à chaque diaphragme réel.

Un tel diaphragme placé *dans le système optique centré* est appelé *diaphragme d'ouverture* c'est lui qui limite l'inclinaison des rayons venant du centre de l'image et allant au centre de l'objet *(diaphragme d'ouverture ≡ pupille).*

Les diaphragmes *à l'entrée et à la sortie* du système optique sont dits *les diaphragmes de champ ou lucarnes:* d'entrée et de sortie.

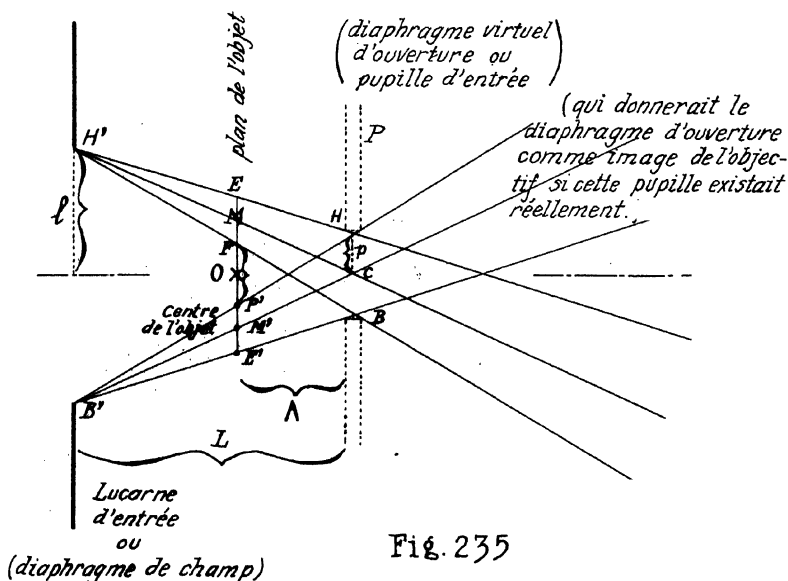



Fig. 235

Les portions de l'objet dans le cercle de diamètre POP' sont dans le *champ de pleine lumière.*

Les parties dans la couronne comprise entre PP' et EE' sont dans le *champ de contour* d'éclairement de plus en plus faible.

Et de ce qui est au-delà de E et E', on ne verra rien

Exercice: si la lucarne d'entrée est à L de la pupille d'entrée et l'objet à Λ de la même pupille d'entrée, et si les rayons de la pupille d'entrée et de la lucarne d'entrée sont p et l, quels sont les rayons maxima des objets vus avec pleine lumière, avec éclairage moyen et simplement vus.

Par triangles semblables

Rép: $OP = \left(\frac{1\Lambda}{L}\right) - \frac{p}{L}(L-\Lambda)$; $OM = \frac{1\Lambda}{L}$; $OE = \left(\frac{1\Lambda}{L}\right) + \frac{p}{L}(L-\Lambda)$

Si l'objet est à l'infini.

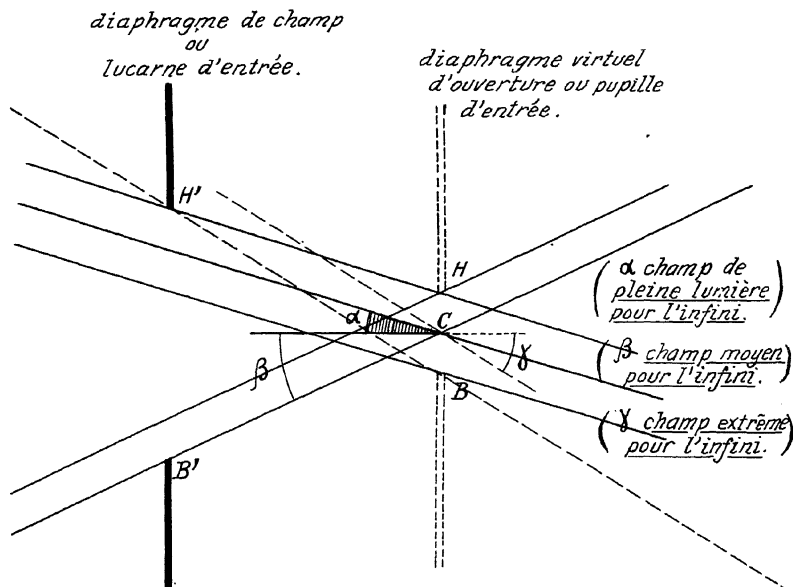



Fig. 236

No 249: Condition d'orthoscopie (système rectilinéaire):

Si une figure plane dessinée dans un plan normal à l'axe du système centré est éclairée et donne une image sans distorsion, semblable à l'objet par conséquent, il faut que le *grandissement (linéaire) soit le même pour toutes les inclinaisons des rayons.*

Soient C et C' les centres des pupilles d'entrée et de sortie AB une ligne de l'objet, A'B' l'image AB

Condition d'orthoscopie: $\left(\frac{A'B'}{AB}\right) = g$, indépendant de u et u', puisque g doit être le même pour $\left(\frac{A_1'B_1'}{A_1B_1}\right)$; or $\overline{A'B'} = \overline{C'B'}\text{tg } u'$ et $\overline{AB} = \overline{CB}$ tg u; on peut donc écrire comme condition d'orthoscopie $g = \frac{\overline{C'B'}\text{ tg } u'}{C\ B\text{ tg } u}$ = constante

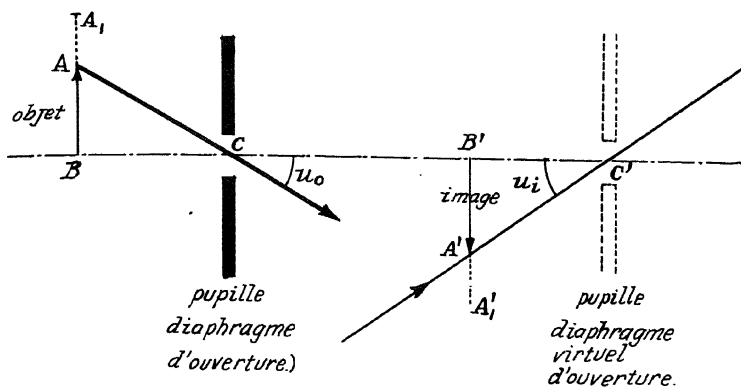



Fig. 237

Si les centres des pupilles sont des points pour lesquels le système a été corrigé de l'aberration de sphéricité, on a déjà $\frac{C'B'}{CB}=c^{te}$ et la condition précédente se réduit à $\frac{tg\,u'}{tg\,u}=c^{te}$ *(constance du rapport de convergence aux centres des pupilles).*

Réalisation de l'orthoscopie (absence de distorsion)

1) pour un dioptre sphérique diaphragmé au *centre de courbure*, puisque u=u' et pas d'aberration sphérique non plus.
pour une lentille mince diaphragmée *au sommet* puisque u = u' et pas d'aberration sphérique non plus.
pour objectifs doubles symétriques à diaphragme central *(compensation déjà vue)*

No 250: Aberrations chromatiques.

Les aberrations que nous avons étudiées jusqu'ici avaient lieu même avec une radiation *(lumière monochromatique)*. Celles dont nous allons nous occuper n'ont lieu *qu'en lumière blanche.*

Pour une lentille mince, nous avons vu *(tome I, page 364)* que la puissance $P=\frac{1}{\pm f}=(n-1)\left(\frac{1}{\pm R}+\frac{1}{\pm R}\right)$ avec les conventions des opticiens, soit $(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\right)$ algébriquement.

Nous savons depuis Newton qu'il y a dispersion parce que l'indice du verre n'est pas le même pour toutes les couleurs

Il s'ensuit que la *distance focale violette est plus courte que la distance focale rouge* avec une seule lentille.

On obtiendrait donc des images irisées avec un objet blanc, et on ne pourrait mettre au point à la fois pour plusieurs couleurs. *(Voir page 192 et seq. Lemoine et Guyot, Physique, I)*

Entre la lentille et le foyer violet l'irisation est rouge en marge et violette au centre alors qu'au delà du

foyer rouge l'irisation est violette en marge et rouge au centre.

La *distance du foyer violet au foyer rouge* mesure "l'aberration chromatique longitudinale"

Le point d'intersection d'un rayon rouge de la marge supérieure avec un rayon violet de l'inférieure et le point d'intersection d'un rayon violet de la marge supérieure avec un rayon rouge de la marge inférieure sont distants de "l'aberration chromatique transversale"; c'est le diamètre de la pseudoimage la plus petite que l'on obtienne d'un point à l'infini.

No 251: Achromatisme des lentilles minces accolées: Associons une lentille en flint à une autre en crown et supposons les infiniment minces et accolées; achromatisons-les pour deux couleurs par exemple pour le jaune et le bleu

$$\frac{1}{F_j}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}= (n_j-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1'}\right)+(n_j'-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)$$

ceci donne la puissance pour le jaune; égalons-la à la puissance pour le bleu

$$\frac{1}{F_j}=\frac{1}{F_b}=(n_j-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1'}\right)+(n_j'-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)=(n_b-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1'}\right)+(n_b'-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)$$

Appelons Δn et $\Delta n'$ les variations d'indice des deux verres du jaune au bleu; l'égalité des puissances pour le jaune et le bleu s'écrira

$$-\Delta n\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1'}\right)=\Delta n'\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)$$

ou encore en appelant n l'indice moyen intermédiaire *(l'indice du vert par exemple)*

$$\frac{\Delta n}{(n-1)f_1} + \frac{\Delta n'}{(n'-1)f_2} = 0$$

On voit d'abord que f_1 et f_2 *doivent être de signes contraires* donc on associera une convergente à une divergente.

Ensuite la convergence du système est généralement celle du verre le moins dispersif: *une lentille convergente en crown* et une divergente en flint donneront un système convergent achromatique pour deux couleurs; or le crown a une dispersion qui n'est que les 3/5 de celle du flint. *(Voir livres d'optique H. Pariselle en particulier)*

Exercice simple: égalons 3 des 4 rayons de courbure, prenant une lentille convergente symétrique *(crown)* $R_1=R_1'$ et vu que l'autre est accolée $R_2 = R_1 = R_1' = R$

$$\frac{1}{F}=(n_{cr}-1)\left(\frac{2}{R}\right)+(n'_{fl}-1)\left(-\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right)$$

écrivons l'égalité des foyers rouge et vert

$$(n_{cr,ro}-1)\frac{2}{R}+(n'_{fl,ro}-1)\left(-\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right)=$$

$$(n_{cr,ve}-1)\frac{2}{R}+(n'_{fl,ve}-1)\left(-\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\text{ou } \frac{1}{R}\left[2(n_{cr,ro}-1)-2(n_{cr,ve}-1)+(n'_{fl,ve}-n'_{fl,ro})\right]=\frac{1}{R_2}(n'_{fl,ve}-n'_{fl,ro})$$

$$\text{ou } \frac{1}{R}\left[2(-\Delta n_{crown})+\Delta n'_{flint}\right]=\frac{1}{R_2}\Delta n'$$

$$\text{ou } \frac{1}{R}\left[2(-9)+15\right]=\frac{1}{R_2}15$$

Cette relation donne le rapport de $\frac{R_2}{R} = \frac{15}{-18} = \frac{-5}{6}$

d'où $R_2 = -\frac{5}{6}R$ et en portant cette valeur de R_2 dans l'équation $\frac{1}{F} = \cdots$, on aura une relation pour déterminer l'unique inconnue R.

No 252: Grandeurs photométriques: flux lumineux, intensité lumineuse, brillance, éclairement. - leurs unités; clarté des instruments.

On admet l'*égalité de deux flux* lumineux de lumière blanche, si étant reçus *sous la même incidence sur deux aires égales d'une même surface blanche, les deux aires paraissent également éclairées.*

Par définition la juxtaposition ou superposition de deux flux est la somme des composants.

Avec ces conventions le flux lumineux est la grandeur fondamentale mesurable par l'oeil; c'est le débit d'énergie rayonnante *évalué d'après la perception de notre oeil* et non intrinséquement. C'est ainsi que les radiations de longueur d'onde supérieure à 0μ75 et celles inférieures à 0μ40 ne seront pas estimées par l'oeil.

On devrait dire pour être rigoureux : *flux des radiations du spectre visible estimées d'après leur efficacité sur la rétine.*

L'intensité lumineuse I *(dans une direction donnée)* est le *quotient du flux lumineux* $(d\Phi)$ qu'envoie la source dans cette direction sur un élément de surface par l'angle solide $(d\omega)$ sous lequel on voit l'élément de surface d'un point de la source

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

Pour une lampe à filament, l'intensité n'étant pas la même dans toutes les directions, le flux sera donné par l'intégrale

$$\Phi = \int I\, d\omega$$

(Le flux lumineux est la grandeur qui se conserve, si l'objet est quatre fois plus loin, la surface illuminée parallèle est seize fois plus grande et l'éclairement seize fois plus petit mais le flux lumineux est le même ainsi que l'angle solide, c'est pourquoi il vaut mieux définir en angles solides et flux qu'en éclairements et aires éclairées d'autant plusqu'il faudrait aussi spécifier l'inclinaison de la normale à l'aire éclairée avec le rayon moyen dans cette dernière manière de parler)

Premier Exercice: Une lentille convergente donne d'un

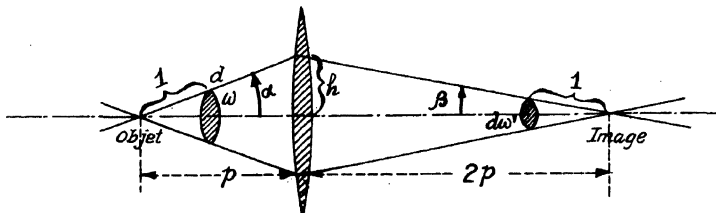



Fig. 238

point lumineux située sur l'axe *(à la distance p)* une image réelle à la distance 2p: *l'intensité de l'image réelle dans la direction de l'axe est quadruple de celle de l'objet.*

$$(I_{\text{ntensité objet}})\, d\omega = (I_{\text{ntensité image}})\, d\omega' = d\Phi_{\text{flux lumineux}}.$$

d'après tome I page 325
$$\begin{cases} d\omega = 2\pi(1-\cos\alpha) = 4\pi\sin^2\frac{\alpha}{2} \\ d\omega' = 2\pi(1-\cos\beta) = 4\pi\sin^2\frac{\beta}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{p} \qquad \operatorname{tg}\beta \quad \frac{h}{2p}$$

les angles étant petits $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha) = \frac{h}{2p}$

$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{h}{4p}$; substituant il vient :

$$I\, 4\pi\frac{h^2}{4p^2} \qquad I'\,\frac{h^2}{16p^2}$$

$$4I = I' \qquad \text{Q.E.D.}$$

I.P: Cet exercice corrige l'idée fausse qu'ont souvent les élèves que si l'image est plus éloignée que l'objet, elle doit être moins intense.

Deuxième Exercice: Une lentille divergente donne d'un point lumineux sur l'axe principal *(à la distance p)* une *image virtuelle* à la distance $\frac{p}{2}$, montrer que l'intensité lumineuse de l'image est le quart de celle de l'objet.

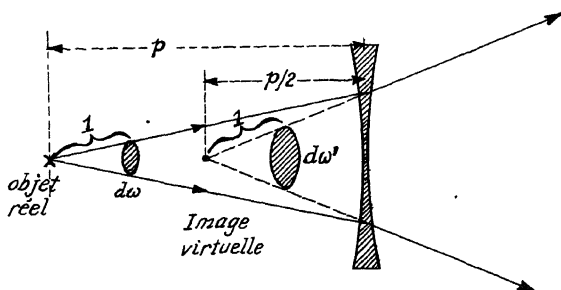



Fig. 239

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer la proposition en écrivant la conservation du flux lumineux et exprimant que $d\omega' = 4\, d\omega$ comme à l'exercice précédent.

Brillance *(dans une direction déterminée)* les arcs au charbon et les filaments de tungstène des lampes non dépolies qui aveuglent les passants sont plus brillants que des lampes dépolies ou des manchons Auer *(chauffés au gaz)* qui émettent le même flux lumineux.

Cette question de brillance est très importance et devrait attirer l'attention du public sur l' *importance d'a-*

voir un éclairage constant et d'égale brillance (lumière indirecte ou diffusée) au lieu d'avoir des irritations de la rétine par le manque d'uniformité et les oscillations.

"On appelle *brillance* dans une direction donnée d'une surface éclairante le *quotient de l'intensité lumineuse* dans cette direction par la *projection de la surface rayonnante sur un plan perpendiculaire à la direction considérée*".

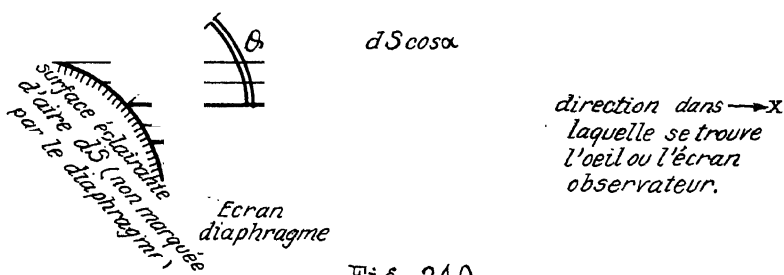



Fig. 240

$$B_{x\,\text{brillance}} = \frac{I_x}{dS \cos\theta}$$

Loi de Lambert: *la brillance est la même dans toutes les directions.*

Eclairement "l'éclairement en un point donné d'une surface est le flux reçu par cm² au voisinage de ce point"

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi \text{ (flux)}}{dS' \text{ (aire éclairée)}}$$

No 253: Eclairement d'une surface dS' éclairée par une petite surface éclairante dS

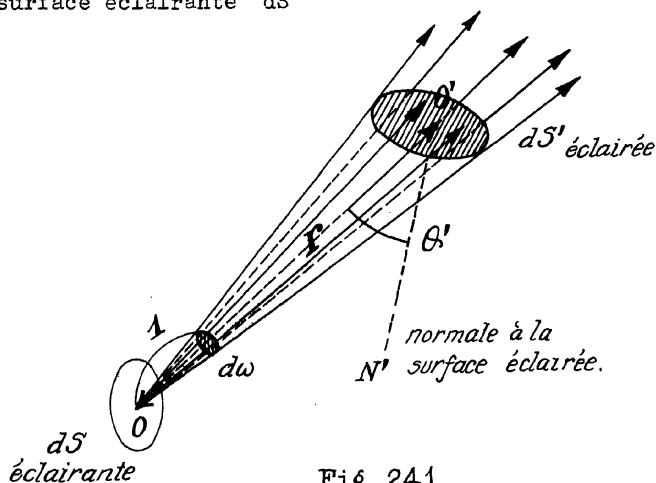



Fig. 241

dS est supposée assez petite *(devant r^2)* pour que de, tous les points de la source, dS' soit vu sous le même angle solide.

Soit I l'intensité de la source dans la direction moyenne OO', le flux embrassé par dS' est $d\Phi = I\,d\omega$

Mais *(page 325, tome I)*

l'angle solide $d\omega = \dfrac{(\text{l'aire } dS')\cos\theta'}{r^2}$

donc le flux aura pour expression:

$$d\Phi = \frac{I\,dS'\cos\theta'}{r^2}$$

et l'éclairement $\dfrac{d\Phi}{dS'} = \dfrac{I\cos\theta'}{r^2}$ d'où:

Lois photométriques: *1)* l'éclairement est *inversement proportionnel au carré de la distance* qui sépare la source de la surface éclairée.

2) l'éclairement est *proportionnel au cosinus* de l'angle formé par la direction moyenne de la lumière avec la normale à la surface qu'elle éclaire.

No 254: Puissance transportée par rayonnement *(par tout le rayonnement celui qui est sensible à l'oeil et les ondes qui ne sont pas perçues par l'oeil: infrarouge, ultraviolet, etc)*

Recevons le faisceau de radiations sur une plaque de métal noircie et mate *(pour éviter toute réflexion)*: le rayonnement est absorbé et transformé en chaleur et "la quantité de chaleur dégagée par seconde mesure la puissance W transportée par le rayonnement *total*"

Le soleil par exemple donne par cm^2 par beau temps et à midi *un déciwatt*, mais il n'y a pas un déciwatt de lumière visible.

Pour un *lumen* il faut 0.0016 watt pour le jaune vert, 0.013 watt pour le corps noir à 5200°Kelvin, 0.053 watt, pour la lampe, de tungstène en atmosphère gazeuse, 0.36 pour la lampe à filament de carbone et 0.84 pour la flamme *(sans manchon)* du gaz d'éclairage.

No 255: Unités photométriques.

Unité d'intensité lumineuse: *la bougie internationale (à peu près l'intensité horizontale d'une bougie de suif et paraffine)*

Unité de *brillance:* $\dfrac{\text{bougie}}{cm^2}$

Ordres de grandeur des brillances. *(soleil: 147000, lune 1/4)*
(bougie ordinaire 1/2, lampe à pétrole 2.5,
(lampe à filament (rectiligne) de tungstène dans le vide: 200,
lampe à filament de tungstène (ramassé en vrilles) dans une atmosphère gazeuse: 500, lampe à arc 15000)

unité de *flux lumineux:* le lumen ou bougie × stéradian

unité d'*éclairement:* le lux ou $\dfrac{\text{lumen}}{\text{mètre carré}}$ *(ou bougie-mètre)*

unité C.G.S. le phot ou $\dfrac{\text{lumen}}{cm^2} = 10000$ lux

Ordres de grandeur { *(soleil à midi: 100000, pleine lune 1/5, ciel sans lune 1/3000)*
(pour un "vivoir" 30, un bureau 50, une salle d'études 80.)

No 256: Minimum de flux lumineux perceptible par l'oeil:

D'après Buisson 1 bougie est visible à 27 kilomètres. Or le diamètre d'une pupille dilatée dans l'obscurité est 8mm.5

$$\Phi = (I)(\omega) = (1 \text{ bougie}) \frac{(\pi)(0.^{cm}425)^2}{(2700000 \text{ cms})^2} = 8 \times 10^{-14} \text{ lumen}$$

l'oeil est le plus sensible des détecteurs de lumière.

No 257: La radiance R: à l'éclairement ou $\frac{flux}{aire\ éclairée}$ qui a trait à la réception de lumière correspond pour l'émission la radiance ou $\frac{flux}{aire\ éclairante}$ au point considéré de la source.

No 258: Relation entre la brillance et la radiance.

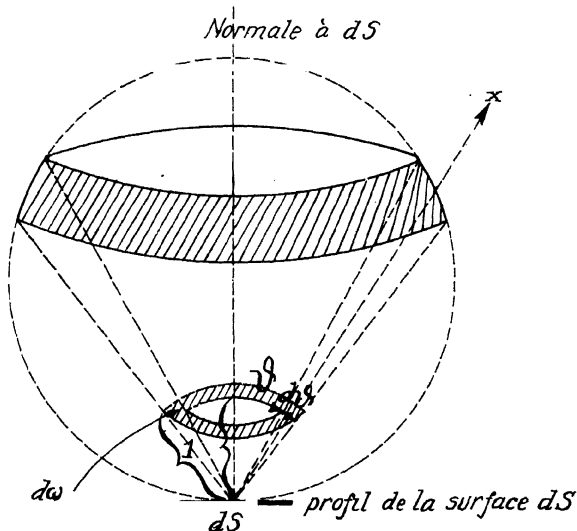



Fig. 242

$$\text{Brillance : } \frac{I_x}{dS \cos\theta} = B$$

$$d\omega = 2\pi\left[1-\cos(\theta + d\theta)\right] - 2\pi\left[1-\cos\theta\right]$$

$$= 2\pi\left(-2\sin\frac{\theta + d\theta}{2}\right)\sin\left(-\frac{d\theta}{2}\right) = 2\pi(\sin\theta)(d\theta)$$

Flux lumineux contenu dans l'angle solide $d\omega$

$$d\Phi = (I_x)(d\omega) = (B\, dS \cos\theta)(2\pi \sin\theta)(d\theta)$$
$$= \pi B (\sin 2\theta)\, d\theta$$

Flux total émis par la surface dS

$$\Phi = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (\pi B)(\sin 2\theta) d\theta = \int_{\sin\theta=0}^{\sin\theta=1} 2\pi B \sin\theta \, d(\sin\theta)$$
$$\Phi = 2\pi B \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\sin\theta=0}^{\sin\theta=1} = \pi B$$

$$R = \pi B$$

"La *radiance* d'une surface éclairante obéissant à la loi de Lambert est égale à sa *brillance* multipliée par π "

: Relation entre la *brillance* d'un diffuseur parfait *éclairement (d'après Monsieur Fabry).*

Un diffuseur parfait est une surface idéale non lumineuse par elle-même et qui diffuse tout le flux qu'elle reçoit *(sans en rien absorber!)* Elle émet ce flux diffusé en obéissant à la loi de Lambert, quelle que soit l'orientation du flux incident *(Une surface blanche et mate réaliserait à peu près ce diffuseur parfait).*

"Une telle surface peut être considérée de deux points de vue; elle reçoit du rayonnement et elle en renvoie. Le rayonnement reçu est caractérisé par l'éclairement $\mathcal{E}$. La surface reçoit alors le flux $d\Phi = \mathcal{E} . dS'$

"Comme elle n'absorbe rien, elle émet le même flux; sa radiance est donc $R = \frac{d\Phi}{dS}$

Et comme la surface éclairée dS' et la surface éclairante dS sont *ici* une seule et même chose

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dS'} = \frac{d\Phi}{dS} = R$$

"La *radiance* d'un diffuseur parfait est égale à l'*éclairement* qu'il reçoit; donc sa *brillance* est égale à cet éclairement divisé par π " *(voir pour plus de détails deux ouvrages de photométrie de M. Charles Fabry: 1) Introduction générale à la photométrie (Revue d'optique éditeur) 2) la cinquième partie du Cours de Physique de l'Ecole Polytechnique (Gauthier Villars))*

No 260: Quantité d'éclairement ou quantité d'excitation.

Quand la durée de pose nécessaire intervient, comme en photographie, le produit $\mathcal{E} \times \Delta t$ s'exprime en lux X seconde ou en phot X seconde.

No 261: Eclairage ou quantité de lumière

Pour des questions de tarif le produit $\Phi \times \Delta t$ est utile, on l'exprime en lumen x seconde, lumen x heure..... ou dans le système énergétique en wattxseconde *(ou joule)* ou en watt X heure ou wattXan.

No 262: Formule fondamentale en éclairage.

B brillance de la source $\frac{I_x}{dS \cos\theta}$, $I_x = (B)(dS)\cos\theta$

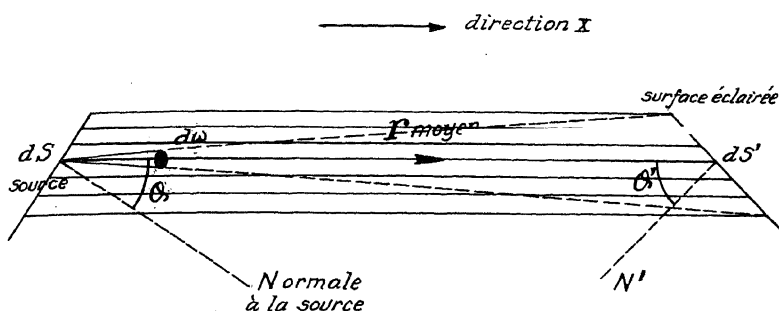



Fig. 243

Si dω est l'angle solide sous lequel on voit dS' d'un point quelconque de dS

$$d\Phi = I_x(d\omega) = (B)(dS)\cos\theta\,(d\omega)$$

Mais $$d\omega = \frac{dS'\cos\theta'}{r^2}$$

d'où $$d\Phi_{flux} = \frac{B(dS\cos\theta)(dS'\cos\theta')}{r^2}$$

$$= \frac{\text{(brillance)(aire source normale au rayon)(aire de l'écran normalement au rayon}}{\text{carré de la distance}}$$

C'est la formule fondamentale des ingénieurs éclairagistes.

Exercice: Une lentille mince convergente donne d'un petit objet réel plan d'aire S perpendiculaire à l'axe principal et situé à la distance p du centre optique une image réelle S' à la distance 2p du centre optique.

On a vu que l'*intensité de l'image est quadruple de celle de l'objet, montrer que les brillances sont les mêmes.*

No 263: Clarté des instruments d'optique d'observation.

C'est le rapport $C = \dfrac{\text{éclairement de l'image rétinienne avec l'instrument}}{\text{éclairement de l'image rétinienne à l'oeil nu.}}$

Soient p le rayon de la pupille de l'oeil, ρ la fraction de rayon de pupille utilisée avec l'instrument; B la brillance de l'objet sans instrument et B' celle avec l'instrument, l distance du cristallin à la rétine.

$$C = \frac{B'\pi\rho^2 \div l^2}{B\ \pi\ p^2 \div l^2} = \frac{B'\rho^2}{B\ p^2}$$

Cette formule pour être comprise suppose admis le théorème suivant: "l'éclairement d'un écran *(la rétine ici)* sur lequel se projette l'image réelle d'un objet est proportionnel à la brillance B de l'objet, à la surface utile πr^2 de

la lentille et en raison inverse du carré de la distance de la lentille à l'écran *(soit ici du cristallin à la rétine)*"

Démontrons le:

La formule fondamentale en éclairage *(vue plus haut)* nous donne tout d'abord pour l'*éclairement d'un écran normal* aux rayons

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_{flux}}{dS'_{aire\ éclairée}} = \frac{B\,(dS\cos\theta)(\cos\sigma)}{r^2} = B(d\omega)$$

$d\omega$ étant l'*angle solide sous lequel on voit la source* d'un point de l'écran.

Représentons maintenant le cristallin par un lentille mince *(convergente)* plongée dans l'air *(au lieu des humeurs aqueuse et vitrée)*.

Ouverture du diaphragme πr^2 ; angle solide sous lequel on voit la source d'un point de la pupille *(ouverture de l'iris* $d\omega$

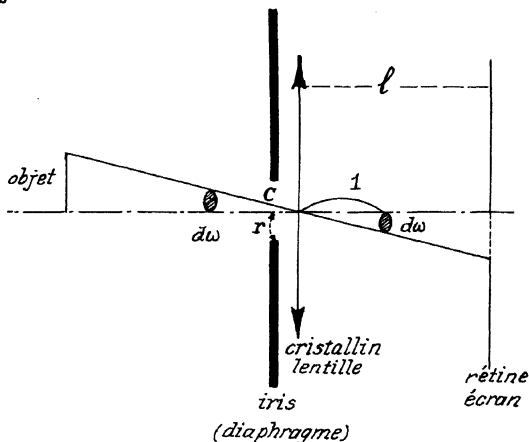



Fig. 244

Flux lumineux $d\Phi = B(d\omega)(\pi r^2)$

Aire de la rétine éclairée par l'objet: $(d\omega)l^2 = dS'$

Eclairement de la rétine $\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dS'} = \frac{B(d\omega)(\pi r^2)}{d\omega\, l^2} = \frac{B(\pi r^2)}{l^2}$

Q.E.D.

up angulaire apparent dans la loupe et puissance

L'objet est placé près du foyer objet, entre le foyer objet et la loupe. Vu les grandes dimensions de la loupe, c'est la pupille de l'oeil qui sert de pupille de sortie et l'objet virtuel dont elle est l'image pour la loupe qui sert de pupille d'entrée.

La lentille loupe limite le champ; la figure montre qu' *on augmente le champ visuel avec la loupe*

1) en approchant la pupille de l'oeil de la loupe*(coller l'oeil sur la loupe)*

P pupille de l'oeil (P pupille de sortie pour la loupe).
D diaphragme de champ.
P" objet virtuel dont P serait l'image (Pupille d'entrée pour la loupe)
R rétine (le cristallin, qui y fait converger les rayons n'a pas été représenté).
Δ distance de la rétine à l'image virtuelle.
A'
IMAGE VIRTUELLE
B'
A
OBJET
B
F objet
D
I
P"
IRIS
LOUPE
F image
R
η
f-ε
f
q
q+f+η=Δ
Pour construire les pinceaux extrêmes qui pénètrent dans l'oeil (ceux de A et de B), joindre les bords de la pupille de sortie (PP' pupille de l'oeil) à l'image (à A' et B'), arrêter ces rayons à la lentille et les joindre à l'objet (à A et B).
Ou bien joindre A et B aux bords de la pupille d'entrée virtuelle, couder les rayons à la lentille et les prolonger comme s'ils venaient de l'image virtuelle.

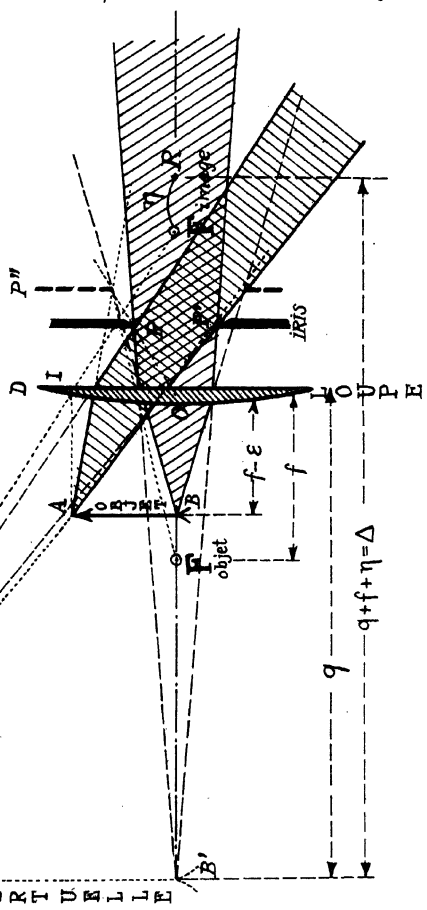



Fig. 245

2) en diminuant le diamètre de la pupille de l'oeil *(comme si l'on craignait un éclairage intense)*
3) en prenant une loupe de plus grand diamètre.

Augmenter le champ signifierait que l'on apercevrait les points sur le prolongement supérieur de la droite BA.

Les aberrations de sphéricité et chromatiques limitent vite le champ acceptable.

On appelle puissance de la loupe *(ou d'un oculaire)* le rapport de *la tangente de l'angle sous lequel on voit l'image à la longueur de l'objet*

ici $P = \frac{tg(\widehat{RA'B'})}{AB} = \frac{A'B'}{\Delta(AB)} = \frac{1}{\Delta}\frac{(f+q)}{f} = \frac{f+q}{f(f+q+\eta)} = \frac{1}{f}(1-\frac{\eta}{\Delta})$

En pratique, on prend toujours $P :: \frac{1}{f}$ *(puissance nominale des catalogues et des oculistes)*

No 265: Oculaires positifs et oculaires négatifs.

Si le foyer objet du système oculaire est situé *avant la première des deux lentilles*, l'oculaire est dit positif, on peut alors l'utiliser pour l'examen d'objets réels et l'on peut mettre un micromètre. *(voir le cours d'arpentage)*.

Les oculaires négatifs au contraire sont ceux qui ne peuvent être utilisés seuls pour examiner des objets réels, mais qui doivent être accouplés à un objectif qui fournira l'objet virtuel: en effet, le foyer objet de ces oculaires est après la première des deux lentilles *(impossible de mettre un micromètre avec cet oculaire)*

No 266: Oculaire positif de Ramsden

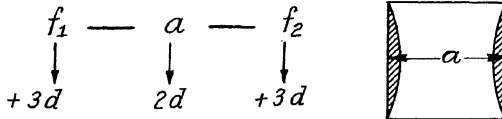



Fig. 246A

Un catalogue donne simplement (3 , 2 , 3)

Le lecteur est à même de calculer les éléments de ce doublet:

Ordres de grandeur:

1 cm $< a < 3$ cms ; *intervalle optique (foyer objet de la première ⟶ foyer image de la deuxième)* $8d = -4a$

Résultat: $f = \frac{9a}{8} = \frac{9d}{4}$; interstice $\frac{a}{2} = d$.

Usages: dans l'ancienne lunette astronomique et dans l'oculaire micrométrique.

No 267: Oculaires de Huyghens.

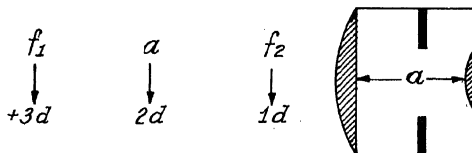



Fig. 246 B

En catalogue (3 , 2 , 1) *(l'oculaire 4,3,2 est aussi de Huygens)*

Ordres de grandeur

1 cm < a < 3 cms ; intervalle optique ($F_o - F_i$) = - 3a; le verre de champ a un plus grand diamètre que le verre de l'oeil. Le diaphragme est au milieu.

Résultats: $f = \frac{3d}{2} = \frac{3a}{4}$; interstice = a = 2d

Usages dans le microscope, son champ est grand et il est achromatisé automatiquement *(comme chaque fois que $f_1 + f_2 = 2a$)*

No 268: Schéma du microscope réduit.

Représentons l'objectif par une seule lentille et l'oculaire par une seule autre lentille.

Dans ce schéma la première et unique lentille de l'objectif constitue la *pupille d'entrée.*

L'oculaire donne de cette pupille d'entrée une image qui est appelée *"cercle oculaire"* ou *pupille de sortie* et dont le centre est le "point oculaire".

L'oculaire fonctionne comme une loupe; l'objectif est chargé de donner une image très près du foyer objet de l'oculaire et un peu plus près de l'oeil que ce foyer objet de l'oculaire.

No 269: Puissance du microscope *(diamètre apparent d'un objet unité)*

Nous avons déjà exprimé la puissance de la loupe oculaire. Comme l'image de l'objectif qui sert d'objet à l'oculaire est agrandie g fois, la puissance globale du microscope

sera g *(grandissement de l'objectif)* X P *(puissance de l'oculaire)*

(Si l'on traite le microscope entier comme un doublet, et que l'on calcule la distance focale résultante, la puissance est l'inverse de cette distance focale résultante)

No 270: Mesure du grossissement du microscope: G (et de sa puissance P).

C'est le rapport de la puissance du microscope à la puissance de l'oeil *(Un oeil myope qui peut voir de très près profite moins d'un microscope qu'un autre)*

On mesure directement ce grossissement par la méthode de "la chambre claire".

Nous décrirons la *méthode la moins fatigante* pour l'oeil et *la plus précise* puisque les mesures sont faites après avoir regardé au microscope *(au lieu de la gymnastique classique des coïncidences de deux divisions de réglette et d'image micrométrique). (Nous la devons à Monsieur Michaud de l'Université de Paris).*

a+b+c = distance minimum de la vision distincte de l'observateur.

Le diamètre apparent d'un objet unité ou *puissance* est

$P = \frac{D}{(a+b+c)d}$ *(D et d étant exprimés avec la même unité et a+b+c en centimètres ou en mètres selon le système choisi).*

Mais le diamètre apparent de l'objet unité vu à l'oeil nu

Plan dans lequel se trouve l'image donnée par l'objectif si l'oeil regarde à l'infini.
Ramsden 3, 2, 3
positif
peut avoir un micromètre
champ = (K diamètre du verre de champ / f = 9a/8)
champ angulaire apparent moyen
Foyer principal objet résultant (réel)
verre de champ
K
f
champ
P
P I
interstice
P
P 0
champ
Oeil
Foyer principal image résultant
verre de l'oeil
champ du Ramsden / champ du Huyghens = 2/3
la pupille de l'oeil est supposée au F.R.P.I. et ponctuelle (champ moyen)
Plan dans lequel se trouve l'image donnée par l'objectif si l'oeil regarde à l'infini.
champ angulaire moyen (apparent)
foyer principal résultant image
champ
Oeil
verre de l'oeil
foyer principal résultant objet (virtuel)
Huyghens 3, 2, 1
négatif
Champ = (K diamètre du verre de champ / f = 3a/4)

Fig: 247

Opérations :

1) Mettre au point sur le micromètre.

2) Placer la chambre claire et vérifier qu'on est bien toujours au point sur le micromètre.

3) Avec une aiguille (ou une plume) chercher à quelle hauteur au-dessus de la table on la voit nettement le plus près possible de l'oeil.

4) Placer à cette distance (à l'aide de quelques livres ou planchettes) un papier mat et peu coloré.

5) Dessiner sur ce papier coloré l'image du micromètre que l'oeil y projette (les images des divisions du micromètre paraissent dessinées sur le papier); les suivre avec le porte plume de façon à pouvoir tout à l'heure sans fatigue et sans viser davantage les utiliser pour la mesure.

6) <u>N'utiliser que les divisions dessinées qui ont même intervalle</u> (les marginales sont plus écartées à cause du cône de projection des rayons) et prendre leur moyenne arithmétique D moyenne.

Comme on connait la valeur absolue de la division du micromètre (d micromètre)
L'angle sous lequel on voit (d) à travers l'instrument est $\frac{D}{a+b+c}$ (on dit aussi diamètre apparent au lieu d'angle)

Fig. 248

(au punctum proximum a+b+c = 25 à 30 cms pour un oeil normal jeune) est

$$p(\textit{puissance de l'oeil}) = \frac{1}{a+b+c}$$

Donc le grossissement $G = \frac{P}{p} = \frac{D}{d}$

On peut substituer au micromètre une préparation microscopique *(colorée au besoin)*et la dessiner sur un papier tout comme on dessinait les divisions du micromètre projetées par l'oeil.

En comparant par transparence le dessin de la préparation et celui du micromètre on peut ainsi évaluer les dimensions des objets microscopiques.

No 271: Description sommaire des éléments d'un microscope

(afin d'éviter d'avoir à revenir en troisième année sur le sujet nous avons figuré les parties qui ajoutées au microscope ordinaire en font un microscope polarisant pour l'étude des cristaux autres que ceux du système cubique)

Par contre, nous n'avons pas figuré les parties très spéciales lames demi-onde et quart d'onde, coin de quartz, quadriquartz, compensateurs etc. dont l'intellignnce requiert la connaissance de la polarisation de la lumière, pas plus que nous ne parlerons en deuxième année du pouvoir séparateur ni de l'ultra-microscopie qui ne peuvent être saisies qu'après la diffraction.

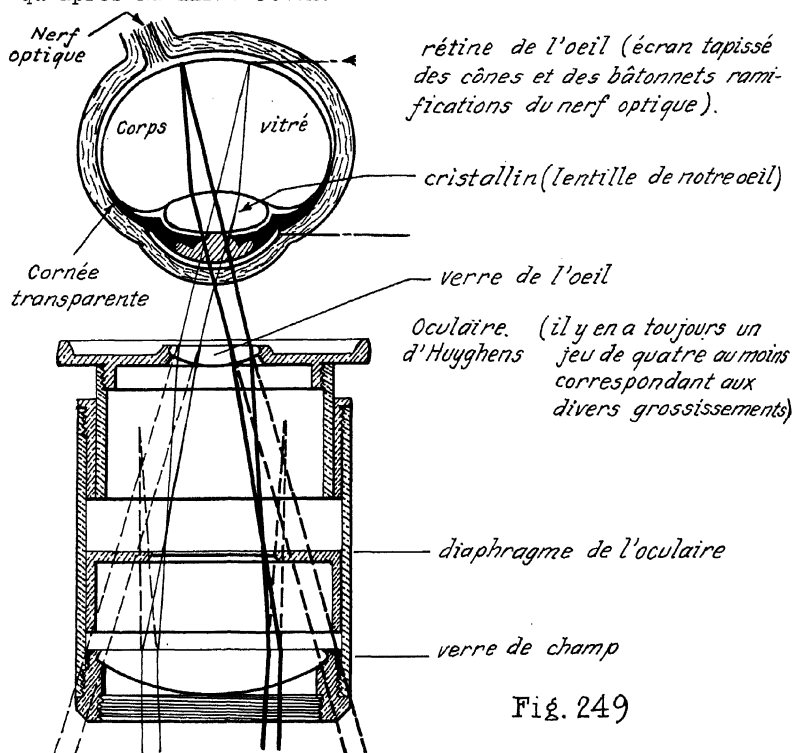
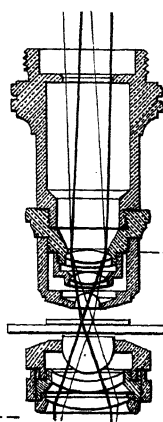



Fig. 249

objectif rendant la lumière presque parallèle et grossissant (il y en a autant que d'oculaires interchangeables aussi).

préparation microscopique ou micromètre entre deux verres.

Condenseur de lumière transformant la lumière pratiquement parallèle en lumière très convergente pour bien éclairer tous les points de la préparation.

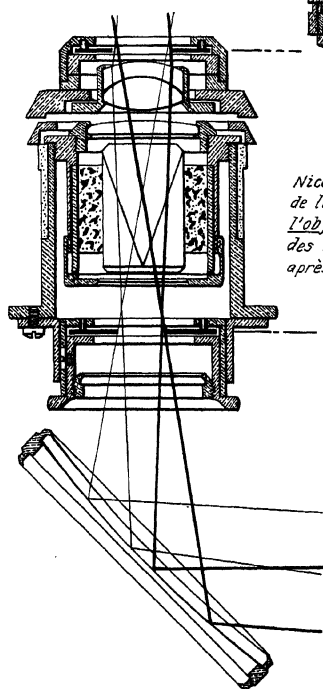
Fig. 250

Nicol polariseur (rectiligne) de lumière disposé avant l'objectif dans le microscope des minéralogistes (de suite après le miroir).

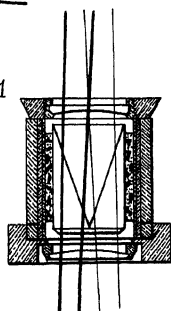
Fig. 251

Nicol analyseur rectiligne situé généralement entre l'objectif et l'oculaire (mais dans le microscope de DICK pouvant aussi se relever après l'oculaire de BERTRAND pour apprécier les biréfringences) par contraste des couleurs.
On peut l'enlever pour diminuer l'absortion de lumière quand il ne s'agit pas de cristaux.
Il est mobile de 90° avec un cran à 45° vu la fréquence de cette position relativement au premier nicol (polariseur)

Fig. 252

Condenseur
Préparation
Platine
On l'enlève quand il s'agit de substances isotropes
Nicol polarisateur
parties inférieures en position
préparation
platine
condenseur
polariseur
miroir
Diaphragme
Miroir

Fig.253

Oeil
Oculaire
Diaphragme
Pignon
Diaphragme
(On peut le tourner de 45° et de 90°; on peut aussi le pousser hors de son logement pour les substances isotropes).
Nicol analyseur
Crémaillère
Parties supérieures en place
Oeil
oculaire
analyseur
objectif
Objectif

Fig. 254

No 272: Jumelles à prismes et Stéréoscopie.

L'emploi de prismes permet de raccourcir considérablement les lunettes, puisque les parcours dans le verre comptent pour 1.5 de parcours identiques dans l'air. Les prismes permettant aisément de couder à angle droit les rayons permettent de réduire encore la longueur des lunettes.

Généralement, on jumelle deux lunettes ainsi raccourcies pour éviter la fatigue de l'oeil et aussi permettre des mesures de distance:télémétrie *(par exemple en intercalant un cristal biréfringent d'un côté, programme de troisième année)*

Ce jumelage est la seule manière d'apprécier le relief. Wheatstone a mis ceci à profit avec son stéréoscope: prenant deux photographies avec des appareils couplés *dont les objectifs ont des axes distants de 3 pouces à 3 pouces 1/2 (distance des axes des yeux)*puis en offrant simultanément à chaque oeil la photo de ce qu'il aurait perçu lui-même, *on restitue le relief.*

No 273: Objectifs photographiques.

Nous réduirons notre étude sommaire à l'objectif double symétrique: deux doublets achromatisés séparés en leur milieu par un diaphragme.

Le diaphragme virtuel qui donnerait le diaphragme réel médian comme image du verre de champ s'appelle la pupille d'entrée et son diamètre est ce que les photographes désignent par "d"

Si l'objet est à une distance notable, son image est près du foyer et le quotient:

$$\frac{d \text{ (diamètre pupille entrée)}}{f \text{ (distance focale de l'objectif)}}$$ est appelé

l'ouverture relative

$\frac{d}{f} > 0.3$ portrait

$0.3 < \frac{d}{f} < 0.17$ cinéma *(objectif extra-rapide)*

$0.17 < \frac{d}{f} < 0.1$ objectif universel

$0.1 < \frac{d}{f} < 0.02$ *(objectif lent)*

No 274: Durée de la pose:

Elle est comme la *réciproque* de $\left(\frac{d^2}{f^2}\right)$ dans des conditions identiques d'éclairement.

No 275: Goniomètre à un cercle (mesure de l'angle de deux plans).

L'angle dont on doit tourner la lunette sans toucher au collimateur ni au prisme est le double de l'angle du prisme.

Avant d'opérer la mesure, il faut s'assurer que l'intersection des deux plans est parallèle à l'axe de rotation de la lunette: pour cela on place après le collimateur un *signal* et l'on agit sur les vis de réglage jusqu'à ce que l'image du signal vienne coïncider avec la croisée des fils pour les deux positions de la lunette.

$$2\pi = 2\alpha + 2\beta + y = \alpha + \beta + \pi + x$$

$$2(\alpha+\beta) = 2\pi - y \qquad y = 2x$$

$$2(\alpha+\beta) = 2\pi - 2x$$

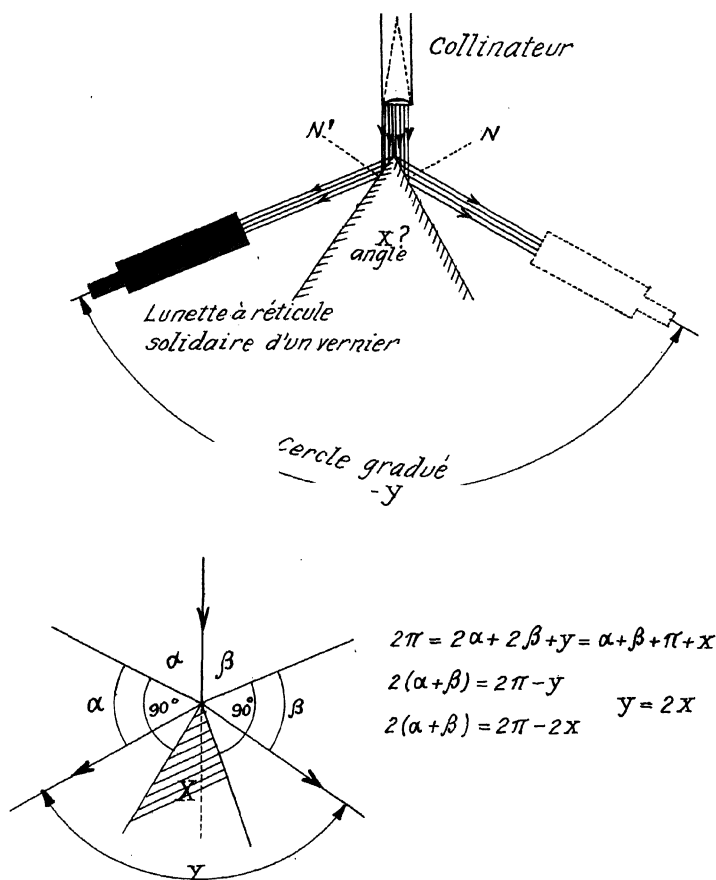



Fig. 255

(Nous parlerons du goniomètre à deux cercles au 3e tome)
Il n'est pas nécessaire d'utiliser une flamme sodée puisqu'il s'agit de "réflexions".

Au contraire pour faire une mesure d'indice *(réfraction)* il faudra pour ne pas avoir tout un spectre éclairer avec la flamme sodée *(sel fondu en suspension dans un bec Bunsen)*.

La méthode la plus exacte est celle de la réflexion totale.

*1)*on repère grossomodo la direction d'où vient la lumière; puis on cherche à l'oeil où se trouve le minimum de déviation *(en tournant la plateforme du prisme, la déviation diminue, reste stationnaire, puis augmente à nouveau)*. Quand on est très près du minimum, on regarde à travers la lunette

et l'on précise la position. On fait la lecture

2) on enlève le prisme *(ou tout au moins on l'écarte par un des mouvements de translation)* et l'on amène la lunette dans le prolongement du collimateur, ce que l'on reconnaît grâce au signal. On fait la lecture.

3) la différence des lectures est l'angle de déviation minimum pour le jaune du sodium.

<u>No 276:</u> Avec deux collimateurs: l'un projetant un micromètre en lumière jaune que l'on reçoit par réflexion dans la lunette; l'autre éclairé en lumière blanche que l'on reçoit par réfraction, *puisque la déviation n'est pas la même pour toutes les radiations (dispersion du verre)* ce n'est pas à la même division image du micromètre que l'on aura par exemple l'image de la raie rouge image de la fente et de la raie verte autre image de la fente; c'est le principe du spectroscope à prisme.
Un petit prisme P à réflexion totale *(comparison prism)* couvre la moitié supérieure de la fente de façon à pouvoir examiner simultanément le spectre de la lumière latérale S_2 et le spectre de l'autre lumière directe S_1 *(le spectroscope à prisme étale surtout la région violette, celle qui intéresse le plus les chimistes; au contraire, le spectroscope à réseau que nous verrons en 3e année étale surtout la région des grandes longueurs d'onde)*
On ne peut interpoler linéairement avec les spectres des prismes (ce ne sont pas des spectres normaux).

On se place dans le cas du minimum de déviation pour le jaune moyen. $0\mu 575$
Les deux spectres et l'image du micromètre forment leur image dans le plan focal de l'objectif de la lunette astronomique, un peu en deçà du foyer oculaire pour l'oeil. On a alors l'oculaire fonctionnant en loupe qui donne l'image virtuelle de l'image de l'objectif. fig.256

Problème 44: Donner la distance focale (f) et l'interstice (δ) de l'oculaire 4 - 3 - 2, oculaire achromatique de Huyghens en prenant a=3

Réponse: $f = \frac{8}{3}$, $\delta = a = 3$

Problème 45: Eléments du doublet de Wollaston (2)-(3)-(6)

Réponse: $f = \frac{12}{5}$, $\delta = \frac{3}{5}$

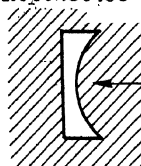
Problème 46: Exprimer le déplacement (d) latéral produit par la traversée d'une lame à faces parallèles plongée dans l'air; épaisseur e , indice n , incidence i

Réponse: $d = \frac{e \sin (i-r)}{\cos r}$

flamme sodée (Monochromatique)
Diaphragme
L_3
Collinateur à micromètre au foyer de L_3
Collinateur à fente
L_2
angle d'incidence
Normale
angle de réflexion
Objectif de la lunette astronomique
S_1 (blanche)
fente réglable au foyer de L_2
S_2 (blanche)
R
O
J
B
I
V
Rouge
orange
Jaune
Vert
Bleu
Indigo
Violet
l'oculaire donne des images virtuelles de la fente et du micromètre
foyer objet de l'oculaire.
Plan focal image de l'objectif
Oculaire de la lunette astronomique

Fig. 256

Problème 47: Un télescope *(lunette astronomique)* à une seule lentille pour oculaire. Il y a 1 mètre de l'objectif à la lentille oculaire et le grossissement est 9. Quelles sont les distances focales de chacune des lentilles?

Réponse: 90 cms et 10 cms.

Problème 48: lentille épaisse convergente *(creuse)* plan convexe f distance focale? δ interstice? le rayon est de 6 cms et l'épaisseur 1 cm au centre. $n = 1.5$

Réponse: $f = +18$; $\delta = 0.5$ *(en prenant un objet à 12 cms du dioptre sphérique, s'il est réel, l'image définitive et l'intermédiaire sont agrandies trois fois, le P.P.O. est au sommet du dioptre sphérique et le PPI à 0.5 du dioptre sphérique dans le verre extérieurement à la lentille)*

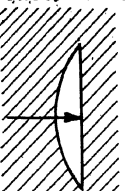



Fig. 257

Problème 49: lentille épaisse divergente creuse plan concave distance focale? interstice? le rayon est de 6 cms et l'épaisseur 1 cm au centre. $n = 1.5$

Réponse: f -18 ; $\delta = 0.5$ *(en prenant l'objet à 12 cms, du côté du dioptre sphérique, s'il est réel, l'image définitive et l'intermédiaire sont les 6/10 de l'objet, le $\pi\pi O$ est alors au sommet du dioptre sphérique et le $\pi\pi I$ à 0.5 cm à l'extérieur de la lentille, dans le verre)*

Fig. 258

Problème 50: Un presbyte ne peut voir distinctement plus près que 200 centimètres. Quel est le nombre de dioptries qui lui permettra de voir à 25 cms de l'oeil? *(négliger la distance entre la lentille et l'oeil)*
Réponse: +3.5 dioptries

Problème 51: Un myope peut voir même à 15 centimètres nettement. Pour voir les détails d'un objet qui se trouve à deux mètres, quels verres lui faudra-t-il?

Réponse: − 37/6 de dioptries

Problème 52: L'objectif d'un appareil de photo donne avec une exposition de 0.02 seconde une bonne photographie lorsque l'ouverture relative *(numerical aperture)* est de $\frac{d}{f} = \frac{1}{6}$;
Quelle exposition donner pour une ouverture relative de 1/16, toutes les autres conditions étant les mêmes?

Réponse: 0.142 seconde.

Problème 53: Quel est l'écart entre les images virtuelles données par le biprisme de Fresnel si la source est à 50 centimètres du biprisme et l'angle de chaque prisme 5 degrés *(n = 1.5 indice du verre)*

Réponse: 4 cms.4

50

Fig. 259

Problème 54: Combien voit-on d'images d'une bougie verticale quand on la place entre deux miroirs plans se coupant parallèlement à la bougie?

Réponse: $n \geqslant \frac{2\pi}{\alpha} - 1$ *(α est l'angle des deux miroirs en radians).*

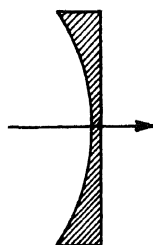
Problème 55: Au goniomètre on a évalué $A = 30°$ et Δ min $= 18°$, quel est l'indice du verre

Réponse: 1.57

Problème 56: lentille plan convexe pleine R=6, e=1, n=1.5

Réponse: (prenant un objet réel à 24 cms du côté du dioptre sphérique, les images ont même grandeur que l'objet, le P.P.O. est à l'intérieur de la lentille à 1/6 cm du dioptre sphérique où se trouve le P.P.I.)

Fig. 260

$f = +\frac{73}{6} \quad \delta = \frac{1}{6}$

Problème 57: lentille plan concave pleine R=6, e=1 , n=1.5

Réponse: (prenant un objet réel à 24 du côté du dioptre sphérique, l'objet est trois fois plus grand que les deux images successives, le π.π.I. est à l'intérieur de la lentille à 1/3 du π.π.O. qui coïncide avec le sommet du dioptre sphérique)

Fig. 261

$f = 12 \quad \delta = \frac{1}{3}$

Table analytique des matières

CHAPITRE PREMIER: CHOCS DES SOLIDES ET DES LIQUIDES *(pages 1 à 31).*

Impulsion des forces.- Choc direct de deux solides mous. - Choc direct de deux solides élastiques.- Coefficient de restitution des solides naturels.- Battage des pieux.- Chocs obliques *(ou indirects).* Centre de percussion *(raquette, pendule).*- Détermination physique du moment d'inertie d'un pendule composé. Balistiques de translation *(à la Hirn)* et de rotation *(Robins).* La forme que prend le théorème de la quantité de mouvement pour les mouvements de régime des liquides.- Pression d'un fluide sur une conduite coudée.- Réaction d'un jet *(Segner).* Contraction de la veine *(Borda).*- Expérience négative de Galilée.- Le théorème du moment de la quantité de mouvement *(turbine).*- La pression en théorie cinétique. Résilience. Moutons pendules *(de Charpy)* et Moutons rotatifs.

CHAPITRE DEUXIEME: ANALYSE STROBOSCOPIQUE ET AU MIROIR TOURNANT *(pages 33 à 47).*

L'analyse stroboscopique (pour les machines tournantes, les tiges et cordes vibrantes) et *l'analyse au miroir tournant (pour les flammes qui varient périodiquement en intensité et en forme)* constituent un chapître très important de la physique, celui où l'on étudie des phénomènes trop rapides pour les percevoir sans artifice et cela: *pendant qu'ils se produisent et sans arrêter le cours du phénomène ni même le ralentir réellement (ralenti par illusion).*

CHAPITRE TROISIEME: MOUVEMENTS HARMONIQUES. VECTEURS TOURNANTS. FIGURES DE LISSAJOUS. MODULATION. THEOREME DE FOURIER. *(pages 48 à 86).*

Mouvement sinusoïdal, vitesse, accélération.- Mouvements sinusoïdaux amortis.- Représentation de Fresnel*(vecteurs tournants).* Composition de deux mouvements sinusoïdaux de même période et de même direction.- Battements acoustiques.- Dérivation graphique.- Ellipses et autres figures de Lissajous. Théorème de Fourier.- Exemple de modulation.

CHAPITRE QUATRIEME: STATIQUE ET DYNAMIQUE DE L'ELASTICITE PLANE *(pages 87 à 126).*

Effort unitaire et déformation unitaire.- Modules d'Young pour l'extension et la compression.- Moment fléchissant. Angle total de flexion pour toute la poutre.- Fatigue maximum.- Module de Coulomb pour le glissement. Couple de torsion pour un cylindre plein. Equation de la fibre neutre d'une poutre prismatique.- Flèche.- Coefficient de Poisson.-

Relation entre les constantes élastiques et le coefficient volumique de compression uniforme.- Effort tranchant; l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant.- Oscillations d'un diapason.- Oscillations d'un fil de torsion. Vibrations harmoniques des systèmes à un degré de liberté. Méthode énergétique pour les étudier. *(Vibrations libres et forcées). (Des compléments d'Elasticité seront donnés en 3e année comme introduction à la Photoélasticité; à ce moment, les principes de ce chapitre auront été appliqués dans le Cours de Résistance des Matériaux).*

CHAPITRE CINQUIEME: VISCOSITE, TENSION SUPERFICIELLE, OSMOSE ET DIFFUSION *(pages 127 à 174).*

(I) *Frottements dans les fluides: Viscosité et tourbillons.* Coefficient de viscosité d'un liquide. Formule de Poiseuille pour un liquide.- Formule de Poiseuille corrigée *(liquide)*.- Formule de Stokes.- Cas des gaz *(compressibles):* débit.- Lévigation.- Coefficient de résistance et nombre de Reynolds.- Traînée et Portance; polaire d'une aile.- Gouvernail.- Lubrification.

(II) *Etude élémentaire de la tension superficielle (sans les données des rayons X).*-Pression sur une membrane courbe de tension uniforme.- Etirement d'une membrane plane. La capillarité est un phénomène de pression *(Jurin)*.-Tubes capillaires coniques.- Compte-gouttes.- Ondes de Surface *(ripples)*.-Tension superficielle et Evaporation.- Chaleur latente de vaporisation et énergie superficielle.

(III) *Osmose. Pression osmotique. Diffusion.* Loi de Van't Hoff sur les solutions non électrolysables et étendues.

CHAPITRE SIXIEME: THERMODYNAMIQUE ET THEORIE CINETIQUE *(pages 175 à 285).*

Rappel des lois des gaz vues en première année.- Le premier principe.- Expérience de Joule-Thomson.- Notion de cycle.- Rendement. Réversibilité du cycle de Carnot.- Second principe.- Températures absolues thermodynamiques.- Rendement maximum.- Identité de la température thermodynamique et de celle du gaz parfait.- L'entropie.- La fonction entropie, réversibilité et irréversibilité.- La machine réelle des points de vue de Thomson et de Clausius.- Les fluides réels, équation de Van der WAALS.- Les réduites.- Les états correspondants.- L'équation de Clapeyron.- Les potentiels thermodynamiques.- La chaleur totale est un invariant du laminage.- Equilibre des phases gazeuse et liquide.- Les principaux diagrammes industriels: de Clapeyron, de Gibbs *(entropique)* de Mollier et celui chaleur totale x pression.- Le titre en vapeur.- La surchauffe isobare.- Le cycle de Rankine pour la machine à vapeur.- Le diagramme de Clapeyron en coordonnées logarithmiques pour la région de saturation.- Le rendement à l'aide des tables, du diagramme entropique et du diagramme de Mollier.- La réfrigération mécanique par compression.- La règle des phases.- Application des deux premiers principes de la thermodynamique.- Le troisième principe *(de Nernst):* Problèmes.-

CHAPITRE SEPTIEME: ELECTROMAGNETISME: EFFET MOTEUR, INDUCTION, CHAMP DES COURANTS. *(pages 286 à 378).*

L'effet moteur: loi élémentaire de Laplace *(que l'on*

appelle aussi loi vectorielle); loi globale de l'effet moteur *(dite également loi scalaire ou "expression énergétique de l'effet moteur").* Convention de signe *(de Maxwell)* pour les flux. Equivalence d'une bobine à un aimant du point de vue de l'effet moteur. Loi de Rowland.

Le *self-champ des courants:* loi élémentaire de Laplace, champ d'un courant rectiligne, d'un courant circulaire, de toute une bobine suivant son axe.

Théorème d'Ampère sur la "force magnétomotrice" de la pile magnétique qu'est une bobine électrique.

Electrodynamique *(champ des courants sur les courants).*

CHAPITRE HUITIEME: SYSTEMES DIOPTRIQUES CENTRES. MICROSCOPE ET LUNETTES. *(pages 379 à 469)*

Théorème de Fermat sur le chemin optique.- Théorème de Malus sur les surfaces d'ondes, lieux des points équidistants "optiquement" de l'objet.- Stigmatisme.- Miroirs paraboliques *(phares d'autos).* Le dioptre sphérique est stigmate pour tous les points de sa surface, pour son centre et pour tous les points situés à R÷n ou à (Rn) du centre.- Aplanétisme.- Condition des sinus traduisant l'aplanétisme pour les points connus comme stigmatiques.- Surface caustique et droites focales.- Etude de la déviation du prisme.- Variation de la déviation avec l'angle d'incidence; cas des petits angles.- Comment utiliser les propriétés aplanétiques du dioptre sphérique pour *éclairer sous de grands angles et recevoir des faisceaux de grande ouverture.* -Equation de Lagrange pour un système centré.- Plans principaux et foyers principaux, position et grandeur de l'image.- Points nodaux. Rapport des distances focales extrêmes. Détermination expérimentale des éléments d'un système optique centré *(Cornu).*- Lentille épaisse.- Association de lentilles minces dans l'air, foyers et plans principaux d'un doublet.- Systèmes afocaux. Collimateur et lentille astronomique.- Lentille de meilleure forme.- Lentille à échelons *(Fresnel).*- Le coma des rayons obliques.- Distorsions en croissant et en barillet: doublet symétrique. Achromatisme *(lentilles accolées).*- Intensité lumineuse et brillance. Bougie et lumen.- Lux ou bougie-mètre.- Champ, clarté. Loupes, oculaires positifs et négatifs.- Microscope. Cercle oculaire et point oculaire.- Puissance, grossissement.- Chambre claire. Parties d'un microscope.- Jumelles à prisme.- Objectif photographique. Goniomètre.- Spectroscope à prisme.-

Errata Corrigenda

FAUTES A CORRIGER

Au lieu de	*lisez*	Page
:La conduite(32e ligne)	:Le coude	18
:poussée (20e ligne)	:poids du plateau de gauche	20
:poussée (26e ligne)	:poids	20
:poussée (29e ligne)	:poids	20
:implusion (25e ligne)	:impulsion	25
:N molécules (10e ligne)	: $\frac{1}{N}$ molécule	27
:Rép:743 (Problème 4)	:446	30
:tours (17e ligne)	:trous	33
:période (5e et 6e lignes)	:fréquence	35
:J.L. (44e ligne)	:J. Lemoine	43
:dérivée (19e ligne)	:dérivée seconde	50
:log (31e ligne)	: $\log_e$	55
: $tg\varphi=-\frac{\dot{X}_0}{X_0}\frac{M}{k}$ (7e ligne)	: $tg\varphi=-\frac{\dot{X}_0}{X_0}\sqrt{\frac{M}{k}}$	57
: ρ (9e ligne)	: $1/\rho$	93
:Deis (20e ligne)	:Depuis	95
:l'on me (21e ligne)	:l'on nomme	95
:modul (22e ligne)	:modulus	95
:fxion (23e ligne)	:flexion	95
:lastque (24e ligne)	:lastique	95
:mitl (30e ligne)	:mité	95
:de l'effet de cisaillement unitaire: s :par l'aire tangentielle sur laquelle il s'exerce a (19e et 20e lignes)	:de l'effort tangentiel unitaire T= (Force tangentielle ÷ aire tangentielle) :par l'angle de glissement φ=(déplacement tangentiel ÷ distance au plan immobile)	99
:moment d'inertie (22e ligne, à droite)	:moment superficiel polaire central	101
:moment superficiel de section droite (22e ligne, à gauche)	:moment superficiel axial de section droite	101
: $d\theta$ (2e ligne	: $\frac{d\theta}{dx}$ *ou mieux* $\frac{d\theta}{ds}$	103
: $\frac{r''}{1+z'^2}$ (2e ligne)	: $\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}$	103
: -EIZ''' 0 (1ère ligne)	:(-EI)(Z''' < o)	109
:-(-EIZ'''')dx (14e ligne)	:-(-EIZ'''')d X	110
:L (17e,19e,21e lignes)	: l	110
:C (22e ligne)	:D	111
:de (8e ligne)	:De	113
: $2\pi+1$ (35e ligne)	: $2n+1$	113
: μJ (13e ligne)	: $\mu J \div L$	115
: $\frac{\pi}{32}\frac{d^4}{L}$ 15e ligne)	: $\frac{\pi}{32}d^4$	115

	Au lieu de		Lisez	Page
	:énergie (22e ligne)		:inertie	115
	:connue de l'inertie (32e)		:connue l'inertie	115
	: μJ (39e ligne)		: $\mu J \div L$	115
Au lieu de	: μJ (4e ligne)	*lisez*	: $\mu J \div L$	116
	:d au numérateur et d au dénominateur (45e,46e)		: $(d)^2_{disque}$ au numérateur et $(d)^4_{axe}$ au dénominateur	I20
	:le déplacement statique (10e ligne)		:amplitude statique	123

Ajoutez (Problème 18) en déduire que le module de Coulomb vaut: $\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ 126

:figure (2ème ligne)	:figures	48

Bibliographie

I TRAITES GENERAUX DE PHYSIQUE

Cours de Physique, 3 vol. par Chappuis et Berget;Gauthier Villars *(bon mais vieilli)*

Physique Générale Supérieure, Scientifique, Technique,5 tom. par G.Bruhat; Masson *(le plus moderne et le plus complet)*

Physique Générale, 3 tomes, par H. Ollivier; Hermann *(l'optique est bien)*

Physique Générale et Expérimentale, 3 tomes, par Lemoine et Blanc; Librairie Enseignement Technique *(la mécanique est intéressante)*

*Bibliothèque Scientifique de l'Ingénieur et du Physicien par H. Bouasse; Delagrave *(les figures sont claires, les préfaces "incendiaires" et l'auteur vise plus à l'originalité qu'au confortable de la lecture)*

Traité de Physique de O.D.Chwolson; Hermann *(excellente collection)*

Physique de Mathématiques Spéciales par Lemoine et Guyot; Vuibert *(le meilleur des traités de " spéciales")*

The Student's Physics, par divers auteurs; collection de Blackie *(très intéressant et très moderne)*

Text books of Physics par Grimsehl; Blackie *(intéressant)*

*Cours de Physique, 3 tomes, par J.Becquerel; Hermann

General properties of Matter by Newman and Searle; Benn *(Tout ce qui est négligé ailleurs y est traité clairement et complètement)*

II FORMULAIRES ET TABLES.

Handbook of Chemistry and Physics by Hodgman; Chemical Rubber Co *(indispensable, édition annuelle constamment augmentée). (2000 pages).*

Smithsonian tables by Fowle; Smithsonian.

Physical constants by Childs; Methuen *(livre de poche)*

Dictionary of Applied Physics by Glazebrook; Mac Millan.

Tables de vapeur saturée et surchauffée par Mark and Davis; Longmans.

III MECANIQUE

Le choc des solides par Boulanger; Gauthier Villars *(original et bien fait)*

Dynamique des solides tournants par Boulanger; Gauthier Villars *(original et bien fait)*

Mécanique (Arts et Métiers) tome I, par Guillot; Béranger *(très clair)*

Mechanics (M.I.T.) by Franklin, McNutt; Constable *(nombreux problèmes)*

Mechanics by Boyd; McGraw Hill.

Elementary Mechanics of Solids by Baxter; Blackie.

*Vibration problems in Engineering by Timoshenko; Van Nostrand.

*Propriétés cinématiques des vibrations par A.Guillet; Gauthier Villars.

Statique graphique par Bayle;Ecole Spéciale des Travaux Publics.

Viscosity of Liquids by Hatschek; Bell.

IV THERMODYNAMIQUE

Thermodynamique par Fabry; Armand Colin

Thermodynamics by Porter; Methuen;

*Thermodynamique par Leduc; Doin;

Thermodynamics by Birtwistle; Cambridge*(court et ingénieux)*

Graphical Thermodynamics by Huntington; Heath.

*Heat by Preston; McMillan *(très complet)*

Heat by Franklin, McNutt; Constable *(simple, nombreux problèmes)*

Engineering Thermodynamics by Moyer, Calderwood, Potter; Wiley.

Thermodynamics by Emswiler; McGraw Hill.

Thermodynamics by Lewis and Randall; McGraw Hill *(très intéressant)*

Elements of Thermodynamics by Fernald;McGraw Hill *(très intéressant)*

*Heat and Thermodynamics by Roberts; Blackie *(très complet)*

V ELECTRICITE

Eléments d'Electricité par Fabry; A.Colin

* Electrotechnique Générale par Janet, tomes 1 et 2, les débuts).....

* Principles of Electricity by Page and Adams; Van Nostrand *(très clair)*

Electricity and Magnetism by Franklin, McNutt; Constable *(excellent, nombreux problèmes bien choisis)*

* Transmission networks and wave filters by Shea; Van Nostrand *(les débuts)*

* Filtres Electriques par David; Gauthier-Villars *(les débuts)*

Engineering Mathematics by Steinmetz; McGraw Hill *(très clair)*

VI OPTIQUE

Introduction to Physical Optics by Robertson; Van Nostrand *(clair, problèmes).*

Sound and Light by Franklin, McNutt; Constable *(très bien, problèmes)*

Experimental Optics by Wagner; Wiley

* Physical Optics by Wood; McMillan

* Précis d'Optique, tome I, par Drude; Gauthier-Villars *(très complet)*

VII DIVERS

The Physics of High Pressure by Bridgman; Bell

Physics of Solids and Fluids by Ewald, Pöschl, Prandtl; Blackie

Météorologie par Angot; Gauthier-Villars

Prévision du temps par Rouch; Alcan

Climatology by Miller; Methuen

Climates of Continents by Kendrew; Oxford

L'Air par Berget; Larousse

Lexique Météorologique par L'Office National Météorologique de France

Report of the use of the Windmill for generation of electricity. by Inst. Agric. Engin.; Oxford

Physics of the earth,6 vol.National Research Council

Physics of the air by Humphreys; McGraw Hill

Parachute Manual by Air Ministry;H.M.S.O.

Volcanic Energy by Soley; Putman

Geologie Sismologique de Montessus de Ballore

Index Alphabétique

(des matières du tome II seulement; un index récapitulant les trois tomes se trouvera à la fin du tome III)

A

A:désigne le travail
aberrations, p.437 et seq.- achromatiques, p.445
absolues *(températures)* p.191 *(pour la théorie seulement.- exercices dans le tome I)*
accidents *(rupture circuits grande self)* p.321 à 325
achromatisme des lentilles, p.446
adiabatique, p.182 *(graphique et numérique, voir tome I)*
afocaux *(systèmes)* p.431; voir aussi doublets et triplets
aiguille flottante *(tension superficielle)*p.158
aimant équivalent à une bobine, p.291
aimantation*(travail d')*p.331 *(notions élémentaires,tome I)*
amortissement apériodique, p.59
amortissement critique, p.57; apériodique p.59
Ampère *(André)* formule d', historique, p.356 et seq.
Ampère *(théorème sur la force magnétomotrice d'une bobine)* p.302,305,319,338,355.
ampèremètre électrodynamique, p.313 *(ampèremètre thermique, tome I)*
ampèretours magnétisants, p.310
amplification par résonance, p.123
amplitude variable *(ou du groupe)* p.65
analyse graphique des courbes périodiques, p.75 et seq.
Andrews *(isothermes de CO_2)*p.222
anémomètre, p.136
angles *(mesure au goniomètre à un seul cercle)* p.465
angle total de flexion, p.93
anhydride carbonique *(réseau d'Andrews)*p.222;*(réseau d'Amagat)*p.228 et 230
antiprincipaux, p.412
apériodique *(amortissement)* p.59
aplanétisme, p.393 et 394
astigmatisme *(non stigmate, α privatif)*
astronomique *(lunette)*p.435 et 436
Avogadro, p.176

B

B: désigne le vecteur induction magnétique, champ dans l'entrefer
balais *(brushes)*p.340
balistique *(galvanomètre)* p.329
balistique de translation *(pendule, suspension "à la Hirn")* p.14
balistique de rotation *(pendule de Robins)*p.15
barillet *(distorsion en)*p.441
battage des pieux, p.6
battements acoustiques, p.63
battements acoustiques rendus visibles optiquement p.67

Berthelot *(Daniel)* p.240
billard, p.7
Biot-Savart-Laplace, p.287; historique, p.367
Birtwistle *(machine à plusieurs sources)* p.197
bobine *(champ axial)* p.300 et seq.
bobine d'induction de Ruhmkorff, p.344 et seq.
bobine de self induction, son coefficient, p.313
Boyle *(loi)* dite aussi de Mariotte, p.175
brillance, p.448
bulle d'air, p.154

C: désigne les chaleurs spécifiques,
$\mathfrak{C}$:le couple ou moment statique
Cailletet-Mathias *(diamètre rectiligne)*p.239
caractéristiques *(fonctions)*p.245
Carnot Lazare*(énergie perdue par choc mou)*p.5
Carnot Sadi *(cycle)* p.184
Carnot Sadi *(principe d'évolution)* p.189
caustiques *(surfaces)* p.396
centre de percussion, p.8
centrés *(formule des systèmes optiques centrés)*p.416
chaleur latente et énergie superficielle, p.170
chaleurs spécifiques, p.180
chaleur totale, p.245, p.249
chambre claire, p.467
champ limité par des diaphragmes, p.441 et seq.
champ magnétique des courants, p.293 et seq.
Charles *(loi de)* p.175
Charpy *(mouton pendule)* p.27
chemin optique, p.380
chocs élastiques, p.4
chocs *(liquides)* p.17 à 25
chocs mous, p.3; perte d'énergie *(Lazare Carnot)*p.5
chocs obliques, p.7
chocs *(problèmes sur les)*p.29 et seq.
chocs *(solides)* p.1 à 17
chromatiques *(aberrations)*p.445
circuit magnétique *(calcul)*p.347 et seq .
cisaillement, p.95
Clapeyron *(diagramme)*p.176; *(équation)* p.242
clarté, p. 453
Clausius *(entropie)*p.199
coefficient de Poisson, p.105 *(Poisson-ratio)*;*(trouvé par Navier en réalité)*
coefficient de résistance, p.134
coefficient de restitution de Newton, p.5
coefficient de viscosité, p.128
coefficient de self induction, p.313
coefficient d'induction mutuelle, p.313
coins verticaux *(capillarité)* p.166
collimateur, p.435 et 436
cônes capillaires, p.154 et 155
coma, p.439 et 440
composition de mouvements sinusoïdaux parallèles de même période, p.63

composition de deux mouvements sinusoïdaux en croix, p.71
compressible *(fluide, débit)* p.132
compte-gouttes, p.155
condenseur de lumière dans le microscope, p.469 et 470
condition d'aplanétisme, p.394
constante capillaire, p.144
constante moléculaire-gramme, p.176
contraction de la veine *(Borda)* p.19
Cornu, p.416 *(méthode pour déterminer les éléments d'un système optique centré).*
correspondance d'états des fluides, p.229; problèmes sur p. 234 et seq.
Coulomb *(module de, ou module de rigidité, de glissement, de cisaillement)* p.95
couple de torsion p.95
courants circulaires, p.297
courants de déplacement de Maxwell, p.352
courants rectilignes, p.296
coussinet *(distorsion en)* p.441
critique *(amortissement)* p.57
critique *(point pour une masse donnée)*p.219
critiques *(détermination des constantes critiques)* p.237
croissant *(distorsion en)* p.441
curl ou rotationnel ou vecteur tourbillon, p.336 et 355
cycle de Carnot*(Sadi)* p.183
cycles *(problèmes sur les)* p.282
cycle de Rankine, p.257

D

D: désigne le vecteur "déplacement" ou induction électrostatique.
débit des fluides compressibles, p.132
décrément logarithmique, p.55
densité optique *(variante de l'indice de réfringence)* mesure p.410
déplacement électrique de Maxwell, p.352
dérivation graphique des fonctions sinusoïdales, p.67
Descartes *(lentilles stigmates de)* p.391
déviation minimum d'un prisme, p.409 et seq.
dialyse, p.172
diamètre rectiligne, p.239
diapason *(oscillations)*p.109 à 115
diaphragme, p.399; p.442
diffusion, p.171
dilatation cubique élastique, p.104
dilatomètre, p.212
distorsion, p.441
dioptres stigmates, p.389; dioptre sphérique*(grandissement)* p.417
doublets de lentilles minces, p.425 et seq .; doublets afocaux, p.432

E

E: désigne le champ électrostatique.
échelons *(lentille à)*p.438
éclairement, p.449. - éclairage, p.452
effet moteur *(loi scalaire)*p.290;*(loi vectorielle)* p.287
effort tranchant dérivée du moment fléchissant, p.107
élasticité plane, p.87 et seq.
élasticité *(problèmes d')*p.125 et 126
électricité *(problèmes d')* p.376 et seq.
électroaimant plongeur, p.342 et seq.
électrodynamique d'Ampère, p.310 et seq.
électromagnétisme, p.286
électrostatique *(champ, son effet sur les particules élec-triques)* p.349
éléments d'un système optique centré *(Cornu)* p.416
éléments d'un microscope, p.460 à 463
ellipses de Lissajous, p.71
émergence *(condition d'émergence du prisme)*p.409; rayon émergent construit géométriquement, p.413
énergie interne, p.176; variations, p.178 et p.246
énergie libre, p.250
énergie magnétique emmagasinée par la self, p.327
énergie superficielle et chaleur latente, p.170
entropie, p.195; accroissement d', exemples, p.200 et seq.
enveloppe *(onde)* p.384
épaisse *(lentille)* p.419
équivalent mécanique de la chaleur, p.176
établissement du courant, p.323
états correspondants des fluides, p.229 *(problèmes sur les)* p.234 et seq.
évaporation et tension superficielle, p.166
expérience de Joule-Thomson, p.179
expression scalaire *(énergétique)*de l'effet moteur
évolution *(principe de Carnot)*p.189
excentricité, p.388
excitation *(bobine magnétisante d'une machine électrique* p.340
exfocalisation d'un phare d'auto, p.388

F

F: désigne la force
facteur d'amplification par résonance, p.123
fatigues unitaires normale et cisaillante, p.101
Fermat *(principe de)* p.380
fermeture du circuit électrique, p.323
feuillet magnétique, p.374
feuilletage des induits, p.318
fibre neutre élastique *(lieu des centres de gravité)* p.101
figures de Lissajous, p.71
flèche maximum d'une poutre fléchie, p.103
flexion simple, p.101
fluides compressibles *(débit)* p.132
fluides réels, p.207 et seq.
focales, p.396, 402, 403

fonctions caractéristiques, p.245
force électromotrice d'induction, p.315 et seq.
force magnétomotrice, p.302, 305, 319, 338, 355
forme *(lentilles de meilleure forme)* p.437 et 438
formule des systèmes optiques centrés *(tableau)*p.416
Foucault *(courants de)* p.318
fréquence d'un diapason, p.114
fréquence mécanique, p.33
Fresnel *(vecteurs tournants)*p.59 et seq; lentilles à échelons de Fresnel, p.438
frottement de viscosité, p.127

g: désigne l'accélération de gravité
Galilée *(expérience négative sur choc liquides)*p.20;lunette *(d'opérette)*p.433
galvanomètre balistique, p.329
Gauss *(théorème de)*p.337; plans principaux de Gauss, p.411
Gay-Lussac *(loi de)*p.175
géométrique *(optique, son domaine)*p.382; construction géométrique du rayon émergent, p.413
Gibbs *(Willard)(phases de)* p.251, son diagramme entropique p.253
goniomètre à un seul cercle, p.464
goutte de mercure *(forme)*p.152
gouvernail, p.141
graissage*(lubrification)* p.141
grandissement linéaire, p.417
Grossissement angulaire p.419 définition; p.452 mesure

H

H: désigne le champ magnétique des aimants ou des courants
Helmholtz, p.410
Hooke *(lois de)*p.87 et 89
Huygens *(Christian)*p.384; oculaire de Huygens, p.456
hydrogène *(réseau de l')*p.218
hystérésis, p.332

I

I: désigne le moment d'inertie en mécanique, le courant en électricité
impulsion de la force, p.1 et 2
indice de réfringence *(mesure)*p.410
induction vecteur, p.310
induction *(bobine d')*p.344
induction magnétique des courants de Faraday, p.314
infiniment petits *(cas des angles, formules réduites du prisme de petit angle)* p.409
inscription graphique, p.41
intégrale définie déduite de l'aire, p.82
interrupteurs à cornes, soufflage magnétique, p.343

irréversible *(cycle)* p.207

J

J: désigne en France l'équivalent mécanique de la calorie qui s'écrit E en Amérique
Joule *(expérience)* p.179
Joule-Thomson *(paroi poreuse* p.179
jumelles à prismes, p.464
Jurin *(lois)* p.148

K

Kelvin *(température absolue)* théorie, p.191; pratique, voir tome I.
Kelvin *(dissipation de l'énergie mécanique)* p.206
Kelvin-Clausius *(comparaison des points de vue)* p.206

L: désigne les longueurs
Lagrange-Helmholtz, p.410; relation entre le grandissement, le Grossissement et les indices extrêmes
Lambert, p.449
laminage de la vapeur, p.250
lentille épaisse, p.417 et seq.
lentilles minces *(doublets de)* p.425 et seq.
lentilles stigmates de Descartes, p.391
Lenz *(loi de)* p.317
Léonard de Vinci, p.31
lévigation, p.133
liquéfaction, p.219
loupe, p.454, puissance de la loupe
lubrification, p.141
lunette astronomique, p.435 et 436

M

M: désigne la masse ou inertie de translation
machine à vapeur, p.186
magnétomotrice *(force)* p.302,305,319,338,355
Malus, p.382
manométrique *(flamme* p.43 et 46
Mariotte *(loi)* Boyle, p.175
Maxwell *(signe des flux)* p.291
Mayer *(Robert)* p.181
ménisque de raccordement, p.149
microscopes *(polarisant,etc)* p.457 à 463; grossissement, p. 457
minces *(lentilles)* doublets de: p.425 et seq.
miroir parabolique, p.385 et seq.

miroir tournant, p.43 et 46
modulant *(facteur)*p.65
modulation, p.84 et seq.
modules de section axial *(flexion)*et polaire *(torsion)*p.101
Mollier *(diagramme de)*p.253 et seq.
moments fléchissant et antifléchissant *(réaction élastique)* p.89
moment d'inertie d'un équipage de torsion, p.115
moment d'inertie d'un pendule composé, p.11
moment magnétique d'un solénoïde, p.371
moment superficiel axial de section droite, p.92 *(appelé à tort d'inertie)*
moment superficiel polaire central de section droite, p.101 *(dit à tort d'inertie)*
Morse, p.174
moteur *(effet d'un champ magnétique sur un circuit)* p.287
moteur électrique, p.340 *(en continu, bobiné en anneau, toutes spires en série, à excitation séparée et bipolaire)*
mouton pendule de Charpy, p.27
mouton rotatif de Guillery, p.29

N

N: désigne le nombre de tours par minute
naturel *(processus spontané)* p.200
négatif *(oculaire)*p.456
Nernst *(théorème sur la chaleur)*p.277
Neumann *(analogie de, en capillarité)*p.163
Neumann *(formule de, en électricité)*p.339
Newton *(formules de)*p.412
Nicol *(polariseurs rectilignes et analyseurs rectilignes)* p.469,470 et 471
nodaux *(points)*p.415

O

objectif de microscope, p.469; photographique, p.464
obliquité *(coma)*p.439 et 440
oculaires positifs et négatifs, p.456 et seq.
oeil, p.460
ondes enveloppes d'Huygens, p.384
optique géométrique *(domaine de l')*p.379; optiques centrés *(formules des systèmes)*p.416
orthoscopie, p.444
oscillations de flexion, p.109 *(diapason)*
oscillations pendulaires, .49 et seq.
oscillations d'un ressort boudin, p.117
oscillations de torsion, p.115
osmotique *(dépression)*p.173
ouverture relative d÷ f , p.464 *(photographie)*

P

parabole
parabolique *(miroir)* p.385 et seq.
paroi semi-perméable, p.171
parties d'un microscope, p.460 à 463
passage d'un système d'unités à un autre, p.350
pendule simple, p.49
pendules amortis, p.51 à 60
percussion *(centre de)*, p.8
période mécanique, p.33
période d'un pendule, p.49
petits angles *(formules du prisme)* p.409
Pfeffer, p.174
pièces composant un microscope polarisant, p.460 à 463
phases *(équilibre des)* p.251
phase *(en phase)*: angle = *(pulsation)(durée)* + constante, p.51, 73 et 75
phases du choc, p.2
photométrie, p.447 et seq.
pinceaux, p.436 et 455
plans principaux de Gauss, p.411; antiprincipaux, p.412
platine de microscope *(support des objets à examiner)* p.470
point critique, p.219
points nodaux, p.415 *(remplaçant le centre optique dans les lentilles épaisses)*
Poiseuille, p.129
Poisson *(coefficient, "ratio")* p.105 *(trouvé physiquement par Navier)*
polaire d'une aile, p.139
polarisant *(microscope)* p.457 à 463
polarité d'une bobine d'induction *(distinguer les pôles)* p.344
pose *(durée de la)* p.464
positif *(oculaire)* p.456
potentiel magnétique, p.333
potentiel thermodynamique à volume constant, p.245
potentiel thermodynamique sous pression constante, p.245
potentiel vecteur, p.336
premier principe de la thermodynamique, p.176
pression interprétée par la statistique des chocs, p.25
pression osmotique *(dépression plutôt)* p.173
principaux *(plans)* p.411
prisme *(formules du)* p.407; spectroscope à prisme, p.466 et 467.- cas des petits angles, p. 409
pupilles, p. 441

Q

Q: désigne la quantité de chaleur
quantité de chaleur, p.182

R

R: désigne le nombre d'ohms *(résistance électrique)*
raccordement d'un liquide et d'un plan , p.149

radiance, p.451
Ramsden *(oculaire)* p.456
Rankine *(cycle)* p.257
rayonnement, p.450
rectilinéaire, p.444
redresseur afocal des anciennes lunettes terrestres, p.431
réduites des fluides, p.233
réfrigération mécanique, p.186 *(voir diagramme de Mollier, p.274)*
regel, p.244
Renard *(frein aérodynamique)* p.137
rendement thermique maximum *(coefficient économique)* p.185 et seq.
résilience, p.27
résistance *(coefficient de)* p.134
résonance, p.121
restitution *(coefficient de)* p.5
réversibilité, p.188
Reynolds *(nombre d'Osborne)* p.134
rhéostat de démarrage, p.341
Robinson *(anémomètre)* p.136
rotationnel *(tourbillon "curl")* p.336 et 355
Rowland *(effet moteur sur les particules)* p.293 et p.348
Ruhmkorff, p.344 et seq.
rupture d'un circuit de grande self induction, p.325
rupture *(courant de)* p.328

S: désigne l'entropie
sagittale *(focale)* p.403 à 405
saturée *(vapeur)* p.255
sauteuse *(bobine)* p.329
Savart *(Biot-Laplace)* p.287; historique, p.367
second principe de la thermodynamique, p.188
self champ des courants, p.293 et seq.
self induction *(circuit doué de, rupture....)* p.321
semi-perméable *(paroi)* p.171
sensibilité de l'oeil, p.451
signal, p.464
sinusoïdal *(mouvement)* p.48 et seq.
sinusoïdal amorti, p.51
sinusoïdal amorti par frottement solide, p.51
sinusoïdal amorti par frottement liquide, p.51 et seq.
solénoïde *(moment magnétique)* p.371
soufflage magnétique des arcs, p. 343
spectroscope à prisme, p.466 et 467
sphéricité *(aberrations de)* p.434
stéréoscopie, p.464
stigmatisme parfait, p.384; surfaces stigmates, p.389 et seq; lentilles stig., p.391
stigmatisme approché, p.391 et 407
stroboscopie d'une ailette *(au disque troué)* p.34 à 37
stroboscopie d'une tige *(au disque troué)* p.39
stroboscopie au néon *(avec corde vibrante)* p.43 et 44
stroboscopie *(problèmes sur la)* p.45 et 47
Stokes *(formule de)* p.132

Sturm *(focales de)* p.402 et seq.
superficielle *(tension)* p.144
superposition de réseaux de fluides réels *(Amagat)* p.231
surfaces caustiques, p.400 et 401
surfaces stigmates, p.399
surchauffe, p.255
systèmes d'unités électriques, tableau de passage, p.350
système optique centré *(éléments)* p.416

T: désigne soit la période, soit la température absolue
tableau de passage d'un système d'unités électriques à l'autre, p. 350
tableau des formules des systèmes optiques centrés, p.416
tangentielle *(focale)* p.403 à 405
tension superficielle, p.144; *(problèmes sur)* p. 280 et 281
tension superficielle et évaporation, p.166
théorie cinétique des gaz, p.25 et seq.
thermodynamique ou énergétique, p.175 et seq.
Thomson William *(équation de)* p.250
tirage d'une lunette *(effet)* p.432
tirebouchon de Maxwell, p.291
torsion simple *(théorie)* p.95 et seq; constante de torsion, p.101
torsion simple *(formules)* p.101; oscillations de torsion, p.120
tournant *(miroir)* p.43 et 46
travail d'aimantation, p.331
triplets afocaux, p.434
troisième principe de la thermodynamique, p.277
turbines *(théorème d'Euler)* p.23

U

U: désigne le potentiel
unités électriques, tableau de passage, p.350
unités photométriques, p.450

V

V: désigne la vitesse linéaire);
ω désignant l'angulaire
vibrations forcées, p.121
vibrations libres *(naturelles, propres)* p.119
viscosité, p.127 et seq.
viseur afocal pour fusil, p.431
vitesse des projectiles *(mesure de la)* p.16

W

W: désigne la puissance;
$W = \mathbf{F}.\mathbf{V} = \mathcal{C}.\omega$
Waals *(van der)* p.223 et p.232
wattmètre, p.312

X

X: symbole du produit vectoriel*(cross product)*; le produit scalaire ou *(dot product)*étant désigné par un gros point noir " • "

Y

Y: désigne tantôt le module de Thomas Young, tantôt le montage en étoile du triphasé

Young*(module d')* p.87
Young Sydney, p.233

Z

Z: désigne le nombre de spires d'une bobine; en atomistique, la charge du noyau d'atome.